

ЛИНЕЙНЫЕ И НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ

Монография написана известным ученым, внесшим существенный вклад в развитие современной теории волн. Она охватывает все основные аспекты этой теории; особое внимание уделяется нелинейным волнам. Изложение общих математических идей свободно перемежается с обсуждением частных случаев и конкретных приложений, относящихся к самым различным областям физики и техники (волны на воде, газовая динамика, нелинейная оптика, потоки транспорта).

Книга рассчитана на студентов старших курсов и аспирантов, специализирующихся в области прикладной математики, физики и техники. Она будет полезна специалистам по общей теории волн, механике жидкостей и газов, океанографии, оптике, физике плазмы и т. п.

Содержание

Предисловие редактора перевода	5
Предисловие	6
Глава 1. Введение и общий обзор	7
1.1. Два основных класса волновых движений	8
1.2. Гиперболические волны	10
1.3. Диспергирующие волны	15
1.4. Нелинейная дисперсия	19
ЧАСТЬ I. ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ	
Глава 2. Волны и уравнения первого порядка	23
2.1. Непрерывные решения	24
2.2. Кинематические волны	31
2.3. Ударные волны	35
2.4. Структура ударной волны	37
2.5. Слабые ударные волны	41
2.6. Условие опрокидывания	42
2.7. Замечание о законах сохранения и слабых решениях	44
2.8. Построение разрывов; квадратичная функция $Q(p)$	47
<i>Одиночный горб</i>	51
<i>N-волна</i>	53
<i>Периодическая волна</i>	55
<i>Слияние разрывов</i>	57
2.9. Построение разрывов; произвольная функция $Q(p)$	58
2.10. Замечание о линеаризованной теории	60
2.11. Задача с краевым условием; распространение сигнала	62
2.12. Более общие квазилинейные уравнения	66
<i>Затухающие волны</i>	67
<i>Волны от движущегося источника</i>	68
2.13. Нелинейные уравнения первого порядка	69
Глава 3. Конкретные задачи	72
3.1. Поток транспорта	72

<i>Задача о светофоре</i>	75
<i>Эффекты высших порядков. Диффузия и время реакции</i>	77
<i>Волны высшего порядка</i>	79
<i>Структура ударной волны</i>	80
<i>Замечание о дискретных моделях</i>	82
3.2. Паводковые волны	84
<i>Эффекты высшего порядка</i>	86
<i>Устойчивость; катящиеся волны</i>	88
<i>Моноклиальная паводковая волна</i>	90
3.3. Ледники	94
3.4. Химические процессы обмена; хромато-графия; отложение осадков в реках	96
Глава 4. Уравнение Бюргерса	99
4.1. Замена Коула — Хопфа	100
4.2. Поведение решения при $v \rightarrow 0$	101
4.3. Структура ударной волны	104
4.4. Одиночный горб	105
4.5. N -волна	109
4.6. Периодическая волна	112
4.7. Слияние ударных волн	113
Глава 5. Гиперболические системы	115
5.1. Характеристики и классификация систем	116
5.2. Примеры классификации систем	119
5.3. Инварианты Римана	125
5.4. Интегрирование шагами при помощи характеристик	126
5.5. Разрывы производных	129
5.6. Разложение вблизи волнового фронта	131
5.7. Пример. Речные волны	135
<i>Волны на мелкой воде</i>	136
<i>Паводковые волны</i>	136
<i>Приливная бора</i>	137
5.8. Ударные волны	138
5.9. Системы с большим числом независимых переменных	140
5.10. Уравнения второго порядка	142
Глава 6. Газовая динамика	144
6.1. Уравнения движения	144
6.2. Точка зрения кинетической теории	148
6.3. Уравнения без учета вязкости, теплопередачи и релаксации	151
6.4. Термодинамические соотношения	152
<i>Идеальный газ</i>	153
<i>Удельные теплоемкости</i>	154
<i>Идеальный газ с постоянными удельными теплоемкостями</i>	154
<i>Кинетическая теория</i>	155
6.5. Иные формы уравнений движения	156

6.6. Акустика	158
<i>Изотермическое равновесное состояние</i>	161
<i>Конвективное равновесное состояние</i>	161
6.7. Нелинейные плоские волны	162
6.8. Простые волны	164
6.9. Простые волны и кинематические волны	168
6.10. Ударные волны	170
<i>Полезные модификации условий на разрыве</i>	172
<i>Свойства ударных волн</i>	174
<i>Слабые ударные волны</i>	175
<i>Сильные ударные волны</i>	176
6.11. Слабые ударные волны в простых волнах	176
6.12. Задача Коши; взаимодействие волн	180
6.13. Задача об ударной трубе	183
6.14. Отражение ударной волны	185
6.15. Структура ударной волны	186
6.16. Автомодельные решения	189
<i>Задача о сильном взрыве</i>	190
<i>Автомодельные уравнения</i>	193
<i>Задача Гудерля о сходящейся ударной волне</i>	194
<i>Другие автомодельные решения</i>	197
6.17. Стационарное сверхзвуковое течение	197
<i>Характеристические уравнения</i>	199
<i>Простые волны</i>	201
<i>Соотношения для косо́й ударной волны</i>	203
<i>Отражение косо́й волны</i>	204
Глава 7. Волновое уравнение	206
7.1. Области приложений волнового уравнения	206
<i>Акустика</i>	206
<i>Линеаризованное сверхзвуковое течение</i>	207
<i>Теория упругости</i>	208
<i>Электромагнитные волны</i>	210
7.2. Плоские волны	210
7.3. Сферические волны	211
7.4. Цилиндрические волны	214
<i>Поведение вблизи начала координат</i>	216
<i>Поведение вблизи волнового фронта и на больших расстояниях</i>	217
<i>Хвост цилиндрической волны</i>	218
7.5. Сверхзвуковое обтекание тела вращения	219
<i>Сопротивление</i>	221
<i>Поведение вблизи конуса Маха и на больших расстояниях</i>	222
7.6. Задача Коши в двух и трех измерениях	223
<i>Проверка решения</i>	226
<i>Волновой фронт</i>	227

Двумерная задача	228
7.7. Геометрическая оптика	229
Разрывы функции φ и ее первых производных	232
Разложение вблизи волнового фронта и поведение на больших расстояниях	233
Высокие частоты	233
Определение S и Φ_0	234
Каустики	239
7.8. Неоднородная среда	240
Слоистая среда	242
Волновод в океане	243
Зоны тени	244
Распространение энергии	245
7.9. Анизотропные волны	246
Плоские и осесимметричные задачи	249
Источник в движущейся среде	250
Магнитная газовая динамика	251
Глава 8. Динамика ударных волн	254
8.1. Распространение ударной волны по неоднородной трубе	256
Случай малых возмущений	258
Конечные изменения площади; правило характеристик	261
8.2. Распространение ударной волны в стратифицированном слое	265
8.3. «Геометрическая динамика» ударной волны	268
8.4. Двумерные задачи	272
8.5. Распространение волн по ударной волне	275
8.6. Вторичные ударные волны	279
8.7. Дифракция плоских ударных волн	282
Разрежение около угла	284
Дифракция на клине	288
Дифракция на круговом цилиндре	290
Дифракция на конусе или сфере	293
8.8. Устойчивость ударных волн	298
Устойчивость сходящихся цилиндрических ударных волн	299
8.9. Распространение ударной волны в движущейся среде	301
Глава 9. Распространение слабых ударных волн	302
9.1. Метод введения нелинейности	302
Построение разрывов	310
9.2. Обоснование метода	311
Разложения по малому параметру	313
Разложения на больших расстояниях	316
Разложение вблизи волнового фронта	316
Разложение N -волны	318
9.3. Звуковые удары	319
Ударные волны	322

<i>Обтекание тонкого конуса</i>	323
<i>Поведение ударной волны на больших расстояниях от тела конечных размеров</i>	324
<i>Обобщения теории</i>	325
Глава 10. Иерархия волн	327
10.1. Точные решения линеаризованной задачи	330
10.2. Упрощенный подход	338
10.3. Системы высокого порядка, нелинейные эффекты и ударные волны	340
10.4. Структура ударной волны	342
10.5. Примеры	343
<i>Паводковые волны</i>	343
<i>Магнитная газовая динамика</i>	344
<i>Эффекты релаксации в газах</i>	345
ЧАСТЬ II. ДИСПЕРГИРУЮЩИЕ ВОЛНЫ	
Глава 11. Линейные диспергирующие волны	348
11.1. Дисперсионные соотношения	349
<i>Примеры</i>	351
<i>Соответствие между уравнением и дисперсионным соотношением</i>	352
<i>Определение диспергирующих волн</i>	354
11.2. Общее решение в виде интеграла Фурье	354
11.3. Асимптотическое поведение решения	356
11.4. Групповая скорость; распространение возмущений волнового числа и амплитуды	360
11.5. Групповая скорость с точки зрения кинематической теории	365
<i>Обобщения</i>	367
11.6. Распространение энергии	369
11.7. Вариационный подход	375
<i>Неоднородная среда</i>	381
<i>Нелинейные волновые пакеты</i>	381
11.8. Непосредственное использование асимптотических разложений	382
<i>Неоднородная среда</i>	385
Глава 12. Картины волн	388
12.1. Дисперсионное соотношение для волн на воде	388
<i>Гравитационные волны</i>	388
<i>Капиллярные волны</i>	389
<i>Комбинированные эффекты гравитации и поверхностного натяжения</i>	390
<i>Теория мелкой воды с учетом дисперсии</i>	390
<i>Магнитная гидродинамика</i>	391
12.2. Дисперсия от мгновенного точечного источника	391
12.3. Волны на поверхности стационарного потока	392
12.4. Корабельные волны	393
<i>Дальнейшее исследование картины волн</i>	395
12.5. Капиллярные волны на тонком слое воды	398
12.6. Волны во вращающейся жидкости	402

12.7. Волны в стратифицированной жидкости	404
12.8. Кристаллооптика	408
<i>Одноосные кристаллы</i>	411
<i>Двухосные кристаллы</i>	414
Глава 13. Волны на воде	415
13.1. Уравнения для волн на воде	415
13.2. Вариационная формулировка	418
ЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ	420
13.3. Линеаризованная формулировка	420
13.4. Линейные волны на воде постоянной глубины	421
13.5. Задача Коши	421
13.6. Поведение решения вблизи фронта волнового пакета	424
13.7. Волны на поверхности раздела между двумя жидкостями	427
13.8. Поверхностное натяжение	429
13.9. Волны на поверхности стационарного потока	430
<i>Одномерные гравитационные волны</i>	432
<i>Одномерные волны с учетом поверхностного натяжения</i>	434
<i>Корабельные волны</i>	435
НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ	437
13.10. Теория мелкой воды; длинные волны	437
<i>Задача о разрушении плотины</i>	440
<i>Условия на боре</i>	441
<i>Дальнейшие законы сохранения</i>	442
13.11. Уравнения Кортевега — де Фриза и Буссинеска	443
13.12. Уединенные и кноидальные волны	449
13.13. Волны Стокса	453
<i>Случай произвольной глубины</i>	455
13.14. Опрокидывание и заострение волн	458
13.15. Модель структуры боры	463
Глава 14. Нелинейная дисперсия и вариационные методы	466
14.1. Нелинейное уравнение Клейна — Гордона	467
14.2. Начальные сведения о модуляции	470
14.3. Вариационный подход к теории модуляции	472
14.4. Обоснование вариационного подхода	473
14.5. Оптимальное использование вариационного принципа	478
<i>Преобразование Гамильтона</i>	479
14.6. Замечания о теории возмущений	481
14.7. Обобщения на большее число переменных	483
14.8. Адиабатические инварианты	486
14.9. Многофазовые волновые пакеты	489
14.10. Эффекты диссипации	490
Глава 15. Групповые скорости, неустойчивость и уточнение эффектов дисперсии	492
15.1. Почти линейный случай	493

15.2. Характеристическая форма уравнений	494
<i>Случай нескольких зависимых переменных</i>	497
15.3. Тип уравнений и устойчивость	497
15.4. Нелинейная групповая скорость, групповое расщепление, ударные волны	499
15.5. Дисперсионные эффекты в приближении более высокого порядка	503
15.6. Анализ Фурье и нелинейные взаимодействия	507
Глава 16. Приложения нелинейной теории	513
НЕЛИНЕЙНАЯ ОПТИКА	513
16.1. Основные идеи	513
<i>Однородные волновые пакеты</i>	514
<i>Усредненный лагранжиан</i>	515
16.2. Одномерные модуляции	518
16.3. Самофокусировка светового пучка	519
<i>Тип уравнений</i>	520
<i>Фокусировка</i>	521
<i>Узкие пучки</i>	522
16.4. Дисперсионные эффекты в приближении более высокого порядка	525
<i>Узкие пучки</i>	527
16.5. Генерация второй гармоники	528
ВОЛНЫ НА ВОДЕ	531
16.6. Усредненный вариационный принцип для волн Стокса	531
16.7. Уравнения модуляций	534
16.8. Уравнения сохранения	535
<i>Сохранение массы</i>	535
<i>Энергия и импульс</i>	535
16.9. Индуцированное среднее течение	537
16.10. Глубокая вода	538
16.11. Устойчивость волн Стокса	539
16.12. Волны Стокса на отмели	540
16.13. Волны Стокса на поверхности потока	541
УРАВНЕНИЕ КОРТЕВЕГА — ДЕ ФРИЗА	542
16.14. Вариационная формулировка	542
16.15. Характеристические уравнения	545
<i>Случай малой амплитуды</i>	547
16.16. Последовательность уединенных волн	548
Глава 17. Точные решения; взаимодействующие уединенные волны	552
17.1. Канонические уравнения	552
УРАВНЕНИЕ КОРТЕВЕГА — ДЕ ФРИЗА	555
17.2. Взаимодействующие уединенные волны	555
17.3. Обратная задача рассеяния	559
<i>Альтернативная версия</i>	564
17.4. Частный случай чисто дискретного спектра	567
17.5. Уединенные волны, образованные начальным распределением	568

17.6. Преобразование Миуры и уравнения сохранения	572
<i>КУБИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА</i>	574
17.7. Приложения кубического уравнения Шредингера	574
17.8. Однородные волновые пакеты и уединенные волны	575
17.9. Обратная задача рассеяния	576
<i>УРАВНЕНИЕ SIN-ГОРДОНА</i>	578
17.10. Периодические волновые пакеты и уединенные волны	579
17.11. Взаимодействие уединенных волн	580
17.12. Преобразования Беклунда	582
17.13. Обратная задача рассеяния для уравнения Sin-Гордона	584
<i>ЦЕПОЧКА ТОДЫ</i>	584
17.14. Решение Тоды для экспоненциальной цепочки	585
<i>УРАВНЕНИЕ БОРНА—ИНФЕЛЬДА</i>	588
17.15. Взаимодействующие волны	589
Список литературы	592
Именной указатель	603
Предметный указатель	606

Именной указатель

Аббот (Abbott M. R.) 68, 137, 138, 592	Буссинеск (Boussinesq J.) 20, 449, 593
Абловиц (Ablowitz M. J.) 489, 553, 584, 592	Бургерс (Burgers J. M.) 13, 593
Адамар (Hadamard J.) 214, 218	Ваймрайх (Weinreich G.) 528, 600
Ахманов С. А. 522, 523, 592	Вертман (Weertman J.) 94, 593
Баланис (Balanis G. N.) 563, 564, 592	Ву (Wu T. T.) 341, 593
Барбашов Б. М. 554, 589, 592	Гарднер (Gardner C. S.) 22, 453, 527, 553, 560, 593
Бароне (Barone A.) 467, 592	Гармайр (Garmire E.) 526, 527, 595
Барсилон (Barcilon V.) 403, 592	Гельфанд И. М. 563, 380, 593
Батлер (Butler D. S.) 196, 300, 592	Гильберт (Hilbert D.) 129, 143, 595
Бейтмен (Bateman H.) 13, 592	Гольдштейн (Goldstein S.) 98, 593
Бенджамен (Benjamin T. B.) 445, 464, 507, 509, 538, 540, 592, 593	Грин (Greene J. M.) 22, 453, 527, 553, 560, 593
Бенни (Benney D. J.) 489, 592	Гринберг (Greenberg H.) 74, 593
Бианки (Bianchi) 582	Гринспэн (Greenspan H.P.) 403, 593
Блекмэн (Blackman V.) 347, 594	Гриффите (Griffith W. C.) 347, 594
Блюм (Blum J. W.) 244, 595	Гросс (Gross R. W. F.) 277, 290—298, 593
Бона (Bona J. L.) 593	Гудерлей (Guderley G.) 195, 196, 594
Борн (Born M.) 554, 593	Гюгонио (Hugoniot H.) 31, 594
Брам (Bram L.) 6	Дарбу (Darboux) 582
Брикл (Brickl D.) 347, 594	Девис (Davies V.) 6
Брисон (Bryson A. E.) 277, 290—298, 593	Делани (Delaney M. E.) 489, 594
Бродерпк (Broderick J. B.) 221, 593	Джеффрис Б. (Jeffreys B. S.) 357, 430, 594
Бродски (Brodsky S.) 6	

- Джеффрис Г. (Jeffreys H.) 90, 357, 430, 594
- Джордмейн (Giordmaine J. A.) 530, 594
- Доннелли (Donnelly R. J.) 491, 594
- Дресслер (Dressier R. F.) 90, 94, 441, 594
- Захаров В. Е. 22, 527, 540, 553, 563, 566, 576—578, 584, 594
- Зельдович Я. Б. 197, 594
- Зоммерфельд (Sommerfeld A.) 414, 594
- Инфельд (Infeld L.) 554, 593
- Кантровиц (Kantrowitz A.) 299, 597
- Карман (von Karman T.) 222, 594
- Карпман В. И. 571, 594, 595
- Кауп (Kaup D. J.) 553, 584, 592
- Кейн (Kane E. J.) 326, 600
- Келлер (Keller J. B.) 240, 595
- Кельвин (Kelvin) 357, 393
- Кении (Кеппу А.) 347, 594
- Кинч (Kynch G. F.) 96, 595
- Клайц (Kleitz) 85
- Коментани (Komentani E.) 84, 595
- Корниш (Cornish V.) 89, 595
- Кортевег (Korteweg D. J.) 19, 20, 449, 452, 595
- Коул (Cole J. D.) 13, 100, 553, 595
- Коэн (Cohen D. S.) 244, 595
- Креннер (Crappier G. D.) 542, 595
- Крускал (Kruskal M. D.) 22, 453, 527, 553, 560, 593
- Курант (Courant R.) 125, 129, 143, 183, 288, 595
- Кьяо (Chiao R. Y.) 526, 527, 595
- Кэй (Kay I.) 240, 563, 595
- Лаврентьев М. А. 20, 357, 415
- Лайтхилл (Lighthill M. J.) 34, 72, 221, 286, 315, 323, 347, 393, 464, 593, 595, 596
- Лакс (Lax P. D.) 553, 576, 596
- Ламб см. Лэмб Г.
- Ландау Л. Д. 311, 414, 488, 569-571, 596
- Лапорт (Laporte O.) 281, 596
- Левитан Б. М. 563, 593
- Лифшиц Е. М. 414, 488, 569—571, 596
- Лонге-Хиггинс (Longuet-Higgins M. S.) 536, 537, 542, 596
- Лоуэлл (Lowell S. C.) 585, 596
- Льюк (Luke J. C.) 481, 596
- Лэмб Г. (Lamb H.) 162, 596
- Лэмб Дж. (Lamb G. L.) 22, 553, 581, 584, 596
- Маджи (Magee C. J.) 592
- Майлс (Miles J. W.) 301, 601
- Мак-Кауэн (McCowan J.) 461, 541, 597
- Маккол (Maccoll J. W.) 323, 599
- Манакон С. В. 566, 588
- Марченко В. А. 563, 597
- Маршалл (Marshall W.) 344, 597
- Мах (Mach E.) 205
- Махони (Mahony J. J.) 593
- Мейкер (Maker P. D.) 530, 597
- Меррей (Murray J. D.) 98, 593
- Месси (Massey D.) 6
- Мёкель (Moeckel W. E.) 262, 597
- Миура (Miura R. M.) 22, 453, 527, 553, 560, 593
- Мичелл (Michell A. G. M.) 452, 457, 541, 597
- Мозес (Moses H. E.) 563, 595
- Монтролл (Montroll E. W.) 84, 601
- Моубрей (Mowbray D. E.) 407, 597
- Мур (Moore N. B.) 222, 594
- Най (Nye J. F.) 33, 94, 95, 597
- Найфе (Nayfeh A.) 240
- Налимов В. И. 415
- фон Нейман (von Neumann J.) 190
- Нигам П. (Nigam P. D.) 403, 597
- Нигам С. (Nigam S. D.) 403, 597
- Нисенофф (Nisenoff M.) 597
- Ньюэлл А. (Newell A. C.) 553, 584, 592
- Ньюэлл Дж. (Newell G. F.) 82, 84, 597
- Островский Л. А. 506, 518, 519, 597

- Пенни (Penney W. G.) 457, 597
 Перри (Perry R. M.) 299, 597
 Перринг (Perring J. K.) 22, 468, 553, 580, 583, 597
 Петере (Peters C. W.) 528, 600
 Петровский И. Г. 143, 597
 Поттс (Potts R. B.) 84, 601
 Пригожий (Prigogine I.) 491, 594
 Прайс (Price A. T.) 457, 597
 Пуассон (Poisson S. D.) 31, 598
 Пухначев В. В. 415
 Райзер Ю. П. 197, 594
 Рерити (Rarity B. S. H.) 407, 597, 598
 Риман (Riemann B.) 7, 31, 126, 169, 181, 598
 Ричарде (Richards P. I.) 72, 598
 Рождественский Б. Л. 182
 Розери (Rothery R. W.) 84, 601
 Рэлей (Rayleigh) 20, 31, 441, 449, 598
 Рэнкин (Rankine W. J. M.) 31, 598
 Сакураи (Sakurai A.) 197, 267, 598
 Сасаки (Sasaki T.) 84, 595
 Свирлс см. Джеффрис Б.
 Сегюр (Segur H.) 553, 566, 584, 592, 598
 Седдон (Seddon J. A.) 85, 598
 Седов Л. И. 190, 193, 197, 598
 Селиджер (Seliger R. L.) 420, 462, 598
 Синьялла (Signalla A.) 326, 600
 Скирм (Skyrme T. H. R.) 22, 468, 553, 580, 583, 597
 Скотт (Scott A. C.) 467, 468, 580, 592, 598
 Скотт Рассел (Scott Russell J.) 20, 449, 598
 Скъюз (Skews B. W.) 287, 288, 598
 Смолл (Small R. D.) 519, 526, 598
 Снодграсс (Snodgrass F. E.) 391, 599
 Соболев С. Л. 403
 Соколов В. П. 571, 595
 Стоке (Stokes G. G.) 7, 19, 31, 449, 453, 454, 456, 457, 509, 599
 Стюарт (Stewart R. W.) 536, 537, 542, 596
 Судзуки (Suzuki K.) 585, 601
 Сухоруков А. П. 522, 523, 592
 Сэвидж (Savage C. M.) 597
 Таунс (Townes C. H.) 526, 527, 595
 Тахтаджан Л. А. 584
 Тейлор (Taylor G. I.) 31, 190—194, 197, 323, 398, 399, 402, 403, 457, 599
 Терхун (Terhune R. W.) 531, 597
 Тода (Toda M.) 554, 585, 586, 588, 599
 Томас (Thomas H. C.) 97, 100, 599
 Уизем (Whitham G. B.) 34, 72, 264, 265, 268, 293, 301, 303, 311, 316, 325, 344, 420, 441, 456, 486, 533, 596, 598, 599
 Урселл (Ursell F.) 402, 437, 600
 Фавр (Favre H.) 463, 465, 600
 Фадеев Л. Д. 563, 584, 600
 Федорюк М. В. 357
 Филлипс (Phillips O. M.) 512, 600
 Финстервальдер (Finsterwalder S.) 94, 600
 Флашка (Flashka H.) 588
 Фомин С. В. 380, 593
 Форсайт (Forsyth A. R.) 582, 600
 Франкен (Franken P. A.) 528, 600
 Франклин (Franklin J.) 403, 600
 Фридман (Friedman M. P.) 261, 326, 600
 Фридрихе (Friedrichs K. O.) 125, 183, 288, 595
 де Фриз (de Vries G.) 19, 20, 449, 452, 595
 Хаус (Haus H. A.) 526, 600
 Хейз (Hayes W. D.) 197, 267, 496, 600
 Херман (Herman R.) 84, 594, 601
 Хилл (Hill A. E.) 528, 600
 Хименес (Jimenez J.) 491, 601
 Хирота (Hirota R.) 557, 585, 601
 Холлидей (Holliday D.) 542, 601
 Хопф (Hopf E.) 13, 100, 553, 601
 Хоффман (Hoffman A. L.) 68, 69, 601
 Хохлов Р. В. 522, 523, 592
 Хуштерт (Huppert H. E.) 301, 601

Чендлер (Chandler R. E.) 84, 601
 Черников Н. А. 554, 589, 592
 Честер (Chester W.) 260, 601
 Чизнелл (Chisnell R. F.) 262, 267, 601
 Шабат А. Б. 22, 527, 553, 563, 566,
 576—578, 584, 594
 Шабат Б. В. 357, 415
 Шерклиф (Shercliff J. A.) 391, 601

Шифф (Schiff L. I.) 468, 601
 Эйри (Airy G. B.) 240
 Эмде (Emde F.) 546, 602
 Эрншоу (Earnshaw S.) 31, 169, 602
 Эспозито (Esposito F.) 592
 Янке (Jahnke E.) 546, 602
 Яненко Н. Н. 182
 Ярив (Yariv A.) 528, 531, 602

Предметный указатель

Там, где это целесообразно, в перечислении номеров страниц основная ссылка
 выделена жирным шрифтом

Авогадро число 155	— — —, взаимодействующие волны 589
Автомодельные решения уравнений газовой динамики 189—197	Буссинеска уравнение 16, 351, 443, 444
— — уравнения Бюргерса 106	Бюргерса уравнение 13, 20, 41, 99, 342, 553, 556, 582
Адиабатические инварианты 380, 486	Вариационный подход 375, 472
Адиабатическое течение 157	— принцип 376, 474, 485
Акустика 10, 11, 158, 162, 206—207	— — для волн на воде 418
— геометрическая 326	— — — Стокса 531
Амплитуда, распространение ее 364	Вариационный принцип в нелинейной оптике 515
Амплитудное уравнение 379	— — для уравнения Клейна — Гордона 472
Анизотропные волны 246—253, 409	— — — Кортвега — де Фриза 542
Асимптотическое поведение разрыва 51—57, 60, 65, 107, 108, 111, 112, 179	— — усредненный 378, 473, 477, 480, 487, 492
— — ударной волны 311, 324	Введения нелинейности метод 302
Атмосфера изотермическая 161	— — —, обоснование его 311—319
— экспоненциальная 161	«Вековые» условия 482
Аэродинамика 207, 219	Взаимодействующие уединенные волны 22, 552—591
Беклунда преобразование 553, 581, 582	Взрывная волна 190
Бельтрами течения 198	Внутренняя энергия 146, 150—152, 154, 156
Бернулли уравнение 198, 220	Волновая энергия 380, 536, 537
Боры, волны катящиеся 94	Волновод в океане 243—244
—, — паводковые 93	Волновое действие 238, 369, 381, 491, 535
— приливные 67, 68, 137	— —, уравнение для него 384, 386
— в реках 67, 68, 137	— —, — сохранения его 380, 488, 536, 537
— структура 463	
—, теория мелкой воды 439, 441, 442	
— турбулентные 439	
—, условия возникновения 93, 439, 441	
Борна — Инфельда уравнение 554, 588	

— уравнение 9, 12, 23, 119, 159, 206
— число 9, 16, 350, 360, 361
— — локальное 17, 360, 361
— —, распространение его 18, 362, 364—366, 368
Волновой вектор 349, 350
— импульс 381, 536
— фронт в задаче Коши 227
— —, нелинейное опрокидывание его 135
— —, распространение его 131, 227, 230
Волны на воде 415—465, 531—542
— — — глубокой 538, 539
— — —, поведение вблизи волнового фронта 424
— — —, решения в виде интегралов Фурье 422
— во вращающейся жидкости 402
— от движущегося источника 68
—, картины их 388—414
— на поверхности раздела между двумя жидкостями 427
— — — — —, устойчивость их 429
Волны в реках см. Паводковые волны
Вторичные ударные волны (shock-shocks) 279
Второго порядка уравнения 142—143
Вторых гармоник генерация 528
Высокочастотное приближение 233—234
Вязкости коэффициент 152
Газ двухатомный 156
— идеальный 153
— — с постоянными удельными теплоемкостями 154
— одноатомный 149, 156
— политропный 155, 158
Газовая динамика 144—205
— постоянная 153
Гамильтона преобразование в теории модуляции 479

Гельфанда — Левитана интегральное уравнение 563, 565
«Геометрическая динамика» ударных волн 268
Геометрическая оптика 14, 229—253, 332, 382, 475
— — и линейный предел динамики ударных волн 271—272
— —, нелинейные эффекты 307
Гидравлические прыжки 93, 439
Гиперболическая система уравнений 9, 10, 14, 115—143
— — —, граничные условия для нее 129
— — —, область зависимости решения от начальных условий 128
— — —, определение 118
— строго система уравнений 118
Гиперболические волны 9, 10, 19, 23
— —, определение 118
— — первого порядка 23—71
— — ударные 139
Годографа преобразование 181, 300, 523, 589
Гравитационные волны 388
— — на поверхности потока 392—393, 432
Групповая скорость 17, 34, 247, 351, 360, 362, 365, 366, 368
— — нелинейная 21, 492—508
Групповое расщепление 499
Движущаяся среда, волновое уравнение для нее 247
— —, источник в ней 250—251
— —, распространение в ней ударной волны 301
Движущийся разрыв 46, 47
«Двух времен» метод (two-timing method) 475
Двухатомный газ 156
Деформаций тензор 209

«Деформированных координат»
метод (strained coordinate
technique) 315

Динамика ударных волн 254—301

Диспергирующие волны 9, 348

— —, асимптотическое поведение
356

— —, вариационный подход 375_т
472

— —, взаимодействия нелинейные
507

— — линейные 16, 348

— — нелинейные 19, 466

— — в неоднородной среде 488—489

— —, определение 354

— — почти линейные 470, 493, 503

— —, усредненный вариационный
принцип 378, 473, 476, 480, 492

— —, устойчивость 471, 497—499

— —, эффекты диссипации 490

Дисперсионное соотношение 9, 15,
17, 349

— — для вариационного принципа
378

— — — волн на воде 388

— — — — — глубокой 539

— — — — — постоянной
глубины 421

— — — — — гравитационных 388

— — — — — в жидкости вращающейся
403

— — — — —

— — — — — стратифицированной 405

— — — — — капиллярных 389, 429

— — — — — в кристаллах 409

— — — — — на поверхности раздела
двух жидкостей 428

— — — — — стационарного
потока 431

— — — — — Стокса 456

— — — — — в оптике линейной 515

— — — — — нелинейной 514, 518

— — — — — почти линейной теории 470_т
479, 493

— —, связь его с основным
уравнением 352

— — для уравнения Буссинеска 444

— — — — —

— — — — — интегродифференциального 353

— — — — — Клейна — Гордона
нелинейного 469

— — — — — Кортвега — де Фриза
451

— — — — — Дисперсионное соотношение для
уравнения Шредингера 352

— — — — — кубического 574, 575

— — — — — цепочки Тоды 587

Дисперсионные эффекты высшего
порядка 503

— — — — — в нелинейной оптике 518,
525

Дифракция ударной волны 268, 282

— — — — — на клине 288

— — — — — конусе 293

— — — — — круговом цилиндре 290

— — — — — сфере 291, 293

— — — — — около угла 284

Диффузия 37, 39, 99, 100, 335

Задача о взрыве сильным 190—194

— — — — —, автомодельные
уравнения 193

— — — — — шара 212, 227

— — — — — движении поршня 164, 177

— Коши для волн на воде 421

— — — — — плоских 211

— — — — — сферических 212

— — — — — волнового уравнения 223

— — — — — в газовой динамике 177, 180

— — — — — для иерархии волн 329

— — — — — корректно поставленная 123

— — — — — для уравнения Кортвега — де
Фриза 568

— с начальными и краевыми
условиями для
гиперболических систем 127

— — — — — условиями для уравнения
первого порядка 24

— о разрушении плотины 440

— — распространении сигнала 62, 330
— — светофоре 75—77
— — сходящейся ударной волне 194—197, 263—265
— — ударной трубе 183
Закон сохранения, см. также Уравнение сохранения
Закон сохранения в форме дифференциальной 139
— — — — интегральной 139
— — массы 31
— — «усредненной энергии» 371
Законы сохранения 45, 486
— — в газовой динамике 145, 148
— — при переходе через бору 441
— — в теории мелкой воды 442
Заострение гребня волны 452, 458
Затухание разрыва 51, 52, 54, 56, 65, 107, 112, 179
Затухание ударной волны 311, 324
Затухающие волны 67, 332, 337
Звука скорость, волновое уравнение 159
— — «замороженная» 345
— —, определение 157
— — равновесная 346
Звуковые волны линейные 158
— — нелинейные 162, 168
— удары 7, 8, 11, 15, 302, 319—326
Идеальный газ см. Газ идеальный
Иерархия волн 327—347
Излучения условие 430
Изотермическая атмосфера 161
Изэнтропическое течение 158
Капиллярные волны 389, 429
— — на поверхности стационарного потока 392—393, 434
— — — тонком слое воды 398—402
Катящиеся волны 88—90, 94
Каустика 239—240, 298
—, нелинейный распад ее 299
Квазилинейные уравнения 13

— — см. независимыми переменными 140
— — первого порядка 66
— —, системы их 14, 115
Кинематические волны 31—34
— — в газовой динамике 168
Кинетическая теория 148, 155
Клайца — Седдона формула 85
Классификация волн 9
— систем уравнений 116
— — —, примеры 119
— уравнений второго порядка 142, 143
Клейна — Гордона уравнение 10, 351, 369, 385
— — —, вариационный принцип 472
— — — нелинейное 21, 467
— — —, теория модуляции 496
— — —, устойчивость решений 471, 498
Кноидальные волны 20, 449, 452
— —, аналог в оптике 526
Колбаний балки уравнение 16, 349, 351, 362, 363
Конус Маха 222
— преломленных лучей 414
Корабельные волны 393—398, 435
Кортевега — де Фриза уравнение 19—21, 445, 448, 449, 552
Кортевега — де Фриза уравнение, вариационная формулировка 542
— — —, взаимодействующие уединенные волны 555—559
— — —, дисперсионное соотношение 451
— — — с диссипацией 464
— — —, задача
Коши 568—572
— — — линеаризованное 16, 351, 443
— — —, обобщенная дисперсия 459, 460

— — —, обратная задача рассеяния 559—567
 — — —, разложение Стокса 453
 — — —, теория модуляции 542—551
 — — —, уравнения сохранения 550, 572—573
 Косая ударная волна 203
 Коула — Хопфа решение уравнения Буссинеска 100, 553
 Кристаллооптика 408—414
 Кристаллы двухосные 414
 — одноосные 411
 Кубическое уравнение Шредингера 21, 527, 552, 574
 — — —, дисперсионное соотношение 574, 575
 — — —, обратная задача рассеяния 576
 — — —, приложения 574
 — — —, уединенная волна 575
 — — —, устойчивость 575
 Лагранжиан 377, 473
 — для волн на воде 418, 532
 — в нелинейной оптике 515, 525
 — для уравнения Клейна — Гордона 472, 479, 481
 — — — Кортвега — де Фриза 542, 551
 — усредненный 377, 472, 477, 478, 480, 483, 487, 490, 516, 538, 543
 Ледника движение 33, 94
 Линеаризованная теория, неравномерность аппроксимации 60, 304, 306
 Линейные диспергирующие волны, решение в виде интегралов Фурье 354
 Линии групповые 363
 — фазовые 363
 Лучевой вектор 410
 Лучей трубки см. Трубки лучей
 Лучи 236, 268, 272
 — необыкновенные 530—531
 — обыкновенные 530—531

Магнитная газовая динамика 124, 251, 344
 — гидродинамика 391
 Максвелла уравнения 124, 210, 408
 — — в нелинейной оптике 513
 Маннинга закон 86
 Маха конус 222
 — отражение 205, 282, 289, 290
 — стебель 289, 290, 292, 293
 — угол 200, 321
 Мелкой воды теория 123, 136, 390, 437
 Миуры преобразование 572
 Многофазовые волновые пакеты 489, 512
 Модуляции, расщепление их 471
 — теория 470, 472, 494—506
 — —, волны на воде 534—542
 — —, нелинейная оптика 518—528
 — —, уравнение Клейна — Гордона 496
 — —, — Кортвега — де Фриза 542-551
 Моноклиальная паводковая волна 90—94
 Навье — Стокса уравнения 151
 — — —, описание структуры ударной волны 187
 Напряжение излучения 536
 Напряжений тензор для жидкости 145, 151
 — — — —, симметричность его 148
 — — — упругой среды 208
N-волна 53—55
 — в газовой динамике 180
 — двух- и трехмерная 310
 — в задаче о взрыве шара 213
 — при звуковом ударе 325
 —, разложение 318
 — для уравнения Бюргерса 109
 Нелинейная дисперсия 19, 466—491
 — оптика 12, 513—531
 Нелинейные взаимодействия 507
 — — в оптике 529

Необыкновенные волны в оптике 412
— лучи 530—531
Неоднородная среда 161, 162, 197,
240, 367, 368, 381, 385, 488, 489
Нётер теорема 379—380, 486
Обратная задача рассеяния,
уравнение Кортевега — де
Фриза 559
— — —, — Sin-Гордона 584
— — —, — Шредингера кубическое
576
Обыкновенные волны в оптике 411—
412
— лучи 530—531
Одинокый горб 51, 105
Одноатомный газ 149, 156
Определение положения разрыва для
волны первого порядка 47—48
Опрокидывание волн 27—31
— — на воде 458
— — — —, волновой фронт 134
— — — — мелкой 136, 439
— — в газовой динамике 166, 174,
177
— — паводковых 137
— — первого порядка 27—31, 67, 68
— — в потоке транспорта 74
— —, приливная бора 137
— — сферических 305
— —, условие возникновения
разрыва 42—43
— модуляций 471, 500
Отложение осадков в реках 96
Отражение ударной волны косою
204—205
— — — по нормали 185
Паводковые волны 33, 84—94, 136,
343
Параболическое уравнение 143
Перевала метод 102, 333, 336, 357
Периодическая волна с разрывами 55
— — — —, описываемая уравнением
Бюргерса 112

Периодические волновые пакеты,
волны на воде 421, 449, 531
— — —, — диспергирующие
линейные 9, 15, 349
— — —, — нелинейные 466, 468
— — —, — кноидальные 449
— — —, — Стокса 453
— — —, модуляции 505
— — —, описываемые уравнением
Клейна — Гордона 468
— — —, — — Кортевега — де Фриза
449, 543
— — —, — — Sin-Гордона 579
— — —, — — Шредингера
кубическим 575
— — — для цепочки Тоды 586
Поверхностное натяжение 388, 429
Пограничные слои в задачах о
распространении волн 329—
330, 336, 338
Политропный газ 155, 158
Построение равных площадей 47—48
Потенциальные переменные 484
Почти линейная оптика 514, 525
— линейные диспергирующие волны
470, 479, 493, 503, 507
Правило характеристик 261—265
Прандтля — Мейера веер 201
— число 188
Приливные боры 67, 68, 137
Простые волны в газовой динамике
164
— — — сверхзвуковом течении 201
Псевдоволновое число 516
Псевдоволновой вектор 484
Псевдочастота 484, 516
Пуассона решение волнового
уравнения 224, 225, 229
Пфаффа задача об интегрируемости
дифференциальных форм 126
— теорема 153
Равновесное состояние атмосферы
изотермическое 161
— — — конвективное 161—162

- Разрежения волна в газовой динамике 164
- — центрированная 167, 184, 201
- Разрыва введение 30, 47, 58, 59
- — в газовой динамике 177
- — двух- и трехмерного 310
- — для звукового удара 322—323
- — — N -волны 53—54
- — — одиночного горба 51—53
- — — периодической волны 55
- Разрывы производных 129—135, 141—143, 232
- , слияние их 57—58
- Распад волнового пакета 471, 499
- Распределение давления при звуковом ударе 325, 326
- Распространение амплитуды 364
- волн по ударной волне 275
- волнового числа 18, 362, 364—366, 368
- ударной волны 254
- — — в неоднородной трубе 256
- — — слабой 302—326
- — — в стратифицированном слое 265
- фазы 362
- Расширения волна 29
- Резонанс при нелинейных взаимодействиях 509
- Рейнольдса число 104, 111
- — «эффективное» 109, 111
- Релаксации время 152, 345
- эффекты 152, 345
- Речные волны 122—123, 135, см. также Паводковые волны
- Риккати уравнение 133—134, 583
- Римана инварианты 126
- — в газовой динамике 163, 168, 175
- — — динамике ударных волн 276
- — для сверхзвуковых течений 202
- — в теории мелкой воды 439, 440
- — — модуляции 500
- — для уравнения Кортевега — де Фриза 445, 546
- Римановы переменные 126, 200, 201, 316
- Рэлея волны 11
- Самодействие 509
- Самофокусировка светового пучка 519
- — — узкого 522
- Сверхзвуковое обтекание тела вращения 219, 319
- — тонкого конуса 322
- течение 197
- — линеаризованное 207
- —, характеристики 199—200, 320, 321
- Сдвига волны 210
- Сжатия волны 27—29, 167, 209—210
- Sin-Гордона уравнение 21, 29, 467, 552, 578
- —, маятниковая модель
- Скотта 468, 580
- —, обратная задача рассеяния 584
- —, устойчивость 471, 579
- Слабые решения 30, 44, 140
- ударные волны 41—42, 176, 302
- — — в простых волнах 177
- Слияние разрывов 57, 58
- ударных волн 113
- Слоистая среда 242, см. также
- Стратифицированная среда
- Снеллиуса закон 242
- Солитоны 348, см. также
- Уединенные волны
- Соотношение между напряжениями и деформациями 209
- Сопротивление при сверхзвуковом обтекании тела вращения 221
- Сохранения закон см. Закон сохранения
- Спиральные волны 498, 578—580
- Стационарной фазы метод 357, 365
- Стокса волны 19, 453
- —, вариационный подход 531
- —, наибольшая высота 457

— —, нелинейные взаимодействия 507
Стокса волны на отмели 540
— — — поверхности потока 541
— — с углом 120° 456, 457
— —, усредненный лагранжиан 533
— —, устойчивость 471, 507. 539
— разложение 19, 453, 470, 479, 508, 585
Стратифицированная среда 161, 162, 197, 404
Строго гиперболическая система 118
Структура ударной волны с внутренним разрывом 81, 92, 343
— — — в газовой динамике 186
— — —, иерархия волн 342
— — —, паводковые волны 90
— — — в потоке транспорта 80, 81
— — — для уравнения Бюргерса 104
— — — — первого порядка 37—41
Сферические волны в газовой динамике 302, 308, 312
— —, затухание разрывов 311
— — линейные 211
— — нелинейные 189, 303
— —, опрокидывание 305
— — сходящиеся 263—265
— —, характеристики 304
Схлопывающиеся ударные волны 194
Сходящиеся ударные волны 194—197, 263—265
— — —, устойчивость 299—301
Тейлора столб 403
Тени зоны 244
Теория упругости 208
Тепловой поток 146, 150, 151
Теплопроводности коэффициент 152
—уравнение 37, 101, 120
Термодинамические соотношения 152
Течения адиабатические 157
— Бельтрами 198

— сверхзвуковые 197
Тоды цепочка 554, 584
Толщина ударной волны 40, 189
Томаса преобразование 97
Транспорта потоки 32, 72—84
— —, дискретные модели 82
Трубки лучей 237, 238, 268
— —, геометрия их 269—271
Удельные теплоемкости 154, 156,
Уединенная волна, аналог ее в нелинейной оптике 526
Уединенные волны 20, 21, 348, 449, 466
Уединенные волны, взаимодействие их 22, 552
— —, наибольшая высота 450, 460
— —, непрерывное распределение 548, 571
— —, образованные начальным возмущением 568
— —, описываемые уравнением Кортевега — де Фриза 20, 449
— —, — — Sin-Гордона 579
— —, — — Шредингера кубическим 575
— —, последовательность их 548, 569—570
— —, теория модуляции 505—506
Ультрагиперболическое уравнение 143
Упругие волны 125, 208—210
— — сдвига 210
— — сжатия 209—210
Уравнение амплитудное 379
— — для волнового действия 384, 386
— колебаний балки 16, 349, 351, 362, 363
— сохранения для волнового действия 380, 488, 536, 537
— — — импульса 381
Уравнения сохранения для волн на воде 535, 536

- — — уравнения Кортевега — де Фриза 573
- Условие излучения 430
- на разрыве, необратимость ударной волны 43
- — — для слабого решения 45
- — — — уравнения первого порядка 35, 36
- Условия на разрыве в газовой динамике 171—176
- — — для сверхзвукового течения 203
- — — — систем уравнений 138
- — — в теории мелкой воды 439
- — — — модуляции 502
- Усредненный вариационный принцип 378, 473, 477, 480, 487, 492
- лагранжиан 377, 472, 477, 480, 483, 487, 490, 538, 543
- Устойчивость волн в нелинейной оптике 518
- — паводковых 89, 136
- — на поверхности раздела между двумя жидкостями 428
- — Стокса 471, 507, 539
- — ударных 298—301
- , дисперсионные эффекты высшего порядка 505
- Устойчивость иерархий волн 329, 330, 341
- модуляций 471, 497
- потока транспорта 78, 79, 84
- решения уравнения Клейна — Гордона 471
- — — Sin-Гордона 471, 580
- — — Шредингера кубического 575
- химических процессов обмена 98
- Фаза 349
- , распространение ее 362
- Фазовая скорость 9, 16, 350
- — локальная 362
- Ферма принцип 241

- Фруда число 464
- Характеристик правило 261—265
- Характеристики 25, 26, 116
- , веер их 29, 167, 184
- для волн, распространяющихся по ударной волне 277
- — — речных 123—124
- — — сферических 190, 304
- — — ударных в неоднородной трубе 257, 259
- — — упругих 125
- — — цилиндрических 190, 306
- — — электромагнитных 124—125
- в газовой динамике 123, 162, 163
- — — — магнитной 124
- для гиперболических систем 117
- — дифракции плоской ударной волны 283
- — конечноразностных схем 126—129
- в нелинейной оптике 518
- , огибающая их 27
- , распространение разрывов вдоль них 129
- в теории мелкой воды 123—124
- — — модуляции 494
- для течения осесимметричного 321
- — — сверхзвукового 199—200
- — уравнений первого порядка 66, 69
- — уравнения волнового 120
- — — Кортевега — де Фриза 546
- — — эйконала 235, 241, 246
- Характеристическая скорость 119
- форма уравнения 117
- Характеристические кривые 26, 67, 116
- поверхности 141
- Химические процессы обмена 33, 96
- Хроматография 33, 96
- Центрированная волна расширения 29
- — сжатия 28, 166

- Центрированные волны при
 - дифракции ударной волны 284
- Цилиндрическая волна, затухание ее
 - 311, 312
- — линейная 214
- — нелинейная 189, 306
- — ударная сходящаяся 263—265
- —, хвост ее 218
- Частота 9, 349
 - Вейсала — Бранта 405
 - локальная 17, 361
 - плазменная 16, 514
 - , распространение ее 361, 365
- Число волновое 9, 16, 350, 360, 361
 - — локальное 17, 360, 361
 - —, распространение его 18, 362, 364—366, 368
- Шези закон 82
- Шредингера уравнение 352, 560
 - — нелинейное см. Кубическое уравнение
- Шредингера
- Эйконала уравнение 235
- Эйри интеграл 425
 - уравнение 427
 - функция 426, 430
- Экспоненциальная атмосфера 161
- Электромагнитные волны 124—125, 210
- Эллиптическое уравнение 120, 143
- Энергия внутренняя 146, 150—152, 154, 156
 - волновая 380, 536, 537
 - движения молекул вращательного 149, 150, 152, 156
 - — — колебательного 149, 150, 152, 156
 - — — поступательного 149, 156
 - , распространение ее 369
 - — — в геометрической оптике 238, 245—246
- Энтальпия 154
- Энтропия 153, 155
 - , изменение при переходе через ударную волну 174—175, 187—188
- Эффект близких «боковых частот» (side bands) 509

Предисловие редактора перевода

Предлагаемая вниманию читателей книга известного американского ученого Дж. Б. Уизема посвящена важному и быстро развивающемуся разделу математической физики — аналитической теории нелинейных волн. Автор ставит своей целью описание основных математических моделей, иллюстрирующих поведение волн, и сопоставление этих моделей с реальными физическими явлениями. Кроме того (в первую очередь это относится к главам 14—16), излагаются и сопоставляются друг с другом основные приемы построения приближенных математических моделей нелинейных уравнений: ряды теории возмущений, метод деформированных координат, осреднение и т. п. Существенную роль здесь играют оригинальные работы автора и метод, известный в литературе как метод Уизема.

Выбор тем и их изложение делают книгу полезной для широкого круга читателей, интересующихся математической физикой. Математикам следует иметь в виду, что автор избегает формальных доказательств и строит изложение на основе тщательного анализа характерных частных решений рассматриваемых задач.

Книга написана просто и увлекательно. В процессе построения общей яркой картины волновых процессов различные идеи и методы взаимно дополняют друг друга. Эта цельность является существенным достоинством книги, и хочется предостеречь от попыток чтения ее с конца или выборочного чтения.

В конце книги приведен довольно обширный список оригинальных работ. Однако на принятом уровне строгости изложение представляется замкнутым (за немногими несущественными исключениями), и автор, по-видимому, не ставил своей задачей составление сколько-нибудь полной библиографии. Во всяком случае, работы математического характера практически не цитируются.

А. Б. Шабат

Предисловие

Эта книга является расширенным вариантом курса, который автор на протяжении нескольких лет читал в Калифорнийском технологическом институте студентам старших курсов и аспирантам, специализирующимся в области прикладной математики. По-видимому, этот курс в равной степени оказался полезным студентам инженерных и физических специальностей.

Изложение представляется замкнутым, однако и его последовательность, и его уровень рассчитаны на читателя, который уже знаком с элементарными вопросами теории распространения линейных волн. Цель книги — охватить все главные идеи, но в то же время с самого начала выделить нелинейную теорию и в первую очередь те ее разделы, в которых сейчас ведутся необычайно активные исследования. Подробный обзор содержания приводится в главе 1.

Математическое изучение предмета сопровождается обсуждением многочисленных приложений. Как правило, не предполагается, что читатель глубоко знаком с областями этих приложений; все необходимые физические идеи и вывод основных уравнений даются в тексте. Необходимая специальная математическая подготовка включает знакомство с техникой преобразований, с методами асимптотических разложений интегралов и решениями классических краевых задач, а также смежными вопросами — одним словом, со всем тем, что обычно называется «математическим аппаратом».

Часть излагаемых здесь сведений получена в результате исследований последних лет, проводившихся при поддержке Научно-исследовательского управления военно-морских сил. Я считаю своим приятным долгом выразить признательность сотрудникам этого управления и в первую очередь Лейле Брам и Стюарту Бродски.

Приношу особую благодарность Вивиан Девис и Деборе Месси, которые перепечатывали рукопись и безропотно вносили в нее бесконечные исправления и изменения.

Дж. Б. Уизем

Пасадена, Калифорния
декабрь, 1973

Глава 1

ВВЕДЕНИЕ И ОБЩИЙ ОБЗОР

Концепция волнового движения является одним из широчайших научных понятий, и несколько необычно, что волны можно изучать на любом техническом уровне. Поведение волн на воде, распространение света и звука известны каждому из повседневного опыта. Всеобщий интерес вызывают такие современные задачи, как возникновение звукового удара или пробки в потоке транспорта. С одной стороны, эти явления можно рассматривать в описательном плане без каких-либо технических сведений. С другой стороны, их интенсивно изучают и специалисты, поскольку почти любая область науки или техники связана с волновым движением.

Это привело к сравнительно широкому развитию математических понятий и методов для объяснения данного явления с теоретической точки зрения и решения возникающих задач. Хотя детали в каждом конкретном приложении могут быть различными и некоторые проблемы могут обладать своими уникальными особенностями, удалось выработать общий единый подход к исследованию любых волновых процессов.

Настоящая книга содержит изложение математической теории, образующей основу такого исследования, причем особое внимание обращается на общие идеи и основные моменты поведения волн. Приводится большая часть характерных методов решения задач, однако лишь постольку, поскольку они позволяют получить информацию о природе волн, не превращаясь в чисто математические упражнения, хотя бы, возможно, трудные и интересные. Это, в частности, относится к задачам о линейных волнах.

После изложения важных основных результатов линейной теории, необходимых для понимания волновых процессов вообще, можно было бы заполнить целые тома описанием решений методов и исследования частных задач. Такая цель в этой книге не ставится. В нее включен основной материал по линейным волнам, но все же предполагается, что читатель в известной мере знаком с линейной теорией, и главное внимание уделяется более сложной нелинейной теории. В изучении нелинейных волн, начавшемся сто с лишним лет тому назад с основополагающих работ Стокса [2] и Римана [1] и развивавшемся с нарастающей скоростью, в последние годы были достигнуты значительные результаты. Наша цель — дать единый подход ко всему накопившемуся материалу.

Изложение общих математических идей свободно перемежается с обсуждением частных случаев и конкретных физических прило-

жений. Это — особенно в нелинейных задачах — существенно и как стимул для строгих математических выводов, и как иллюстрация к таким выводам; кроме того, изложение, во всяком случае, становится интереснее. Многие проблемы связаны с некоторыми разделами механики жидкости или с примерами, подобными потоку транспорта, рассматриваемыми аналогичным образом. Это неизбежно, ибо основные идеи теории нелинейных волн возникли при изучении соответствующих задач, хотя выбор примеров, несомненно, отражает также личные интересы и опыт автора.

В то же время книга не ориентирована специально на гидро- и аэродинамиков. Идеи излагаются в общем виде, а приложения и обоснования приводятся с расчетом на широкий круг читателей различных специальностей. Предполагается, что паводковые волны в реках, волны в ледниках, волны в потоке транспорта, звуковые удары, взрывные волны, океанские штормовые волны и т. п. интересны всем. Не исключаются из рассмотрения и прочие области; подробно обсуждаются, например, нелинейная оптика и волны в различных механических системах. В целом, однако, представляется, что лучше сконцентрировать внимание на нетривиальных вопросах, относящихся к избранным областям, чем провести поверхностный обзор приложений к системам уравнений, выбранных из всевозможных разделов физики.

Книга делится на две части; первая из них посвящена гиперболическим волнам, вторая — диспергирующим волнам. Различие между этими двумя понятиями будет пояснено в следующем параграфе. В части I основные идеи содержатся в главах 2, 5 и 7, а в части II — в главах 11, 14, 15 и 17. В промежуточных главах общие идеи излагаются в частных контекстах; эти главы можно читать полностью или выборочно в зависимости от интересов читателя. Можно также сразу после главы 2 перейти к чтению части II.

1.1. Два основных класса волновых движений

По-видимому, не существует единого строгого определения волн. Можно дать различные частные определения, но чтобы охватить весь диапазон волновых процессов, предпочтительнее руководствоваться интуитивным представлением о волне как о любом различимом сигнале, передающемся от одной части среды к другой с некоторой определенной скоростью. Такой сигнал может быть возмущением любого вида, например максимумом какой-либо величины или резким ее изменением при условии, что это возмущение четко выделено и что в любой заданный момент времени можно определить его местонахождение. Этот сигнал может искажаться, изменять свою величину и скорость, но при этом должен оставаться различимым. Такое определение может показаться несколь-

ко расплывчатым, но оно оказывается вполне приемлемым, а любая попытка дать более строгое представляется слишком ограничительной, поскольку различным типам волн присущи различные характерные черты.

Тем не менее можно выделить два основных класса волн. Первый класс описывается математически (гиперболическими уравнениями в частных производных); волны этого класса будут называться *гиперболическими*. Второй класс столь просто характеризовать нельзя, но, поскольку простейшими его представителями являются диспергирующие волны в линейных задачах, мы будем называть все волны этого класса *диспергирующими* и лишь постепенно разовьем более полное его описание. Наше деление на классы не является исчерпывающим. С одной стороны, эти классы пересекаются, так как в некоторых волновых движениях проявляются оба типа поведения, а с другой существуют исключения, не соответствующие ни одному из них.

При описании гиперболических волн за основу часто берут волновое уравнение

$$\varphi_{tt} = c_0^2 \nabla^2 \varphi, \quad (1.1)$$

хотя более простым является уравнение

$$\varphi_t + c_0 \varphi_x = 0. \quad (1.2)$$

Как мы увидим, существует четкое определение гиперболических уравнений, зависящее только от вида уравнений и не зависящее от возможности получения решений в явном виде. С другой стороны, понятие диспергирующих волн связано скорее с характерным видом решений, чем с типом уравнения. Линейная диспергирующая система — это любая система, имеющая решения вида

$$\varphi = a \cos(kx - \omega t), \quad (1.3)$$

где частота ω представляет собой известную вещественную функцию волнового числа k , причем функция $\omega(k)$ определяется выбором системы. Фазовая скорость в данном случае равна $\omega(k)/k$, и волны обычно называют диспергирующими, если эта фазовая скорость не постоянна, а зависит от k . Такой термин указывает на то, что более общее решение является суммой мод вида (1.3) с различными значениями k . (В самом общем случае эта сумма переходит в интеграл Фурье.) Если фазовая скорость ω/k зависит от k , т. е. если $\omega \neq c_0 k$, где c_0 — некоторая постоянная, то моды с различными k будут распространяться с различными скоростями и волна будет диспергировать (расползаться). Удобно несколько изменить это определение и говорить, что волна вида (1.3) является диспергирующей, если $\omega'(k)$ не постоянна, т. е. если $\omega''(k) \neq 0$.

Следует отметить, что функция (1.3) является также решением гиперболического уравнения (1.2) с $\omega = c_0 k$ или уравнения (1.1) с $\omega = \pm c_0 k$, но эти случаи исключаются из диспергирующего класса условием $\omega'' \neq 0$. Однако нетрудно привести примеры действительного пересечения классов, когда уравнения оказываются гиперболическими, и в то же время имеют решения вида (1.3) с нетривиальными дисперсионными соотношениями $\omega = \omega(k)$. Один из таких примеров — уравнение Клейна — Гордона

$$\varphi_{tt} - \varphi_{xx} + \varphi = 0, \quad (1.4)$$

которое является гиперболическим и имеет решение (1.3) с $\omega^2 = k^2 + 1$. Такое двойственное поведение встречается сравнительно редко и не должно затмевать общее глубокое различие двух основных классов. Возможно, оно является причиной довольно распространенного недоразумения (поддерживаемого, в частности, в математической литературе), согласно которому волновое движение полностью описывается гиперболическими уравнениями, а подход с помощью функций (1.3) считается менее научным. На самом деле скорее верно обратное. Несмотря на обширность и разнообразие класса гиперболических волн, большая часть волновых процессов, по-видимому, все же относится к классу диспергирующих волн. Океанские волны, наиболее известные из всех волн, являются диспергирующими и описываются уравнением Лапласа с необычными граничными условиями на свободной поверхности.

Первая часть этой книги посвящена гиперболическим, а вторая — диспергирующим волнам. Теория гиперболических волн снова встречается при изучении диспергирующих волн в различных любопытных ситуациях, так что вторая часть не является полностью независимой от первой. Оставшаяся часть настоящей главы посвящена обзору ряда вопросов, большая часть которых затем подробно разбирается в книге. Цель этого обзора — дать представление о материале в целом и в то же время привести к общему взгляду на теорию, что трудно сделать при подробном изложении.

1.2. Гиперболические волны

Волновое уравнение (1.4) встречается в акустике, теории упругости и электромагнетизме, и его основные свойства и решения впервые были изучены в этих областях классической физики. Во всех перечисленных случаях оно, однако, не дает полного описания процесса.

В акустике исходят из уравнений для сжимаемой жидкости. Даже без учета вязкости и теплопроводности это система нелинейных уравнений относительно вектора скорости $\mathbf{u}$, плотности ρ и давления p . Акустика описывается приближенной линейной

теорией с малыми возмущениями равновесного состояния, в котором $u = 0$, $\rho = \rho_0$, $p = p_0$. Уравнения линеаризуются за счет сохранения только членов первого порядка по малым величинам u , $\rho - \rho_0$, $p - p_0$, т. е. за счет отбрасывания всех членов со степенями малых величин выше первой и с их произведениями. Можно показать, что в этом случае и каждая компонента вектора u , и возмущения $\rho - \rho_0$, $p - p_0$ удовлетворяют волновому уравнению (1.1).

Найдя решение этого уравнения при надлежащих граничных или начальных условиях, определяемых источником звука, естественно задаться рядом вопросов о связи полученного решения с исходными нелинейными уравнениями. Являются ли линейные результаты адекватными, хотя бы для малых возмущений, и не теряются ли при таком приближении какие-либо существенные качественные черты? Если возмущения не являются малыми (как при взрыве или при движении сверхзвукового самолета и ракеты), то какие результаты можно получить непосредственно из исходных нелинейных уравнений? Какие изменения происходят при учете вязкости и теплопроводности? Ответы на эти вопросы в газовой динамике приводят к основным идеям нелинейных гиперболических волн. Наиболее интересным явлением, которое описывается лишь нелинейной теорией, оказываются ударные волны, представляющие собой резкие скачки давления, плотности и скорости, например ударные волны при сильном взрыве и звуковые удары при движении высокоскоростных самолетов. Для их предсказания потребовалось развить весь сложный аппарат теории нелинейных гиперболических уравнений, а для полного понимания понадобились анализ эффектов вязкости и некоторые аспекты кинетической теории газов.

Таким образом, круг основных идей становится ясным уже в газовой динамике, однако изучение более сложных случаев требует развития кинетической теории. Основная математическая теория, развитая в газовой динамике, подходит для любых систем, описываемых нелинейными гиперболическими уравнениями; она использовалась и уточнялась во многих других областях.

В теории упругости классическая волновая теория также получается после линеаризации. Однако даже в линейном случае ситуация оказывается более сложной, поскольку исходная система уравнений приводит по существу к двум волновым уравнениям вида (1.1) для двух функций φ_1 , φ_2 и двух скоростей c_1 , c_2 , отвечающим движению продольной и поперечной волн (волны сжатия и волны сдвига). Функции φ_1 и φ_2 связаны надлежащими граничными условиями, так что в общем случае задача гораздо сложнее, чем просто решение уравнения (1.1). На свободной поверхности упругого тела возникает новое усложнение, поскольку возможно появление поверхностных волн, так называемых волн Рэлея,

которые приближаются к диспергирующим волнам и распространяются со скоростью, промежуточной между c_1 и c_2 . В силу этих дополнительных усложнений, нелинейная теория не была развита здесь в такой степени, как в газовой динамике.

В электромагнетизме также имеется усложнение, связанное с тем, что различные компоненты электрического и магнитного полей, удовлетворяя уравнениям (1.1), связаны, кроме того, дополнительными уравнениями и граничными условиями. Хотя классические уравнения Максвелла с самого начала записываются в линейной форме, в настоящее время значительный интерес представляет «нелинейная оптика», поскольку, например, лазеры создают волны высокой интенсивности, на которые ряд сред реагирует нелинейным образом.

Соответствующая математическая теория начинается с изучения решений уравнения (1.4). Самым простым является одномерное уравнение для плоских волн

$$\varphi_{tt} - c_0^2 \varphi_{xx} = 0. \quad (1.5)$$

Введя новые переменные

$$\alpha = x - c_0 t, \quad \beta = x + c_0 t, \quad (1.6)$$

его можно переписать так:

$$\varphi_{\alpha\beta} = 0. \quad (1.7)$$

Последнее уравнение элементарно интегрируется и имеет общее решение

$$\varphi = f(\alpha) + g(\beta) = f(x - c_0 t) + g(x + c_0 t), \quad (1.8)$$

где f и g — произвольные функции.

Это решение является комбинацией двух волн: одна с формой, описываемой функцией f , движется вправо со скоростью c_0 , а другая с формой, описываемой функцией g , движется влево с такой же скоростью c_0 . Еще проще было бы в случае только одной волны. Нужно для этого уравнение получается факторизацией уравнения (1.5)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - c_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + c_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) \varphi = 0 \quad (1.9)$$

и оставлением только одного из сомножителей. Оставив

$$\varphi_t + c_0 \varphi_x = 0, \quad (1.10)$$

получим общее решение

$$\varphi = f(x - c_0 t). \quad (1.11)$$

Это простейшая задача гиперболических волн. Хотя классические задачи приводят к уравнению (1.5), для многих волновых

движений, изученных к настоящему времени, в действительности получается уравнение (1.10). В качестве примеров можно указать паводковые волны, волны в ледниках и волны в потоках транспорта, а также некоторые волновые явления в химических реакциях. Изложение теории этих процессов начинается в главах 2 и 3. Точно так же как в классических задачах, исходные формулировки приводят к нелинейным уравнениям, простейшее из которых имеет вид

$$\varphi_t + c(\varphi) \varphi_x = 0, \quad (1.12)$$

где скорость распространения $c(\varphi)$ является функцией локального возмущения φ . Исследование этого обманчиво простого на вид уравнения дает все основные понятия нелинейных гиперболических волн. Мы будем следовать идеям, впервые развитым в газовой динамике, но придем к ним в более простой математической форме. Основное следствие нелинейности заключается в опрокидывании волн и возникновении ударных волн. Математическим отражением этого явления служат теория характеристик и выделение разрывов. Все это подробно описано в гл. 2. Затем теория применяется и дополняется в гл. 3, где подробно обсуждаются вопросы паводковых и прочих волн, о которых говорилось выше.

Уравнение первого порядка (1.12) называется *квазилинейным*, так как оно нелинейно по φ , но линейно по производным φ_t и φ_x . В общем нелинейном уравнении первого порядка для функции $\varphi(x, t)$ допускается произвольная функциональная связь между φ , φ_t и φ_x . Об этом более общем случае, а также о его распространении на уравнения первого порядка с n независимыми переменными речь пойдет в гл. 2.

В рамках уравнения (1.12) ударные волны появляются как разрывы функции φ . Однако при выводе уравнения (1.12) обычно используют приближения, строго говоря не справедливые в условиях возникновения ударных волн. В газовой динамике соответствующее приближение заключается в пренебрежении вязкостью и теплопроводностью. Те же самые математические эффекты можно продемонстрировать на примерах более простых, чем газовая динамика, в которой впервые были развиты соответствующие идеи. Эти эффекты будут рассматриваться в гл. 2 и в гл. 3. Самым простым является уравнение

$$\varphi_t + \varphi \varphi_x = \nu \varphi_{xx}, \quad (1.13)$$

на которое, в частности, Бюргерс [1] указал как на простейшее уравнение, объединяющее типичную нелинейность с типичной тепловой диффузией, так что это уравнение обычно называют уравнением Бюргерса, хотя, вероятно, его впервые ввел Бейтмен [1]. Это уравнение привлекло еще большее внимание, когда Хопф [1] и Коул [1] показали, что его общее решение можно получить

в явном виде. На этом типичном примере можно весьма детально исследовать различные вопросы, а затем с достаточной достоверностью использовать результаты в других случаях, когда полное решение получить невозможно и приходится ограничиваться частными или приближенными методами. Глава 4 посвящена уравнению Бюргерса и его решению.

Для двух независимых переменных, обычно времени и одной пространственной переменной, общая система, соответствующая уравнению (1.12),

$$A_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial t} + a_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x} + b_i = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.14)$$

содержит n неизвестных функций $u_i(x, t)$. (Мы будем пользоваться обычным соглашением о суммировании по повторяющемуся индексу j , $j = 1, \dots, n$.) Для линейных систем матрицы A_{ij} и a_{ij} не зависят от u , а вектор b_i представляет собой линейное по u выражение:

$$b_i = b_{ij} u_j; \quad (1.15)$$

заметим, что уравнение (1.5) можно записать в таком виде. Если A_{ij} , a_{ij} , b_i — функции от вектора u , не зависящие от его производных, то система является квазилинейной. Глава 5 начинается с обсуждения условий, необходимых для того, чтобы система (1.14) являлась гиперболической (и, следовательно, описывала гиперболические волны). Затем излагается общая теория характеристик и разрывов для таких гиперболических систем.

Эта теория была развита на основе газовой динамики, которая и обеспечила ее наиболее плодотворный физический контекст. Глава 6 содержит весьма подробный обзор по нестационарным задачам газовой динамики и сверхзвуковым течениям. В нее включены также задачи о цилиндрическом и сферическом взрывах, поскольку они сводятся к двум независимым переменным.

В главе 7 при всестороннем обсуждении решений волнового уравнения (1.1) мы обращаемся к двух- и трехмерным задачам. Пожалуй, в книге, посвященной распространению волн, необычно так долго откладывать этот вопрос и начинать со столь тщательного обсуждения нелинейных эффектов. Это следствие упорядочения, произведенного по числу измерений, а не по сложности понятий или доступности математического аппарата. В главе 7 освещаются свойства решений уравнения (1.1), позволяющие судить о природе рассматриваемого волнового движения и дающие возможность обобщения на другие волновые системы. Главным примером служит геометрическая оптика, которая обобщается на линейные волны в неоднородной среде и является основой для аналогичных построений, связанных с распространением разрывов в нелинейных задачах. Мы даже не пытаемся дать хотя бы

сравнительно краткий обзор огромной области дифракции и теории рассеяния, а также специальных свойств упругих и электромагнитных волн. Все они слишком обширны для того, чтобы их можно было подобающим образом изложить в книге, уже охватывающей столь широкий круг тем.

Главы 8 и 9 посвящены динамике ударных волн и задачам, связанным с явлением звукового удара. Здесь демонстрируется, как можно обойти трудности, обусловленные нелинейным характером задачи.

В этих двух главах для преодоления математических трудностей используются интуитивные идеи и приближения, основанные на физических соображениях. Хотя рассматриваемые задачи взяты из механики жидкости, мы надеемся, что результаты и стиль рассуждений окажутся полезными и в других областях.

Последняя глава по гиперболическим волнам касается случаев, когда одновременно существуют волны различных порядков. Типичным примером служит уравнение

$$\eta (\varphi_{tt} - c_0^2 \varphi_{xx}) + \varphi_t + a_0 \varphi_x = 0. \quad (1.16)$$

Это гиперболическое уравнение с характеристическими скоростями $\pm c_0$, определяемыми волновым оператором второго порядка. Однако если η мало, то в известном смысле хорошее приближение должно обеспечивать волновое уравнение низшего порядка $\varphi_t + a_0 \varphi_x = 0$, а оно предсказывает волны со скоростью a_0 . Оказывается, что волны обоих типов играют важную роль и существуют важные эффекты взаимодействия между ними. Волны высшего порядка несут «первый сигнал» со скоростью c_0 , а «основное возмущение» передается волнами низшего порядка со скоростью a_0 . В нелинейных аналогах уравнения (1.16) это существенно отражается на свойствах ударных волн и их структуре. Все эти вопросы разбираются в гл. 10.

1.3. Диспергирующие волны

Диспергирующие волны не поддаются классификации так легко, как гиперболические волны. Как уже объяснялось в связи с решением (1.3), о них идет речь при рассмотрении определенных типов осциллирующих решений, описывающих волновые пакеты. Такие решения получаются при интегрировании различных уравнений в частных производных и даже некоторых интегральных уравнений. Сразу ясно, что задача характеризуется дисперсионным соотношением

$$\omega = W(\kappa), \quad (1.17)$$

связывающим частоту ω и волновое число κ . Источник этого соотношения для конкретной системы уравнений, описывающей данный процесс, имеет второстепенное значение. Типичными примерами служат уравнение колебаний балки

$$\varphi_{tt} + \gamma^2 \varphi_{xxxx} = 0, \quad \omega = \pm \gamma \kappa^2, \quad (1.18)$$

линейное уравнение Кортевега — де Фриза

$$\varphi_t + c_0 \varphi_x + \nu \varphi_{xxx} = 0, \quad \omega = c_0 \kappa - \nu \kappa^3 \quad (1.19)$$

и линейное уравнение Буссинеска

$$\varphi_{tt} - \alpha^2 \varphi_{xx} = \beta^2 \varphi_{xxtt}, \quad \omega = \pm \alpha \kappa (1 + \beta^2 \kappa^2)^{-1/2}. \quad (1.20)$$

Уравнения (1.19) и (1.20) появляются в приближенных теориях длинных волн на воде. Не приводя здесь общих уравнений для линейных волн на воде, отметим, что они имеют решение вида (1.3), описывающее возмущения свободной поверхности, с

$$\omega = \pm (g \kappa \operatorname{th} \kappa h)^{1/2}, \quad (1.21)$$

где h — невозмущенная глубина, а g — ускорение свободного падения. Другим примером служит классическая теория дисперсии электромагнитных волн в диэлектриках, дающая соотношение

$$(\omega^2 - \nu_0^2)(\omega^2 - c_0^2 \kappa^2) = \omega^2 \nu_p^2, \quad (1.22)$$

где c_0 — скорость света, ν_0 — собственная частота осциллятора и ν_p — плазменная частота.

Решения линейных задач более общие, чем решение (1.3), получаются суперпозицией таких решений и имеют вид интегралов Фурье

$$\varphi = \int_0^\infty F(\kappa) \cos(\kappa x - Wt) d\kappa, \quad (1.23)$$

где $W(\kappa)$ — дисперсионная функция (1.17), зависящая от рассматриваемой системы. Функция (1.23) является — по крайней мере формально — решением для произвольной функции $F(\kappa)$, которая с помощью обратного преобразования Фурье выбирается так, чтобы выполнялись граничные или начальные условия.

Решение вида (1.23) является суперпозицией отдельных волн с различными волновыми числами, каждая из которых распространяется со своей фазовой скоростью

$$c(\kappa) = \frac{W(\kappa)}{\kappa}. \quad (1.24)$$

С ростом времени эти различные составляющие моды «диспергируют» (расползаются), в результате чего, например, одиночный горб превращается в длинный осциллирующий волновой пакет —

цуг волн. Этот процесс изучается с помощью различных асимптотических разложений интеграла (1.23). При таком анализе ключевым понятием является *групповая скорость*

$$C(\kappa) = \frac{dW}{d\kappa} \quad (1.25)$$

Цуг волн, получающийся из (1.23), не имеет постоянной длины волны; по-прежнему существует целый интервал волновых чисел κ . В некотором смысле (его еще нужно выяснить) различные волновые числа распространяются по этому цугу волн со скоростью, равной групповой скорости (1.25). Оказывается, что в аналогичном смысле энергия также распространяется с групповой скоростью. Для истинно диспергирующих волн случай $W \sim \kappa$ исключается, так что фазовая скорость (1.24) и групповая скорость (1.25) не совпадают. При этом в распространении волны доминирующую роль играет именно групповая скорость.

Учитывая ее огромную важность и помня о неоднородных средах и нелинейных волнах, желательно найти способы непосредственного определения групповой скорости и ее свойств без промежуточного преобразования Фурье. На интуитивном уровне это можно сделать очень просто, а в дальнейшем это оправдывается. Предположим, что осциллирующий волновой пакет приблизительно описывается выражением

$$\varphi = a \cos \theta, \quad (1.26)$$

где a и θ — функции от x и t . Функция $\theta(x, t)$ представляет собой «фазу», определяющую положение точки между экстремальными значениями ± 1 на полупериоде $\cos \theta$, а $a(x, t)$ — амплитуду. В частном случае монохроматического волнового пакета

$$a = \text{const}, \quad \theta = \kappa x - \omega t, \quad \omega = W(\kappa). \quad (1.27)$$

В более общем случае определим *локальное* волновое число $k(x, t)$ и *локальную* частоту $\omega(x, t)$ равенствами

$$k(x, t) = \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad \omega(x, t) = -\frac{\partial \theta}{\partial t}. \quad (1.28)$$

Предположим теперь, что эти величины все еще связаны дисперсионным соотношением

$$\omega = W(k); \quad (1.29)$$

тогда получим для θ уравнение

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + W\left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right) = 0, \quad (1.30)$$

решение которого определяет кинематические свойства волнового пакета. Удобнее с помощью соотношений (1.28) исключить

θ , что дает уравнение

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0, \quad (1.31)$$

и работать с системой уравнений (1.29) и (1.31). Подставив в уравнение (1.31) $W(k)$ вместо ω , получим

$$\frac{\partial k}{\partial t} + C(k) \frac{\partial k}{\partial x} = 0, \quad (1.32)$$

где $C(k)$ — групповая скорость, определяемая равенством (1.25). Это уравнение для k является как раз простейшим нелинейным гиперболическим уравнением вида (1.12)! Его можно интерпретировать как волновое уравнение для распространения волнового числа k со скоростью $C(k)$. В таком завуалированном виде в диспергирующих волнах содержатся гиперболические эффекты. Это позволяет использовать методы, описанные в части I книги, для решения задач по диспергирующим волнам.

Предложенный здесь в основном интуитивный анализ групповой скорости легко обобщается на случаи большего числа измерений и неоднородной среды, где либо точные решения громоздки, либо их невозможно найти. В таких случаях результаты обычно можно оправдать непосредственно, рассматривая их как первые члены некоторого асимптотического решения. Эти основные вопросы изучаются в гл. 11, причем специально подчеркивается роль групповой скорости.

Как только введено понятие групповой скорости, в нашем распоряжении оказывается удивительно простой, но мощный метод установления основных свойств любой диспергирующей системы. Это иллюстрируется разнообразными примерами, приведенными в гл. 12.

При помощи асимптотического разложения интеграла Фурье (1.23) легко показать, что энергия передается обязательно с групповой скоростью. Для возможности обобщений снова важно иметь прямые доказательства этого фундаментального результата. Некоторые из них приводятся в гл. 11, но полностью удовлетворительного подхода до недавних пор не существовало. В самое последнее время решение этой задачи было получено как побочный результат исследования аналогичных вопросов для нелинейных волн.

В целом для решения нелинейных задач требуются более мощные методы, и постепенно была осознана возможность использования вариационных принципов. Они, по-видимому, обеспечивают корректный математический аппарат для выяснения ряда вопросов, связанных как с линейными, так и с нелинейными задачами. Судя по успехам, достигнутым недавно при помощи такого вариационного подхода, он привел к совершенно новому взгляду на вещи. Этот подход в упрощенном виде для линейных волн излагается в гл. 11, а во всей общности описывается в гл. 14.

Промежуточная глава 13 посвящена волнам на воде. Это, пожалуй, самая разнообразная и захватывающая область из всех, связанных с волновым движением. Она включает широкий класс природных явлений в океанах и реках и — при надлежащей интерпретации — охватывает гравитационные волны в атмосфере и различных жидкостях. Она явилась стимулом для развития теории диспергирующих волн и основой этой теории, сыграв в ней такую же роль, какую газовая динамика сыграла в теории гиперболических волн. В частности, все основные идеи теории нелинейных диспергирующих волн возникли при изучении волн на воде.

1.4. Нелинейная дисперсия

В 1847 г. Стокс показал, что вертикальное отклонение η поверхности глубокой воды для плоского волнового пакета можно разложить по степеням амплитуды a следующим образом:

$$\eta = a \cos (\kappa x - \omega t) + \frac{1}{2} \kappa a^2 \cos 2 (\kappa x - \omega t) + \frac{3}{8} \kappa^2 a^3 \cos 3 (\kappa x - \omega t) + \dots, \quad (1.33)$$

где

$$\omega^2 = g\kappa (1 + \kappa^2 a^2 + \dots). \quad (1.34)$$

Линейному случаю отвечает первый член разложения (1.33), совпадающий с решением (1.3), причем дисперсионное соотношение имеет вид

$$\omega^2 = g\kappa, \quad (1.35)$$

согласующийся с формулой (1.21), поскольку в случае глубокой воды надо брать предельное выражение при $\kappa h \rightarrow \infty$. Эти рассуждения опираются на две ключевые идеи. Во-первых, утверждается существование периодических решений (соответствующих цугу волн), в которых зависимые переменные являются функциями фазы $\theta = \kappa x - \omega t$, но уже не синусами (выражение (1.33) представляет собой разложение в ряд Фурье некоторой функции $\eta(\theta)$). Вторая основополагающая идея заключается в том, что в дисперсионное соотношение (1.34) входит амплитуда. Это приводит к качественно новым свойствам решения, так что нелинейные эффекты не являются всего лишь малыми поправками.

В 1895 г. Кортевег и де Фриз показали, что длинные волны на сравнительно мелкой воде можно приближенно описать нелинейным уравнением вида

$$\eta_t + (c_0 + c_1 \eta) \eta_x + \nu \eta_{xxx} = 0, \quad (1.36)$$

где c_0 , c_1 и ν — постоянные. При линеаризации этого уравнения для очень малых амплитуд опускают член $c_1 \eta \eta_x$; получающееся

линейное уравнение имеет решение вида

$$\begin{aligned}\eta &= a \cos (\kappa x - \omega t), \\ \omega &= c_0 \kappa - \nu \kappa^3.\end{aligned}\tag{1.37}$$

Этот результат можно улучшить, используя разложение амплитуды в ряд типа разложения Стокса. Но можно поступить и лучше: Кортевег и де Фриз показали, что периодические решения

$$\eta = f(\theta), \quad \theta = \kappa x - \omega t$$

уравнения (1.36) находятся в замкнутом виде без дальнейших упрощений и выражаются через эллиптические функции Якоби. Поскольку решения $f(\theta)$ выражаются через эллиптический косинус $\operatorname{sn} \theta$, они называются *кноидальными* волнами. Эта работа подтверждает общие выводы работы Стокса. Во-первых, существование периодических волновых пакетов с произвольной амплитудой a проверяется непосредственно. Во-вторых, это решение дает конкретное дисперсионное соотношение между ω , κ и a , причем главным нелинейным эффектом снова является то, что в это соотношение входит амплитуда.

Однако было обнаружено даже большее. Одним из пределов функции $\operatorname{sn} \theta$ (когда модуль эллиптического интеграла стремится к единице) является $\operatorname{sech} \theta$. Переходя к этому пределу или непосредственно решая уравнение (1.36), можно получить частное решение

$$\eta = a \operatorname{sech}^2 \left\{ \left(\frac{c_1 a}{12\nu} \right)^{1/2} (x - Ut) \right\}, \tag{1.38}$$

$$U = c_0 + \frac{1}{3} c_1 a. \tag{1.39}$$

В этом пределе период становится бесконечным и формула (1.38) описывает единственный горб. Это — уединенная волна, экспериментально открытая Скоттом Расселом [1] и впервые исследованная в приближенном виде Буссинеском [1] и Рэлеем [2]¹⁾. Включение уединенной волны и периодического волнового пакета в единую теорию было важным шагом. Выражение (1.39) для скорости распространения U как функции амплитуды представляет собой аналог дисперсионного соотношения для этого непериодического случая.

Хотя уравнение Кортевега — де Фриза первоначально было выведено при исследовании волн на воде, впоследствии поняли, что оно является одним из простейших уравнений, сочетающих нелинейность и дисперсию. В этом отношении оно аналогично уравнению Бюргерса, которое объединяет нелинейность и диффу-

¹⁾ Доказательство существования уединенной волны в рамках точной теории было дано в работе М. А. Лаврентьева «До теорії довгих хвиль», *Зб. Праць Інст. Матем. АН УРСР*, № 8 (1946), 13—69. — Прим. ред.

зию. В настоящее время оно оказалось полезным и в других областях.

В последние годы в различных областях были выведены другие простые уравнения, также явившиеся отправными пунктами для разработки и проверки различных идей. Среди них выделяются уравнения

$$\varphi_{tt} - \varphi_{xx} + V'(\varphi) = 0 \quad (1.40)$$

как естественное обобщение линейного уравнения Клейна — Гордона и

$$i\psi_t + \psi_{xx} + |\psi|^2\psi = 0 \quad (1.41)$$

как обобщение уравнения Шредингера. Ниже мы вернемся к этим уравнениям.

Прежде всего следует обсудить вопрос о том, как развить далее подтверждаемый многими примерами общий результат Стокса: существование периодических волновых пакетов является типичным свойством нелинейных диспергирующих систем. Эти решения являются аналогом решений вида (1.3) в линейной теории, но теперь уже не действует принцип суперпозиции. Однако, как уже было указано в связи с формулой (1.26), многие важные результаты линейной теории основываются на использовании групповой скорости модулированных волновых пакетов. При этом переход к интегралу Фурье несуществен, так что можно построить теорию *нелинейной* групповой скорости. Соответствующие рассуждения проводятся в гл. 14 на основе уже упоминавшихся вариационных принципов. Зависимость дисперсионных соотношений от амплитуды приводит к ряду новых эффектов (например, к наличию двух групповых скоростей), которые обсуждаются в общем виде в гл. 15. Кроме исходных задач о поведении волн на воде, одной из главных областей приложения теории является нелинейная оптика, новая быстро развивающаяся область. Ряд приложений к обеим областям дается в гл. 16.

Одним из наиболее интересных вопросов нелинейной оптики является задача самофокусировки, в которой получается уравнение (1.41). Уравнение (1.40), в частности так называемое уравнение Sin-Гордона

$$\varphi_{tt} - \varphi_{xx} + \sin \varphi = 0, \quad (1.42)$$

также встречается в ряде областей. Оба эти уравнения, как и уравнение Кортевега — де Фриза, в качестве предельных решений имеют решения в виде уединенной волны. Уединенные волны всегда вызывают очевидный интерес, поскольку они представляют чисто нелинейный эффект и не имеют аналога в линейной теории диспергирующих систем. Но до самого последнего времени кроме этого мало что было известно.

В настоящее время благодаря замечательной работе Гарднера, Грина, Крускала и Миуры [1], посвященной уравнению Кортевега — де Фриза, а также трудам Перринга и Скирма [1] и Дж. Лэмба [1, 2], посвященным уравнению Sin-Гордона, были найдены семейства точных решений, описывающих взаимодействие уединенных волн. Удивительно то, что уединенные волны сохраняют при взаимодействиях свою индивидуальность и расходятся, сохранив исходные формы и скорости. Эти решения составляют лишь один класс решений, полученных при более общем подходе к данным уравнениям; дальнейшие сравнительно полные результаты относятся к решениям, удовлетворяющим произвольным начальным условиям. Захаров и Шабат [1] распространили методы Гарднера с соавторами на кубическое уравнение Шредингера (1.41) и получили аналогичные результаты. Обзор этих важных и глубоких исследований приводится в гл. 17.

ЧАСТЬ I

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ

Глава 2

ВОЛНЫ И УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Подробное обсуждение гиперболических волн мы начнем с изучения уравнений первого порядка. Как уже было указано в гл. 1, простейшее волновое уравнение имеет вид

$$\rho_t + c_0 \rho_x = 0, \quad c_0 = \text{const.} \quad (2.1)$$

Когда выводится это уравнение, зависимая переменная обычно оказывается плотностью чего-либо, поэтому вместо общего символа φ , принятого во введении, мы используем здесь символ ρ . Общее решение уравнения (2.1) имеет вид $\rho = f(x - c_0 t)$, где $f(x)$ — произвольная функция, так что решение каждой конкретной задачи состоит в выборе функции f , удовлетворяющей заданным начальным или граничным условиям. Оно, очевидно, описывает волновое движение, поскольку исходный профиль $f(x)$ за время t передвинется без изменения формы вправо на расстояние $c_0 t$. В двух точках, находящихся на расстоянии s друг от друга, одинаковое возмущение будет зарегистрировано с задержкой по времени, равной s/c_0 .

Хотя этот линейный случай почти тривиален, его нелинейный аналог

$$\rho_t + c(\rho) \rho_x = 0, \quad (2.2)$$

где $c(\rho)$ — заданная функция аргумента ρ , несомненно, не таков и его изучение приводит к большинству основных идей нелинейных гиперболических волн. Как указывалось выше, многие классические волновые процессы описываются уравнениями второго или более высокого порядка, такими, как волновое уравнение $c_0^2 \nabla^2 \varphi = \varphi_{tt}$, хотя удивительно большое число физических задач приводит непосредственно к уравнению (2.2) или его обобщениям. Примеры будут приведены после предварительного обсуждения свойств решения. Даже в задачах более высокого порядка часто ищут частные решения или приближения, связанные с уравнением (2.2).

2.1. Непрерывные решения

Один из подходов к решению уравнения (2.2) состоит в следующем. Рассмотрим функцию $\rho(x, t)$ на (x, t) -плоскости и обратим внимание на то, что $\rho_t + c(\rho) \rho_x$ представляет собой полную производную функции ρ вдоль кривой, которая в каждой своей точке имеет наклон

$$\frac{dx}{dt} = c(\rho) \quad (2.3)$$

Вдоль каждой кривой, лежащей на (x, t) -плоскости, можно рассматривать x и ρ как функции от t , так что полная производная функции ρ равна

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial \rho}{\partial x}.$$

Использование символа полной производной достаточно для выделения случаев, когда x и ρ рассматриваются как функции от t вдоль некоторой кривой; введение для каждого такого случая новых обозначений в конце концов становится неудобным.

Рассмотрим теперь кривую $\mathcal{C}$ на (x, t) -плоскости, удовлетворяющую уравнению (2.3). Конечно, такую кривую нельзя заранее найти в явном виде, поскольку уравнение (2.3) содержит неизвестные нам значения ρ на этой кривой. Однако ее рассмотрение приведет нас к одновременному построению возможной кривой $\mathcal{C}$ и решения ρ на ней. Из выражения для полной производной и из уравнения (2.2) получаем, что на этой кривой

$$\frac{d\rho}{dt} = 0, \quad \frac{dx}{dt} = c(\rho). \quad (2.4)$$

Прежде всего заметим, что на $\mathcal{C}$ функция ρ сохраняет постоянное значение. Отсюда следует, что и $c(\rho)$ остается постоянной на $\mathcal{C}$, и, следовательно, кривая $\mathcal{C}$ на (x, t) -плоскости представляет собой прямую с наклоном $c(\rho)$. Таким образом, общее решение уравнения (2.2) сводится к построению на (x, t) -плоскости семейства прямых, каждая из которых имеет наклон $c(\rho)$, соответствующий значению функции ρ на ней. Это легко делается в любой конкретной задаче.

Возьмем, например, задачу с начальным условием

$$\rho = f(x), \quad t = 0, \quad -\infty < x < \infty,$$

и обратимся к (x, t) -диаграмме на рис. 2.1. Если какая-либо прямая $\mathcal{C}$ пересекает ось Ox в точке $x = \xi$, то $\rho = f(\xi)$ на всей этой прямой. При этом наклон данной прямой равен $c(f(\xi))$, что мы будем обозначать через $F(\xi)$. Таким образом, $F(\xi)$ является известной функцией от ξ , вычисляемой при помощи функции $c(\rho)$ из

исходного уравнения и функции $f(\xi)$, заданной начальным условием. Уравнение кривой $\mathcal{C}$ имеет вид

$$x = \xi + F(\xi) t.$$

Оно выделяет типичную кривую, причем значение функции ρ на ней равно $f(\xi)$. Меняя параметр ξ , получаем все семейство кривых

$$\rho = f(\xi), \quad c = F(\xi) = c(f(\xi)), \quad (2.5)$$

каждая из которых описывается уравнением

$$x = \xi + F(\xi) t. \quad (2.6)$$

Теперь можно изменить точку зрения и рассматривать формулы (2.5) и (2.6) как аналитическое выражение для решения, не за-

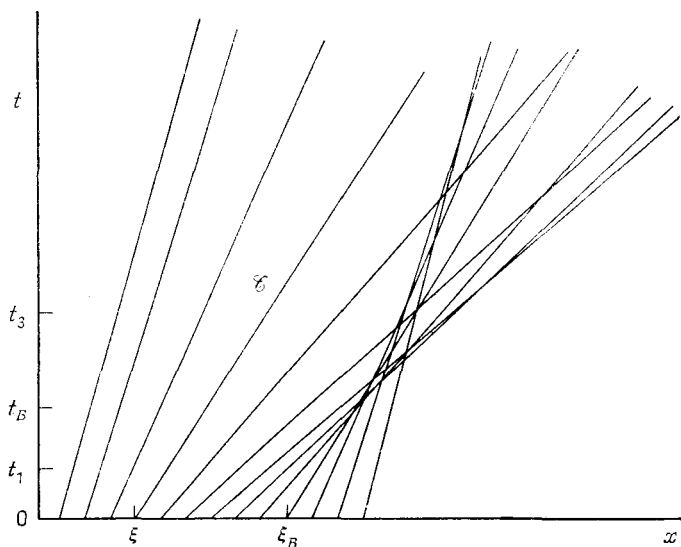


Рис. 2.1. Диаграмма характеристик для нелинейных волн.

висящее от конкретного способа построения. Это значит, что величина ρ определяется равенствами (2.5), где $\xi(x, t)$ неявно задается уравнением (2.6). Проверим, что эти равенства действительно определяют решение. Из (2.5) имеем

$$\rho_t = f'(\xi) \xi_t, \quad \rho_x = f'(\xi) \xi_x,$$

а дифференцируя по x и t равенство (2.6), получаем

$$0 = F(\xi) + \{1 + F'(\xi) t\} \xi_t,$$

$$1 = \{1 + F'(\xi) t\} \xi_x.$$

Следовательно,

$$\rho_t = -\frac{F(\xi)f'(\xi)}{1+F'(\xi)t}, \quad \rho_x = \frac{f'(\xi)}{1+F'(\xi)t}, \quad (2.7)$$

откуда

$$\rho_t + c(\rho)\rho_x = 0,$$

поскольку $c(\rho) = F(\xi)$. Начальное условие $\rho = f(x)$ выполнено, так как $\xi = x$ при $t = 0$.

Кривые, использованные при построении этого решения, являются *характеристиками* рассматриваемого уравнения. Аналогичные характеристики играют важную роль во всех задачах, связанных с гиперболическими дифференциальными уравнениями. В общем случае решение не обязательно остается постоянным

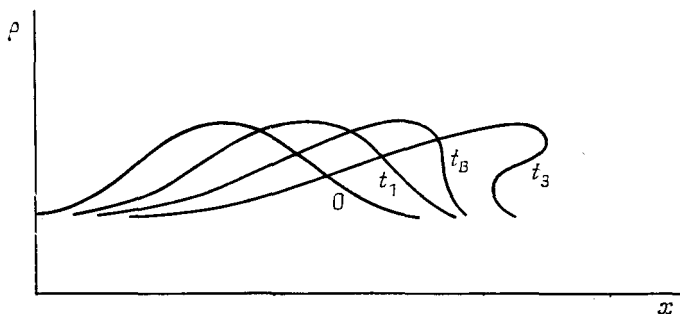


Рис. 2.2. Опрокидывающаяся волна. Построены профили, соответствующие моментам времени $0, t_1, t_B, t_3$ (см. рис. 2.1).

вдоль характеристик. Это имеет место в частном случае уравнения (2.2), но не является определяющим свойством характеристик. Общее определение будет дано ниже, а пока что нам удобно называть характеристиками кривые, заданные уравнением (2.3).

Основная черта волнового процесса заключается в том, что некоторое характерное возмущение движется с конечной скоростью. Для гиперболических уравнений это явление связано с характеристиками. Каждая характеристика в (x, t) -пространстве описывает некоторую волну в x -пространстве, а поведение решения на характеристике соответствует идее переноса этой волновой информации. В этом плане равенства (2.4) можно трактовать как утверждение, что различные значения ρ «распространяются» со скоростью $c(\rho)$. Действительно, решение в момент времени t можно построить, передвинув каждую точку на исходной кривой $\rho = f(x)$ на расстояние $c(\rho)t$ вправо, причем эти расстояния различны для различных значений ρ . Это показано на рис. 2.2 для случая $c'(\rho) > 0$; соответствующие моменты времени отмечены на рис. 2.1. Зависимость c от ρ приводит к типичному нелинейному

эффекту: искажению профиля распространяющейся волны. При $c'(\rho) > 0$ большие значения ρ распространяются быстрее, чем малые. При $c'(\rho) < 0$ большие значения ρ распространяются медленнее, чем малые, и искажение волны имеет вид, противоположный изображенному на рис. 2.2. В линейном случае скорость c постоянна и волна перемещается на расстояние ct без изменения формы.

Из рис. 2.2 видно, что наши рассуждения далеко не полны. Любая сжимающаяся часть волны, у которой скорость распространения является убывающей функцией от x , обязательно «опрокидывается», давая трехзначное решение $\rho(x, t)$. Опрокидывание начинается в указанный на рис. 2.2 момент времени $t = t_B$, когда на профиле ρ впервые появляется точка с вертикальной касательной. Аналитическое решение (2.7) подтверждает это и позволяет определить время начала опрокидывания t_B . На каждой характеристике, на которой $F'(\xi) < 0$, производные ρ_x и ρ_t обращаются в бесконечность, когда

$$t = -\frac{1}{F'(\xi)}.$$

Следовательно, опрокидывание впервые происходит на характеристике $\xi = \xi_B$, для которой $F'(\xi) < 0$ и $|F'(\xi)|$ принимает наибольшее значение; при этом время начала первого опрокидывания равно

$$t_B = -\frac{1}{F'(\xi_B)}. \quad (2.8)$$

За развитием этого процесса можно проследить и в (x, t) -плоскости. Сжимающаяся часть волны с $F'(\xi) < 0$ имеет сходящиеся характеристики; поскольку характеристики являются прямыми, то они в конце концов пересекаются, как на рис. 2.1, образуя область, где решение многозначно. Эту область можно рассматривать как складку на (x, t) -плоскости, состоящую из трех листов с различными значениями ρ на каждом из них. Границей этой области является огибающая характеристик. Семейство характеристик определяется уравнением (2.6), где ξ — параметр. Условие пересечения двух соседних характеристик ξ и $\xi + \delta\xi$ в некоторой точке (x, t) состоит в том, что равенства

$$x = \xi + F(\xi)t$$

и

$$x = \xi + \delta\xi + F(\xi + \delta\xi)t$$

выполняются одновременно. В пределе $\delta\xi \rightarrow 0$ они дают

$$x = \xi + F(\xi)t \quad \text{и} \quad 0 = 1 + F'(\xi)t,$$

т. е. неявные уравнения огибающей. Второе из этих соотношений указывает, что огибающая образуется при $t > 0$ теми характери-

стиками, для которых $F'(\xi) < 0$. Минимальное значение t на этой огибающей достигается при значении ξ , для которого $-F'(\xi)$ имеет наибольшее значение. Это время начала первого опрокидывания в соответствии с равенством (2.8). Если $F''(\xi)$ непрерывна, то огибающая имеет заострение при $t = t_B$, $\xi = \xi_B$, как можно усмотреть на рис. 2.1.

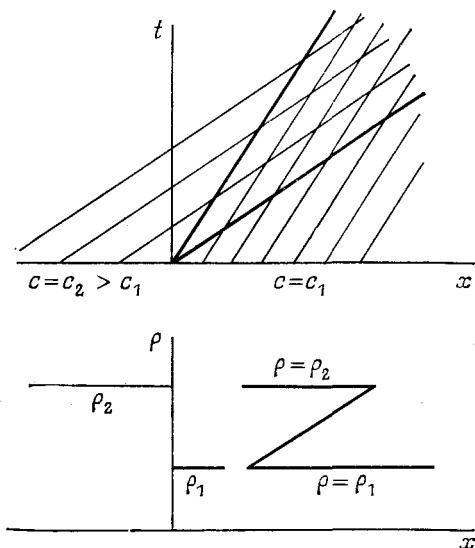


Рис. 2.3. Центрированная волна сжатия с захлестыванием.

В предельном случае опрокидывание происходит, когда исходное распределение имеет разрыв, причем значение $c(\rho)$ за точкой разрыва больше, чем перед ней. Если мы имеем исходные функции

$$f(x) = \begin{cases} \rho_1, & x > 0, \\ \rho_2, & x < 0 \end{cases}$$

и

$$F(x) = \begin{cases} c_1 = c(\rho_1), & x > 0, \\ c_2 = c(\rho_2), & x < 0 \end{cases}$$

с $c_2 > c_1$, то опрокидывание наступает мгновенно. Это показано на рис. 2.3 для случая $c'(\rho) > 0$, $\rho_2 > \rho_1$. Область многозначности начинается прямо из начала координат и ограничена характеристиками $x = c_1 t$ и $x = c_2 t$; граница уже не имеет заострения, поскольку функция F и ее производные имеют разрыв. Однако наш случай можно рассматривать как предел последовательности сгла-

женных ступенек, причем точка начала опрокидывания приближается к началу координат по мере того, как исходный профиль приближается к разрывной ступеньке.

С другой стороны, если исходная ступенька соответствует расширению ($c_2 < c_1$), то существует вполне пригодное непрерывное

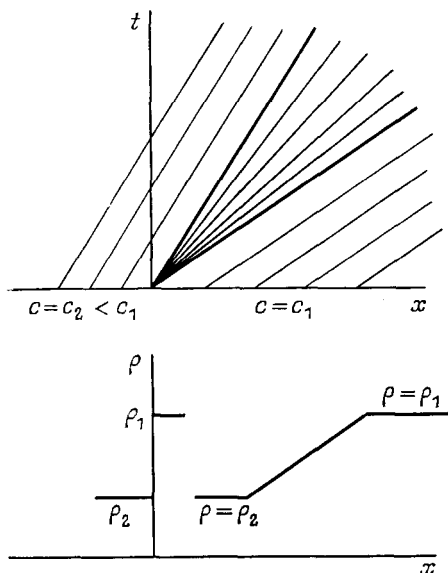


Рис. 2.4. Центрированная волна расширения.

решение. Его можно получить, переходя в равенствах (2.5) и (2.6) к пределу, в котором все значения F , заключенные между c_2 и c_1 , принимаются на характеристиках, проходящих через начало координат. Это соответствует вееру характеристик на (x, t) -плоскости, как показано на рис. 2.4. Каждая характеристика этого веера имеет свой наклон F , но все они имеют одно и то же значение ξ . Функция F имеет вид ступеньки, но мы используем все значения F , заключенные между c_2 и c_1 , и считаем, что всем этим значениям отвечает $\xi = 0$. Решения уравнений (2.5) и (2.6) в этом случае имеют вид

$$c = F, \quad x = Ft \quad \text{при } c_2 < F < c_1.$$

Исключая F , получаем простое явное выражение для c

$$c = \frac{x}{t}, \quad c_2 < \frac{x}{t} < c_1.$$

Полное решение для c имеет вид

$$c = \begin{cases} c_1, & c_1 < x/t, \\ x/t, & c_2 < x/t < c_1, \\ c_2, & x/t < c_2. \end{cases} \quad (2.9)$$

Решая уравнение $c = c(\rho)$, определим ρ . Для сжимающейся ступеньки с $c_2 > c_1$ веер на (x, t) -плоскости «выворачивается», что приводит к захлестыванию, изображенному на рис. 2.3.

В большинстве физических задач, в которых встречается это уравнение, функция $\rho(x, t)$ является плотностью некоторой среды и по самой своей сущности однозначна. Поэтому, когда начинается опрокидывание, уравнение (2.2) перестает правильно описывать физический процесс. Даже в случаях, подобных волнам на воде, где многозначное решение для высоты поверхности можно по крайней мере интерпретировать, оказывается, что уравнение (2.2) не подходит для описания процесса. Дело в том, что какое-либо из предположений или приближенных соотношений, лежащих в основе уравнения (2.2), перестает быть справедливым.

В принципе следует вернуться к физической постановке задачи, посмотреть, что неверно, и вывести исправленное уравнение. Однако, как мы увидим в дальнейшем, оказывается, что предыдущее решение можно спасти, допустив наличие разрывных решений; в этом случае вместо многозначного непрерывного решения будем иметь однозначное решение с разрывом первого рода. Данная процедура требует некоторого расширения математического понятия «решения» уравнения (2.2), поскольку, строго говоря, функция ρ не имеет производных в точках разрыва. Такое расширение осуществляется при помощи понятия «слабого решения».

Важно сознавать, однако, что в действительности дело заключается не просто в математическом расширении понятия решения уравнения (2.2). Нарушение непрерывности решения связано с нарушением некоторого физического приближенного соотношения, и оба эти аспекта следует рассматривать одновременно. Оказывается, например, что существуют несколько подходящих с математической точки зрения семейств разрывных решений, причем вопрос о единственности можно решить, только обратившись к физической стороне задачи.

Ясно поэтому, что нельзя двигаться дальше, не обсудив предварительно некоторые физические проблемы. Первоначальное развитие теории связано с нелинейными волнами в газах и образованием ударных волн. Если пренебречь вязкостью и теплопроводностью, то у уравнений газовой динамики появятся опрокидывающиеся решения, подобные рассмотренным. В тот момент, когда градиенты становятся большими, т. е. перед началом опрокидывания, эффектами вязкости и теплопроводности уже нельзя пре-

небрегать. Эти эффекты можно включить в улучшенную теорию, и волны в этой теории не будут больше опрокидываться. Имеется узкая область, ударная волна, в которой вязкость и теплопроводность играют решающую роль; вне ударной волны вязкостью и теплопроводностью можно по-прежнему пренебрегать. Параметры течения резко изменяются в области ударной волны. В расширенной теории без вязкости эта область идеализированно представляется поверхностью разрыва, и остается добавить лишь условия на разрыве, связывающие скачки значений параметров течения.

Мы подробно изучим различные стороны этого явления. Однако газовая динамика не является простейшим примером, поскольку она описывается уравнениями высших порядков, так что мы сначала обсудим основные идеи на примере более простых задач первого порядка. Следует тем не менее помнить, что первоисточником этих идей явилась газовая динамика и что мы нарушаем хронологический порядок. Основы теории были заложены Пуассоном [1], Стоксом [2], Риманом [1], Эришоу [1], Рэнкином [1], Гюгонио [1], Рэлеем [1], Тейлором [1] — весьма впечатляющий список. Время, которое на это потребовалось, показывает, что связать воедино различные стороны явления оказалось довольно сложным делом.

2.2. Кинематические волны

Во многих задачах о распространении волн рассматривается непрерывное распределение какого-либо вещества или некоторое состояние среды и (в одномерном случае) можно определить плотность $\rho(x, t)$ на единицу длины и расход $q(x, t)$ в единицу времени. Далее можно определить скорость течения $v(x, t)$ равенством

$$v = \frac{q}{\rho}.$$

Предполагая, что исследуемое вещество (или состояние среды) сохраняется, можно считать, что скорость изменения его полного количества в любом интервале $x_1 > x > x_2$ должна компенсироваться суммарным потоком через сечения x_1 и x_2 , т. е.

$$\frac{d}{dt} \int_{x_2}^{x_1} \rho(x, t) dx + q(x_1, t) - q(x_2, t) = 0. \quad (2.10)$$

Если $\rho(x, t)$ имеет непрерывные производные, то можно перейти к пределу $x_1 \rightarrow x_2$ и получить закон сохранения

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0. \quad (2.11)$$

Простейшая задача о распространении волн получается в том случае, когда, исходя из теоретических или эмпирических соображений, можно постулировать (в первом приближении!) некоторую функциональную связь между q и ρ . Если эту связь записать в виде

$$q = Q(\rho), \quad (2.12)$$

то уравнения (2.11) и (2.12) образуют полную систему. Произведя подстановку, получим

$$\rho_t + c(\rho) \rho_x = 0, \quad (2.13)$$

где

$$c(\rho) = Q'(\rho). \quad (2.14)$$

Это приводит нас к уравнению (2.2), общее решение которого дается формулами (2.5) и (2.6). Наличие опрокидывания заставляет нас пересмотреть как математическое предположение о существовании производных функций ρ и q , так и физическое предположение о том, что соотношение $q = Q(\rho)$ является хорошим приближением. Чтобы разъяснить важность этих идей для дальнейшего развития теории, укажем здесь несколько характерных примеров. Мы вернемся к их более подробному обсуждению в гл. 3 после завершения изложения основных теоретических идей.

Забавный (и важный) пример связан с потоком транспорта. Разумно предположить, что основные черты достаточно интенсивного потока транспорта можно получить, считая его непрерывным с наблюдаемой плотностью $\rho(x, t)$, равной числу машин на единицу длины, и расходом $q(x, t)$, равным числу машин, пересекающих черту x за единицу времени. На участке шоссе без въездов и съездов машины сохраняются! В силу этого мы имеем равенство (2.10). Для движения транспорта разумно также считать, что расход q определяется главным образом локальной плотностью ρ , и в качестве первого приближения предложить существование зависимости (2.12). Такие функциональные соотношения изучались и в какой-то степени были установлены рядом инженеров-транспортников.

Теперь мы можем применить изложенную выше теорию. Ясно, однако, что в этом случае при возникновении опрокидывания нет недостатка в причинах, объясняющих возможную неадекватность предпосылок теории. Несомненно, предположение $q = Q(\rho)$ является весьма упрощенным взглядом на очень сложное явление. Например, если плотность изменяется быстро (как это имеет место вблизи начала опрокидывания), следует ожидать, что водители реагируют не только на локальную плотность; следует ожидать также, что проходит некоторое время прежде, чем они соответствующим образом среагируют на изменение обстановки. Можно усомниться и в самом предположении непрерывности.

Другим примером являются паводковые волны в длинных реках. Здесь ρ заменяется площадью A поперечного сечения, зависящей от x и t , когда уровень воды в реке поднимается. Если q — суммарный расход через данное поперечное сечение, то зависимость (2.10) между A и q выражает закон сохранения количества воды. Хотя течение жидкости описывается чрезвычайно сложным образом, кажется естественным начать с функционального соотношения $q = Q(A)$ как первого приближения, выражающего увеличение расхода при повышении уровня воды. Такие эмпирические соотношения действительно выводились, исходя из наблюдений на различных реках. Но опять ясно, что это предположение является свехупрощением, которое придется изменить при возникновении каких-либо неприятностей в теории.

Аналогичным примером, предложенным и тщательно изученным Наем [1], является движение ледника. Можно ожидать, что скорость движения возрастает с ростом толщины льда, и разумно предположить, что между этими величинами существует функциональная зависимость.

В хроматографии и других процессах обмена, изучаемых в химической технологии, также возникает подобная теория. Она формулируется несколько сложнее. Процесс заключается в том, что жидкость, несущая растворенные вещества или частицы, или ионы, протекает через неподвижную твердую фазу и переносимый материал частично адсорбируется этой твердой фазой. Идеализируя этот процесс, принимают, что течение жидкости происходит с постоянной скоростью V . Тогда если ρ_f — плотность материала, переносимого жидкостью, а ρ_s — плотность адсорбированного вещества, то

$$\rho = \rho_f + \rho_s, \quad q = V\rho_f.$$

Поэтому закон сохранения (2.11) имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_f + \rho_s) + \frac{\partial}{\partial x} (V\rho_f) = 0.$$

Второе соотношение касается скорости адсорбции. Уравнение обмена вида

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} = k_1 (A - \rho_s) \rho_f - k_2 \rho_s (B - \rho_f),$$

очевидно, является простейшим уравнением, обладающим требуемыми свойствами. Первый член описывает адсорбцию со скоростью, пропорциональной количеству вещества в жидкости и ограниченной количеством уже адсорбированного вещества вплоть до насыщения A . Второй член описывает обратный переход. (В некоторых процессах второй член просто пропорционален ρ_s ; этим случаям отвечает предел $B \rightarrow \infty$, $k_2 B$ конечно.) В равновесном состоянии выражение в правой части этого уравнения обращается

в нуль, так что ρ_s является известной функцией от ρ_f . В медленно изменяющихся условиях при сравнительно больших скоростях реакции k_1 и k_2 в первом приближении все еще можно считать, что это выражение равно нулю («квазиравновесное состояние»), так что

$$\rho_s = A \frac{k_1 \rho_f}{k_2 B + (k_1 - k_2) \rho_f}.$$

Таким образом, ρ_s — функция ρ_f ; следовательно, q — функция ρ . Когда обмен становится быстрым, а именно перед опрокидыванием, членом $\partial \rho_s / \partial t$ в уравнении обмена уже нельзя пренебрегать.

В качестве примера другого рода в эту общую схему можно включить понятие групповой скорости. Как было уже указано в связи с формулой (4.26), для линейных диспергирующих волн существуют осциллирующие решения с локальным волновым числом $k(x, t)$ и локальной частотой $\omega(x, t)$. В этом случае k — плотность волн, т. е. число волновых гребней на единицу длины, а ω — расход, т. е. число волновых гребней, проходящих через точку x за единицу времени. Если предположить, что число волновых гребней в процессе распространения сохраняется, то имеем дифференциальное уравнение сохранения

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0.$$

Кроме того, k и ω уже связаны дисперсионным соотношением

$$\omega = \omega(k),$$

откуда

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \omega'(k) \frac{\partial k}{\partial x} = 0.$$

Таким образом получено волновое уравнение для распространения изменений локального волнового числа в волновом пакете, и скоростью этого распространения является $d\omega/dk$, т. е. групповая скорость. Эти идеи будут рассмотрены со всей полнотой при последующем изучении диспергирующих волн.

В перечисленных здесь волновых задачах исходят из уравнения сохранения (2.41), и поэтому используется термин *кинематические волны* (Лайтхилл и Уизем [1]) в отличие от обычных звуковых и упругих волн, которые существенно зависят от того, каким образом из законов динамики определяется ускорение.

После этого обозрения некоторых физических задач вернемся к изучению опрокидывания и ударных волн с целью завершения теории. Более подробно эти физические задачи будут рассматриваться в гл. 3.

2.3. Ударные волны

Когда наступает опрокидывание, возникает вопрос о справедливости предположения $q = Q(\rho)$ (формула (2.12)), а также предположения о существовании производных функций ρ и q , входящих в уравнение (2.11). Но считая, что предположение о непрерывности справедливо, мы все еще настаиваем на выполнении закона сохранения (2.10).

Рассмотрим сначала математический вопрос о допустимости разрывов. Что касается уравнения (2.10), то оно не противоречит наличию разрывов первого рода функций ρ и q : все выражения в (2.10) при этом сохраняют смысл. Накладывает ли уравнение (2.10) какие-либо ограничения? Для того чтобы ответить на этот вопрос, предположим наличие разрыва при $x = s(t)$ и выберем x_1 и x_2 так, что $x_1 > s(t) > x_2$. Предположим, что ρ и q и их первые производные непрерывны при $x_1 \geq x > s(t)$ и при $s(t) > x \geq x_2$, а при $x \rightarrow s(t)$ имеют конечные пределы сверху и снизу. Тогда уравнение (2.10) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} q(x_2, t) - q(x_1, t) &= \frac{d}{dt} \int_{x_2}^{s(t)} \rho(x, t) dx + \frac{d}{dt} \int_{s(t)}^{x_1} \rho(x, t) dx = \\ &= \rho(s^-, t) \dot{s} - \rho(s^+, t) \dot{s} + \int_{x_2}^{s(t)} \rho_t(x, t) dx + \int_{s(t)}^{x_1} \rho_t(x, t) dx, \end{aligned}$$

где $\rho(s^-, t)$, $\rho(s^+, t)$ — предельные значения $\rho(x, t)$ при $x \rightarrow s(t)$ снизу и сверху соответственно, а $\dot{s} = ds/dt$. Поскольку ρ_t ограничена в каждом из интервалов, то при $x_1 \rightarrow s^+$, $x_2 \rightarrow s^-$ интегралы стремятся к нулю. Следовательно,

$$q(s^-, t) - q(s^+, t) = \{\rho(s^-, t) - \rho(s^+, t)\} \dot{s}.$$

Условимся обозначать индексом 1 величины перед разрывом и индексом 2 за ним. Тогда, если U — скорость распространения разрыва, т. е. $\dot{s}$, то

$$q_2 - q_1 = U(\rho_2 - \rho_1). \quad (2.15)$$

Это условие можно также переписать в виде

$$-U[\rho] + [q] = 0, \quad (2.16)$$

где скобки обозначают скачок данной величины. В этой форме ясно видно соответствие между полученным условием на линии разрыва и дифференциальным уравнением (2.11), а именно соответствие

$$\frac{d}{dt} \leftrightarrow -U[\quad], \quad \frac{\partial}{\partial x} \leftrightarrow [\quad]. \quad (2.17)$$

Теперь мы можем расширить понятие решения уравнения (2.10) и допустить разрывы указанного вида. В любой области непрерывности решения уравнение (2.11) останется справедливым и пред-

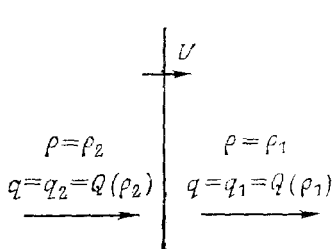


Рис. 2.5. Параметры течения для движущегося разрыва.

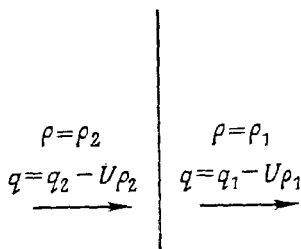


Рис. 2.6. Параметры течения для неподвижного разрыва.

положение (2.12) можно сохранить. Поскольку в области непрерывности $q = Q(\rho)$, на сторонах любого разрыва $q_2 = Q(\rho_2)$ и $q_1 = Q(\rho_1)$ и условие (2.15) можно переписать так:

$$U = \frac{Q(\rho_2) - Q(\rho_1)}{\rho_2 - \rho_1}. \quad (2.18)$$

Теперь задача сводится к введению в решение (2.5), (2.6) разрывов таким образом, чтобы выполнялось равенство (2.18) и не возникали многозначные решения.

В простейшем случае имеем

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \rho_1, & c &= c(\rho_1) = c_1, & x &> 0, \\ \rho &= \rho_2, & c &= c(\rho_2) = c_2, & x &< 0, \end{aligned} \right\} t = 0,$$

где $c_2 > c_1$. Опрокидывающееся решение приведено на рис. 2.3. Теперь мы можем построить однозначное решение в виде разрыва, движущегося со скоростью (2.18):

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_1, & x &> Ut, \\ \rho &= \rho_2, & x &< Ut, \end{aligned}$$

как схематически представлено на рис. 2.5.

Обычным способом вывода условия на разрыве является рассмотрение этого частного решения в системе отсчета, в которой разрыв неподвижен, как показано на рис. 2.6. Относительные расходы при этом равны $q_1 - U\rho_1$ и $q_2 - U\rho_2$. Закон сохранения можно сразу записать в виде

$$q_1 - U\rho_1 = q_2 - U\rho_2,$$

откуда и следует (2.15).

Прежде чем перейти к общему методу введения разрывов, рассмотрим задачу с другой точки зрения, считая, что дифференциальное уравнение (2.11) справедливо, а соотношение (2.12) нарушается.

2.4. Структура ударной волны

В качестве частного случая будет полезно составить более точное описание простого разрывного решения, представленного на рис. 2.5, и провести его исследование. Это и является задачей установления «структуры ударной волны».

Во многих задачах теории кинематических волн более точное приближение получается при допущении, что q зависит не только от плотности ρ , но и от ее градиента ρ_x . Проще всего положить

$$q = Q(\rho) - v\rho_x, \quad (2.19)$$

где v — некоторая постоянная. Для потока транспорта, например, можно утверждать, что водители снижают скорость при увеличении плотности машин впереди, и наоборот. Эти рассуждения показывают, что v следует выбирать положительным, а ниже мы увидим, что знак v имеет важное значение. Если в некоторых безразмерных переменных, выбранных надлежащим образом, v мало, то (2.12) является хорошим приближением при условии, что значение ρ_x не слишком велико. При опрокидывании ρ_x становится большим и поправочный член начинает играть доминирующую роль, сколь бы малым ни было v . Рассмотрим теперь непрерывные решения при *такой* формулировке задачи. В силу (2.11) и (2.19) они удовлетворяют уравнению

$$\rho_t + c(\rho)\rho_x = v\rho_{xx}, \quad c(\rho) = Q'(\rho). \quad (2.20)$$

Член $c(\rho)\rho_x$ в данном уравнении приводит к росту крутизны и опрокидыванию. Напротив, член $v\rho_{xx}$ вводит диффузию, характерную для уравнения теплопроводности

$$\rho_t = v\rho_{xx}.$$

Для уравнения теплопроводности решение задачи Коши с начальной функцией в виде ступеньки

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \rho_1, & x &> 0, \\ \rho &= \rho_2, & x &< 0, \end{aligned} \right\} t = 0$$

имеет вид

$$\rho = \rho_2 + \frac{\rho_1 - \rho_2}{V\pi} \int_{-\infty}^{x/\sqrt{4vt}} e^{-\zeta^2} d\zeta.$$

Оно описывает сглаженную ступеньку с предельными значениями ρ_1, ρ_2 при $x \rightarrow \pm \infty$ и крутизной, уменьшающейся, как $(vt)^{-1/2}$. Две противоположные тенденции нелинейного роста крутизны и диффузии объединяются уравнением (2.20). Важность условия $v > 0$ видна на примере уравнения теплопроводности; при $v < 0$ решения неустойчивы.

В рамках этого более точного подхода будем искать решение, заменяющее решение, изображенное на рис. 2.5. Одна из очевидных идей — искать решение со стационарным профилем вида

$$\rho = \rho(X), \quad X = x - Ut,$$

где U — постоянная, которую еще нужно определить. Тогда из (2.20) имеем

$$\{c(\rho) - U\} \rho_X = v \rho_{XX}.$$

Интегрируя один раз, получаем

$$Q(\rho) - U\rho + A = v\rho_X, \quad (2.21)$$

где A — постоянная интегрирования. Отсюда следует соотношение, неявно определяющее $\rho(X)$:

$$\frac{X}{v} = \int \frac{d\rho}{Q(\rho) - U\rho + A}, \quad (2.22)$$

но качественное поведение $\rho(X)$ легче установить непосредственно из (2.21). Нас интересует возможность существования решения, стремящегося к постоянным состояниям $\rho \rightarrow \rho_1$ при $X \rightarrow +\infty$ и $\rho \rightarrow \rho_2$ при $X \rightarrow -\infty$. Если существует подобное решение с $\rho_X \rightarrow 0$ при $X \rightarrow \pm \infty$, то произвольные пока постоянные U и A должны удовлетворять соотношениям

$$Q(\rho_1) - U\rho_1 + A = Q(\rho_2) - U\rho_2 + A = 0.$$

В частности,

$$U = \frac{Q(\rho_2) - Q(\rho_1)}{\rho_2 - \rho_1}. \quad (2.23)$$

Для такого решения связь между скоростью U и параметрами состояний на $\pm \infty$ оказывается в точности такой же, как и в условии на границе разрыва!

Значения ρ_1, ρ_2 являются нулями для $Q(\rho) - U\rho + A$ и в общем случае это простые нули. Когда ρ стремится к ρ_1 или ρ_2 , интеграл в соотношении (2.22) расходится и $X \rightarrow \pm \infty$, что и требуется. Если между этими двумя нулями $Q(\rho) - U\rho + A < 0$ и $v > 0$, то $\rho_X < 0$ и решение имеет вид, приведенный на рис. 2.7, где ρ монотонно возрастает от ρ_1 на $+\infty$ до ρ_2 на $-\infty$. Если $Q(\rho) - U\rho + A > 0$ и $v > 0$, то решение возрастает от ρ_2 на $-\infty$ до ρ_1 на $+\infty$.

В силу уравнения (2.21) ясно, что если ρ_1 и ρ_2 фиксированы (так что U и A также фиксированы), то изменение v можно компенсировать изменением масштаба по оси X . При $v \rightarrow 0$ профиль на рис. 2.7 сжимается в X -направлении и в пределе превращается в ступенчатый переход от ρ_1 к ρ_2 , перемещающийся со скоростью,

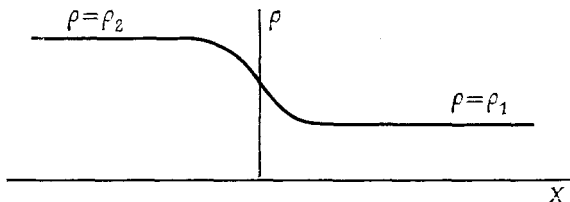


Рис. 2.7. Структура ударной волны.

определяемой равенством (2.23). Это в точности совпадает с разрывным решением, изображенным на рис. 2.5. Для малых ненулевых значений v ударная волна представляет собой быстрое, но непрерывное возрастание параметров течения, происходящее в узкой области. В этой узкой области опрокидывание, вызываемое нелинейностью, компенсируется диффузией, что приводит к стационарному профилю.

Одним из важнейших моментов является знак скачка ρ . Если $c'(\rho) > 0$, то непрерывная волна, несущая увеличение ρ , опрокинется вперед и возникнет ударная волна с $\rho_2 > \rho_1$; если $c'(\rho) < 0$, то произойдет опрокидывание назад и возникнет ударная волна с $\rho_2 < \rho_1$.

Структура ударной волны, определяемая уравнением (2.21), должна быть такой же. Как было указано выше, из условия устойчивости следует положительность v , так что направление возрастания ρ определяется знаком выражения $Q(\rho) - U\rho + A$ между двумя нулями ρ_1 и ρ_2 . Но $c'(\rho) = Q''(\rho)$. Отсюда следует, что при $c'(\rho) > 0$ между нулями $Q(\rho) - U\rho + A < 0$ и решение имеет вид, представленный на рис. 2.7 с $\rho_2 > \rho_1$, как это и требуется. Если $c'(\rho) < 0$, то ступенька меняется на противоположную и $\rho_2 < \rho_1$. Таким образом, рассуждения об опрокидывании и структура ударной волны согласуются друг с другом.

В частном случае, когда $Q(\rho)$ является квадратичным трехчленом

$$Q(\rho) = \alpha\rho^2 + \beta\rho + \gamma, \quad (2.24)$$

интеграл в (2.22) легко вычисляется. Знак α определяет знак $c'(\rho) = Q''(\rho)$ и для определенности рассмотрим случай $\alpha > 0$. Можно положить

$$Q - U\rho + A = -\alpha(\rho - \rho_1)(\rho_2 - \rho),$$

где

$$U = \beta + \alpha (\rho_1 + \rho_2), \quad A = \alpha \rho_1 \rho_2 - \gamma.$$

Тогда соотношение (2.22) принимает вид

$$\frac{X}{v} = - \int \frac{d\rho}{\alpha (\rho - \rho_1) (\rho_2 - \rho)} = \frac{1}{\alpha (\rho_2 - \rho_1)} \ln \frac{\rho_2 - \rho}{\rho - \rho_1}. \quad (2.25)$$

Если $X \rightarrow \infty$, то $\rho \rightarrow \rho_1$ экспоненциально, а если $X \rightarrow -\infty$, то $\rho \rightarrow \rho_2$ экспоненциально. Переходная область не имеет точной толщины, но ее можно измерить различными способами, взяв, например, расстояние, на котором плотность меняется на 90%, или отношение $(\rho_2 - \rho_1)$ к максимальной крутизне $|\rho_x|$. Ясно, что все эти меры толщины пропорциональны величине

$$\frac{v}{\alpha (\rho_2 - \rho_1)}. \quad (2.26)$$

Если она мала по сравнению с другими характерными длинами задачи, то резкий ударный переход удовлетворительно аппроксимируется разрывом. Мы видим, что эта толщина стремится к нулю, когда $v \rightarrow 0$ при фиксированных ρ_1, ρ_2 , но следует также отметить, что достаточно слабая ударная волна с $(\rho_2 - \rho_1)/\rho_1 \rightarrow 0$ неизбежно становится достаточно толстой для любого сколь угодно малого фиксированного v . Для слабых ударных волн $Q(\rho)$ всегда можно аппроксимировать подходящей квадратичной функцией в интервале от ρ_1 до ρ_2 , так что применима формула (2.25). Она в целом неплохо описывает форму даже ударных волн умеренной интенсивности.

Решение, описывающее структуру ударной волны, представляет собой лишь одно частное решение уравнения (2.20), но этот пример позволяет надеяться, что в общем случае, когда $v \rightarrow 0$ в надлежащем безразмерном виде, решения уравнения (2.20) стремятся к разрывным решениям уравнения

$$\rho_t + c(\rho) \rho_x = 0,$$

для которых выполняется условие на разрыве

$$U = \frac{Q(\rho_2) - Q(\rho_1)}{\rho_2 - \rho_1}.$$

Это верно, если решения сравниваются для фиксированных x и при $v \rightarrow 0$. Однако поскольку переходная область ударной волны становится очень широкой, когда $(\rho_2 - \rho_1)/\rho_1 \rightarrow 0$ при фиксированном v , то в любой задаче, в которой при $t \rightarrow \infty$ интенсивности ударных волн стремятся к нулю, может наступить конечная стадия с чрезвычайно слабыми ударными волнами, когда разрывная теория станет неприменимой. Обычно эта стадия совершенно

не представляет интереса, так как ударные волны должны быть уж очень слабыми.

Другими словами, можно сказать, что два различных подхода к устранению неприемлемых многозначных решений согласуются. Разрывные ударные волны аналитически проще, и их можно использовать в более сложных задачах.

Для более подробного обоснования этих рассуждений нужно найти в явном виде некоторые решения уравнения (2.20) с ударными волнами различной интенсивности. Хотя в случае произвольной зависимости $Q(\rho)$ такие решения неизвестны, оказывается, что уравнение (2.20) можно решить в явном виде, если $Q(\rho)$ опять является квадратичной функцией. Умножив уравнение (2.20) на $c'(\rho)$, его можно переписать в виде

$$c_t + cc_x = vc'(\rho)\rho_{xx} = vc_{xx} - vc''(\rho)\rho^2. \quad (2.27)$$

Если $Q(\rho)$ — квадратичная функция, то $c(\rho)$ — линейная функция от ρ и $c''(\rho) = 0$, откуда имеем

$$c_t + cc_x = vc_{xx}. \quad (2.28)$$

Это уравнение Бюргерса, и его можно решить в явном виде; основные результаты приведены в гл. 4. Пока мы примем это во внимание при изучении разрывных решений уравнения (2.2), учитывая, что для очень слабых ударных волн подход, связанный с разрывными решениями, неприемлем. В этом случае можно аппроксимировать $Q(\rho)$ квадратичной функцией и использовать уравнение Бюргерса.

Рассуждения этого параграфа существенно опираются на условие $v > 0$. Как отмечалось ранее, оно необходимо для устойчивости задачи. Однако для потока транспорта и приливных волн имеют место интересные случаи неустойчивости, которые будут обсуждены в гл. 3.

2.5. Слабые ударные волны

В ряде случаев ударные волны являются слабыми, так что $(\rho_2 - \rho_1)/\rho_1$ мало, но все же они не настолько слабы, чтобы их нельзя было описывать как разрывы. Полезно привести для таких случаев некоторые приближенные выражения.

Когда интенсивность ударной волны $(\rho_2 - \rho_1)/\rho_1$ стремится к 0, скорость ударной волны

$$U = \frac{Q(\rho_2) - Q(\rho_1)}{\rho_2 - \rho_1}$$

стремится к характеристической скорости

$$c(\rho) = \frac{dQ}{d\rho}.$$

Для слабых волн выражение для скорости ударной волны U можно разложить в ряд Тейлора по степеням $(\rho_2 - \rho_1)/\rho_1$, что дает

$$U = Q'(\rho_1) + \frac{1}{2}(\rho_2 - \rho_1) Q''(\rho_1) + O(\rho_2 - \rho_1)^2.$$

Скорость распространения $c(\rho_2) = Q'(\rho_2)$ также можно разложить в ряд Тейлора

$$c(\rho_2) = c(\rho_1) + (\rho_2 - \rho_1) Q''(\rho_1) + O(\rho_2 - \rho_1)^2.$$

Следовательно,

$$U = \frac{1}{2}(c_1 + c_2) + O(\rho_2 - \rho_1)^2, \quad (2.29)$$

где $c_1 = c(\rho_1)$ и $c_2 = c(\rho_2)$. В этом приближении скорость ударной волны представляет собой среднее арифметическое характеристических скоростей на сторонах разрыва. В (x, t) -плоскости кривая, по которой распространяется разрыв, делит пополам угол, образованный характеристиками, пересекающимися на этой кривой.

Это свойство не только полезно при графическом изображении разрывов, но и упрощает аналитическое определение положения разрыва. Если $Q(\rho)$ — квадратичная функция, то это соотношение, очевидно, является точным.

2.6. Условие опрокидывания

Непрерывная волна опрокидывается и приводит к разрыву тогда и только тогда, когда скорость распространения c убывает с увеличением x . Следовательно, при наличии разрыва

$$c_2 > U > c_1; \quad (2.30)$$

здесь все скорости считаются положительными, если они направлены в сторону возрастания x , индексом 1 отмечено значение c непосредственно перед разрывом (т. е. со стороны больших значений x), а индексом 2 — значение c сразу за разрывом. Описываемая этим разрывом ударная волна вызывает увеличение скорости c , которая является сверхзвуковой для наблюдателя, находящегося перед волной, и дозвуковой для наблюдателя, находящегося за волной.

Рассматривая только условия на разрыве, можно допустить случай $c_2 < c_1$. Однако ударная волна с $c_2 < c_1$ не может сформиро-

ваться из непрерывной волны и в ней нет необходимости. Поэтому такие волны исключаются из рассмотрения.

В этих рассуждениях есть один спорный момент, поскольку представленное на рис. 2.5 решение можно осуществить с $c_2 < c_1$ (с помощью некоего сложного и, возможно, весьма мало-реалистичного механизма). Конечно, мы уже указали в (2.9) и на рис. 2.6 подходящее непрерывное решение для таких начальных условий. Тем не менее, будучи особо настойчивым, можно утверждать, что на рис. 2.5 изображено другое допустимое решение.

Возражение состоит в том, что предлагаемое решение неустойчиво. Это значит, что малое возмущение переведет разрывное решение в нечто совершенно иное, — соответствующее вееру характеристик решение вида (2.9). Это «аргумент неустойчивости формы», являющийся дополнением к «аргументу образования». Неустойчивость не будет разбираться подробно в этой главе, поскольку аргумент образования достаточно убедителен и недвусмыслен. Для уравнений высших порядков условия образования разрыва изучать становится труднее, и аргумент неустойчивости иногда позволяет проще решить вопрос о возможности существования данного разрыва, на котором выполняются надлежащие условия.

Для ударных волн в газовой динамике неравенство, соответствующее неравенству (2.30), означает, что при переходе газа через ударную волну его энтропия *возрастает*. Это условие возрастания энтропии было первым доводом в пользу необратимости ударных волн, т. е. того, что переходный процесс в ударной волне происходит только в одном направлении.

Однако условия, подобные (2.30), носят более общий характер. В некоторых задачах не существует очевидного аналога энтропии, в других, подобных задачам магнитной газовой динамики, условие возрастания энтропии не исключает некоторых недопустимых ударных волн.

Другая точка зрения на эти критерии состоит в том, что если любую допустимую разрывную ударную волну описывать более точными уравнениями, то она будет иметь надлежащую структуру. Это более приемлемая точка зрения, поскольку она связана с более реалистичским описанием процесса. Однако подобный анализ может оказаться чересчур сложным, и часто приходится ограничиваться косвенными доводами в рамках более простой теории.

Этот второй подход был применен при рассмотрении структуры ударной волны в § 2.4. Когда $c'(\rho) > 0$, подходящая структура была обнаружена лишь при $\rho_2 > \rho_1$; поскольку $c'(\rho) > 0$, это эквивалентно условию $c_2 > c_1$. Когда $c'(\rho) < 0$, мы получаем, что $\rho_2 < \rho_1$, но изменение знака $c'(\rho)$ снова дает $c_2 > c_1$. Поскольку $c(\rho) = Q'(\rho)$, скорость ударной волны, в силу теоремы Ролля, лежит между c_1 и c_2 .

2.7. Замечание о законах сохранения и слабых решениях

С математической точки зрения «составные» решения, состоящие из непрерывно дифференцируемой части, удовлетворяющей уравнению

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial Q(\rho)}{\partial x} = 0, \quad (2.31)$$

и разрывной части, удовлетворяющей условию

$$-U[\rho] + [Q(\rho)] = 0, \quad (2.32)$$

можно рассматривать как слабые решения уравнения (2.31). Коротко говоря, эту идею можно пояснить следующим образом. Рассмотрим наряду с (2.31) уравнение

$$-\int_R \{\rho \varphi_t + Q(\rho) \varphi_x\} dx dt = 0, \quad (2.33)$$

где R — произвольный прямоугольник в (x, t) -плоскости, а φ — произвольная «пробная» функция с непрерывными первыми производными в R , обращающаяся в нуль на границе R . Если ρ и $Q(\rho)$ непрерывно дифференцируемы, то уравнения (2.31) и (2.33) эквивалентны. С одной стороны, если (2.31) умножить на φ и проинтегрировать по R , то, интегрируя затем по частям, получаем (2.33). С другой стороны, из (2.33), интегрируя по частям, получаем равенство

$$\int_R \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial Q(\rho)}{\partial x} \right\} \varphi dx dt = 0.$$

Поскольку это равенство должно быть справедливым для произвольной пробной функции φ , отсюда следует (2.31). Однако уравнение (2.33) имеет более широкий класс решений, поскольку допустимые функции $\rho(x, t)$ не обязаны иметь производные. Функции $\rho(x, t)$, удовлетворяющие равенству (2.33) для всех пробных функций φ , называются слабыми решениями уравнения (2.31).

Теперь выясним, что дает нам это расширение понятия решения. Рассмотрим возможность существования слабого решения $\rho(x, t)$, т. е. решения, удовлетворяющего уравнению (2.33), непрерывно дифференцируемого в двух частях R_1 и R_2 прямоугольника R и имеющего разрыв первого рода на границе S , разделяющей R_1 и R_2 . Интегрируя в каждой из областей R_1, R_2 по частям, полу-

чаем из (2.33)

$$\int_{R_1} \int \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial Q(\rho)}{\partial t} \right\} \varphi dx dt + \int_{R_2} \int \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial Q(\rho)}{\partial x} \right\} \varphi dx dt + \\ + \int_S \{ [\rho] l + [Q(\rho)] m \} \varphi ds = 0,$$

где (l, m) — нормаль к S , а $[\rho]$ и $[Q(\rho)]$ — скачки на S . Криволинейный интеграл по S образован граничными членами интегралов по R_1 и R_2 , полученными при интегрировании по частям. Так как это равенство должно быть справедливым для всех пробных функций φ , отсюда следует, что (2.31) справедливо внутри каждой из областей R_1, R_2 , но, кроме того, имеет место равенство

$$[\rho] l + [Q(\rho)] m = 0 \text{ на } S.$$

Это и есть условие на разрыве (2.32), поскольку $U = -l/m$. Таким образом, слабое решение рассмотренного вида удовлетворяет уравнению (2.31) в точках непрерывности и имеет разрыв, на котором выполняется условие (2.32). Как раз то, что нам нужно!

На первый взгляд введение понятия слабого решения позволяет обойти более сложное и менее точное рассмотрение реального физического процесса. Но в действительности это не так. Для дифференциального уравнения

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + c(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0$$

существует бесконечное число законов сохранения

$$\frac{\partial f(\rho)}{\partial t} + \frac{\partial g(\rho)}{\partial x} = 0, \quad (2.34)$$

требуется только, чтобы выполнялось соотношение

$$g'(\rho) = f'(\rho) c(\rho). \quad (2.35)$$

Для дифференцируемых функций $\rho(x, t)$ все эти законы эквивалентны. Однако их интегральные формы не эквивалентны и приводят к различным условиям на разрыве. Слабое решение уравнения (2.34) дает условие вида

$$-U[f(\rho)] + [g(\rho)] = 0, \quad (2.36)$$

и различный выбор f и g приводит к различным соотношениям между ρ_1, ρ_2 и U . Следовательно, для того чтобы выбрать слабое решение, отвечающее данной задаче, необходимо изучить сам физический процесс.

Учитывая дифференциальное уравнение (2.34), можно предложить закон сохранения в интегральном виде

$$\frac{d}{dt} \int_{x_2}^{x_1} f(\rho) dx + [g(\rho)]_{x_2}^{x_1} = 0. \quad (2.37)$$

Однако, чтобы выяснить, будет ли этот закон справедлив для недифференцируемых функций ρ , придется вернуться к первоначальной формулировке задачи. В § 2.2 последовательность рассуждений была правильной: сначала уравнение (2.10), затем уравнение (2.11). Обратная последовательность, т. е. переход от дифференциального уравнения в частных производных к эквивалентному интегральному закону, приводит к потере единственности.

Если (2.37) — истинный закон сохранения, то соотношение (2.36) можно вывести как условие на разрыве теми же рассуждениями, что и в § 2.3. Таким образом, правильный выбор слабого решения определяется выбором величин, действительно сохраняющихся при пересечении разрывов. Ввиду отсутствия единственности и возможных недоразумений понятие слабого решения в этом контексте не представляется особенно ценным; и следует подчеркнуть, что физические задачи, как правило, первоначально формулируются в интегральном виде, откуда вытекают как дифференциальные уравнения в частных производных, так и условия на разрыве.

Однако в упрощенном виде идея слабого решения иногда оказывается полезной при предварительном рассмотрении задачи. Если, например, нас интересует, допускает ли уравнение (2.34) движущиеся разрывы как составную часть решения, то можно попробовать функции

$$\begin{aligned} f(\rho) &= f_0(x) H(x - Ut) + f_1, \\ g(\rho) &= g_0(x) H(x - Ut) + g_1 \end{aligned}$$

(здесь $H(x)$ — ступенчатая функция Хевисайда, а f_1, g_1 — непрерывные функции). Подставляя их в уравнение (2.34), мы получим члены типа δ -функции

$$(-Uf_0 + g_0) \delta(x - Ut)$$

плюс менее сингулярные члены. Отсюда выводим, что

$$-Uf_0 + g_0 = 0,$$

а это и есть условие на разрыве (2.36), поскольку $f_0 = [f]$, $g_0 = [g]$. При таком выводе, конечно, не удастся избежать неединственности и, кроме того, δ -функции используются несколько подозрительным образом. Использование δ -функций в нелинейных задачах обычно исключено, потому что нельзя придать удовлетворительного смысла степеням и произведениям таких обобщенных функций: мы ввели искусственную линейность, записав выражения для $f(\rho)$ и $g(\rho)$ в отдельности, вместо того чтобы использовать единое выражение для ρ . Конечно, оправданием введению δ -функции служит слабое решение.

Для сравнения рассмотрим тот же самый вопрос о допустимости наличия движущихся разрывов для уравнения (2.20), записанного в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial Q(\rho)}{\partial x} = v \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}.$$

Если выражения для ρ и $Q(\rho)$ содержат члены вида $H(x - Ut)$, то $\partial^2 \rho / \partial x^2$ будет включать член вида $[\rho] \delta'(x - Ut)$ и не найдется другого члена с сингулярностью вида $\delta'(x - Ut)$, чтобы компенсировать его. Таким образом заключаем, что $[\rho] = 0$, т. е. что разрывы недопустимы. Это, несомненно, полезный вывод для предварительной оценки задачи.

2.8. Построение разрывов; квадратичная функция $Q(\rho)$

После обсуждения этих различных точек зрения вернемся к математической задаче построения разрывного решения, удовлетворяющего на разрывах соотношению

$$U = \frac{Q(\rho_2) - Q(\rho_1)}{\rho_2 - \rho_1} \quad (2.38)$$

и представимого в области непрерывности в виде

$$\rho = f(\xi), \quad x = \xi + F(\xi)t. \quad (2.39)$$

Любая многозначная часть волнового профиля (2.39) должна быть заменена некоторым подходящим разрывом, как показано на

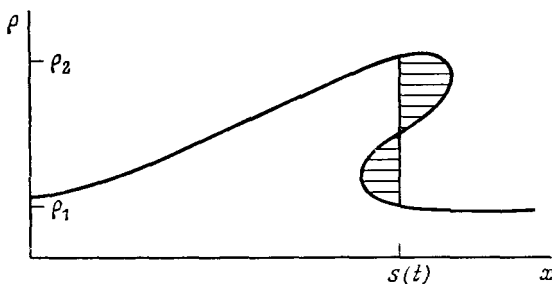


Рис. 2.8. Построение областей равной площади для определения положения разрыва в опрокидывающейся волне.

рис. 2.8¹⁾. Правильное положение разрыва можно определить с помощью следующего простого соображения. Как многозначная,

¹⁾ Этот рисунок построен для случая $c'(\rho) > 0$, но все формулы этого параграфа справедливы и для случая $c'(\rho) < 0$.

так и разрывная кривые удовлетворяют закону сохранения. Следовательно, значения интеграла $\int \rho \, dx$ для них должны совпадать, и поэтому разрыв должен отсекал области с равными площадями, заштрихованные на рис. 2.8. Хотя это определение является совершенно общим, оно неудобно для аналитических построений. Общий случай слишком сложен, и стоит разобрать сначала частный пример. Для этого вернемся к случаю квадратичной функции $Q(\rho)$. Рассматриваемый случай включает в себя слабые возмущения равновесного состояния с $\rho = \rho_0$, поскольку тогда $Q(\rho)$ можно аппроксимировать выражением

$$Q = Q(\rho_0) + Q'(\rho_0)(\rho - \rho_0) + \frac{1}{2} Q''(\rho_0)(\rho - \rho_0)^2,$$

и поэтому обладает значительной общностью.

Рассмотрим

$$Q(\rho) = \alpha \rho^2 + \beta \rho + \gamma;$$

тогда

$$c(\rho) = Q'(\rho) = 2\alpha\rho + \beta,$$

так что скорость ударной волны (2.38) равняется

$$U = \frac{1}{2}(c_1 + c_2),$$

где $c_1 = c(\rho_1)$, $c_2 = c(\rho_2)$.

Простота этого случая состоит в том, что все решение задачи можно записать только через одну переменную c . Непрерывное решение имеет вид

$$c = F(\xi), \tag{2.40}$$

$$x = \xi + F(\xi) t,$$

и разрывы следует строить таким образом, чтобы

$$U = \frac{1}{2}(c_1 + c_2) = \frac{1}{2}\{F(\xi_1) + F(\xi_2)\}, \tag{2.41}$$

где ξ_1 и ξ_2 — значения ξ на сторонах разрыва. Поскольку ρ и c связаны линейным соотношением, из сохранения ρ следует сохранение c , т. е. на решениях $\int c \, dx$ сохраняется. Следовательно, для этого частного случая построение для (ρ, x) -кривой, приведенное на рис. 2.8, применимо равным образом и к (c, x) -кривой.

Для дальнейших ссылок стоит отметить, что это решение, записанное через c , удовлетворяет уравнению

$$c_t + cc_x = 0, \tag{2.42}$$

а соответствующие слабые решения удовлетворяют закону сохранения

$$c_t + (c^2/2)_x = 0, \tag{2.43}$$

так что условие на разрыве имеет вид

$$U = \frac{c_2^2/2 - c_1^2/2}{c_2 - c_1} = \frac{1}{2}(c_1 + c_2). \quad (2.44)$$

Уравнение (2.42) справедливо для случая произвольной зависимости $Q(\rho)$, поскольку оно получается умножением на $c'(\rho)$ уравнения $\rho_t + c(\rho)\rho_x = 0$; результат (2.44) всегда является одним

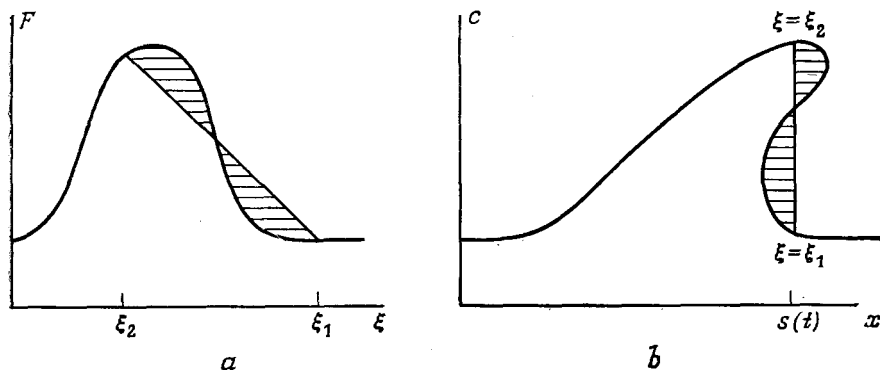


Рис. 2.9. Построение областей равной площади: a — для исходного профиля, b — для трансформированного опрокидывающегося профиля.

из возможных слабых решений, но этот выбор *правильен* лишь тогда, когда $Q(\rho)$ — квадратичная функция или аппроксимируется квадратичной функцией, поскольку только в этом случае интегральный аналог равенства (2.43) сохраняется при переходе через разрыв.

Построение разрыва можно теперь вести параллельно с построением непрерывного решения (2.40). Поскольку теперь мы работаем с c , не нужно делать усложняющего дело различия между случаями $c'(\rho) > 0$ и $c'(\rho) < 0$. Согласно (2.40), решение в момент времени t получается из исходного профиля $c = F(\xi)$ сдвигом каждой точки вправо на расстояние $F(\xi)t$, как показано на рис. 2.9. Разрыв вырезает часть, соответствующую отрезку $\xi_2 \geq \xi \geq \xi_1$. Если линию разрыва на рис. 2.9, b также отобразить обратно на рис. 2.9, a , то она перейдет в отрезок хорды, соединяющий точки кривой $F(\xi)$ с $\xi = \xi_1$ и $\xi = \xi_2$. Далее, поскольку площади при таком отображении сохраняются, свойство равных площадей остается справедливым и для рис. 2.9, a ; площади областей, ограниченных кривой F и отрезками хорды, равны между собой. Таким образом, разрыв можно полностью найти по заданной кривой $F(\xi)$, построив все хорды со свойством равных площадей. Точки $\xi = \xi_1$, $\xi = \xi_2$, лежащие на концах такой хорды, отвечают характеристикам, пересекающимся в точке разрыва.

ва. Соответствующая (x, t) -плоскость изображена на рис. 2.10. Аналитически свойство равных площадей можно выразить следующим образом:

$$\frac{1}{2} \{F(\xi_1) + F(\xi_2)\} (\xi_1 - \xi_2) = \int_{\xi_2}^{\xi_1} F(\xi) d\xi, \quad (2.45)$$

поскольку левая часть равна площади, ограниченной сверху хордой, а правая — площади, ограниченной сверху кривой F . Если разрыв в момент времени t находится в точке $x = s(t)$, то имеем также

$$s(t) = \xi_1 + F(\xi_1) t, \quad (2.46)$$

$$s(t) = \xi_2 + F(\xi_2) t, \quad (2.47)$$

что следует из второго из равенств (2.40). Три уравнения (2.45) — (2.47) определяют три функции $s(t)$, $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$. Функция $s(t)$

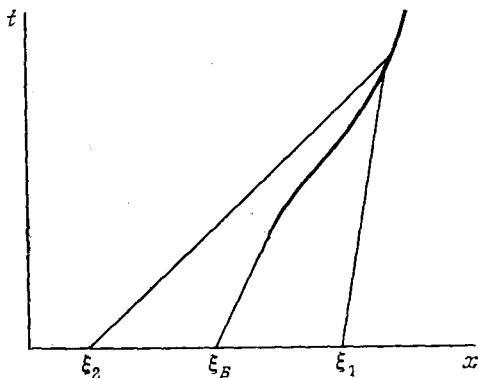


Рис. 2.10. (x, t) -диаграмма, соответствующая построению разрыва на рис. 2.9.

находится с помощью функций $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$, которые определяют характеристики, пересекающиеся в точке разрыва в момент времени t . Значения s на двух сторонах разрыва равны $s_1 = F(\xi_1)$ и $s_2 = F(\xi_2)$; значения ρ находятся по значениям s .

Поскольку равенства (2.45) — (2.47), определяющие положение разрыва, получены геометрически, интересно проверить непосредственно, что они действительно удовлетворяют условию (2.41) на разрыве. Эту проверку можно провести как независимый вывод равенства (2.45). Нам надо найти три функции $s(t)$, $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$, удовлетворяющие равенствам (2.46), (2.47) и условию

$$\dot{s}(t) = \frac{1}{2} \{F(\xi_1) + F(\xi_2)\} \quad (2.48)$$

(точка означает дифференцирование по t). Из (2.46) и (2.47) имеем

$$t = -\frac{\xi_1 - \xi_2}{F(\xi_1) - F(\xi_2)} \quad (2.49)$$

и

$$\dot{s}(t) = \{1 + tF'(\xi_1)\} \dot{\xi}_1 + F(\xi_1),$$

$$\dot{s}(t) = \{1 + tF'(\xi_2)\} \dot{\xi}_2 + F(\xi_2).$$

Взяв для сохранения симметрии среднее арифметическое двух последних выражений для $\dot{s}$, подставив для t выражение (2.49) и затем подставив результат в (2.48), получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \{F'(\xi_1) \dot{\xi}_1 + F'(\xi_2) \dot{\xi}_2\} (\xi_1 - \xi_2) + \\ + \frac{1}{2} \{F(\xi_1) + F(\xi_2)\} (\dot{\xi}_1 - \dot{\xi}_2) = F(\xi_1) \dot{\xi}_1 - F(\xi_2) \dot{\xi}_2. \end{aligned}$$

Проинтегрировав это выражение, получим равенство (2.45); постоянную интегрирования можно опустить, поскольку начальная точка разрыва $\xi_1 = \xi_2$ должна быть решением.

Выражение (2.49) для t можно использовать для исследования развития разрыва. Поскольку $t > 0$, все интересующие нас хорды на рис. 2.9, *a* должны иметь отрицательный наклон. Так как, согласно выбору обозначений, $\xi_1 > \xi_2$, имеем $F(\xi_2) > F(\xi_1)$, т. е. $c_2 > c_1$, как и следует из условия опрокидывания. Самое раннее время возникновения разрыва соответствует самой крутой хорде. Этому отвечает предельный случай, когда хорда является касательной в точке перегиба, скажем $\xi = \xi_B$. В этом случае $F(\xi_1) = F(\xi_2)$, так что разрыв начинается с нулевого скачка и в момент времени

$$t_B = -\frac{1}{F'(\xi_B)}.$$

Этот результат полностью совпадает с выведенным ранее условием (2.8) для точки первого опрокидывания. Для кривой F показанного на рис. 2.9, *a* вида при $t \rightarrow \infty$ хорды стремятся к горизонталям, при этом $F(\xi_2) - F(\xi_1) \rightarrow 0$, откуда $c_2 - c_1 \rightarrow 0$, так что при $t \rightarrow \infty$ разрыв стремится к нулю.

Одиночный горб

Для подробного изучения разрыва предположим сначала, что $F(\xi)$ равна некоторой постоянной c_0 вне интервала $0 < \xi < L$ и $F(\xi) > c_0$ в этом интервале. Уравнение (2.45) можно переписать в виде

$$\frac{1}{2} \{F(\xi_1) + F(\xi_2) - 2c_0\} (\xi_1 - \xi_2) = \int_{\xi_2}^{\xi_1} \{F(\xi) - c_0\} d\xi.$$

С ростом времени ξ_1 возрастает и в какой-то момент превосходит L . На этой стадии $F(\xi_1) = c_0$ и разрыв движется в область, где $c = c_0$. Функцию $\xi_1(t)$ можно исключить, поскольку теперь

$$\frac{1}{2} \{F(\xi_2) - c_0\} (\xi_1 - \xi_2) = \int_{\xi_2}^L \{F(\xi) - c_0\} d\xi,$$

$$t = \frac{\xi_1 - \xi_2}{F(\xi_2) - c_0}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2} \{F(\xi_2) - c_0\}^2 t = \int_{\xi_2}^L \{F(\xi) - c_0\} d\xi.$$

На этой стадии положение разрыва и значение c сразу за разрывом даются равенствами

$$\begin{aligned} s(t) &= \xi_2 + F(\xi_2)t, \\ c &= F(\xi_2), \end{aligned} \quad (2.50)$$

где $\xi_2(t)$ удовлетворяет соотношению

$$\frac{1}{2} \{F(\xi_2) - c_0\}^2 t = \int_{\xi_2}^L \{F(\xi) - c_0\} d\xi.$$

Если $t \rightarrow \infty$, то $\xi_2 \rightarrow 0$ и $F(\xi_2) \rightarrow c_0$; при этом уравнение для $\xi_2(t)$ принимает предельный вид

$$\frac{1}{2} \{F(\xi_2) - c_0\}^2 t \sim A,$$

где

$$A = \int_0^L \{F(\xi) - c_0\} d\xi$$

— площадь горба над невозмущенным уровнем c_0 . Таким образом, при $\xi_2 \rightarrow 0$ мы имеем $F(\xi_2) \sim c_0 + \sqrt{2A/t}$. Поэтому выражения (2.50) переходят в следующие асимптотические формулы для $s(t)$ и c :

$$\begin{aligned} s &\sim c_0 t + \sqrt{2At}, \\ c - c_0 &\sim \sqrt{2A/t}. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Линия разрыва асимптотически приближается к параболе, а величина разрыва, равная $(c - c_0)/c_0$, стремится к нулю как $t^{-1/2}$.

Решение за разрывом дается равенствами (2.40), где $0 < \xi < \xi_2$. Так как $\xi_2 \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, все интересующие нас зна-

чения ξ также стремятся к нулю и асимптотическое выражение имеет вид

$$c \sim \frac{x}{t}, \quad c_0 t < x < c_0 t + \sqrt{2At}. \quad (2.52)$$

Это асимптотическое решение и соответствующая (x, t) -диаграмма

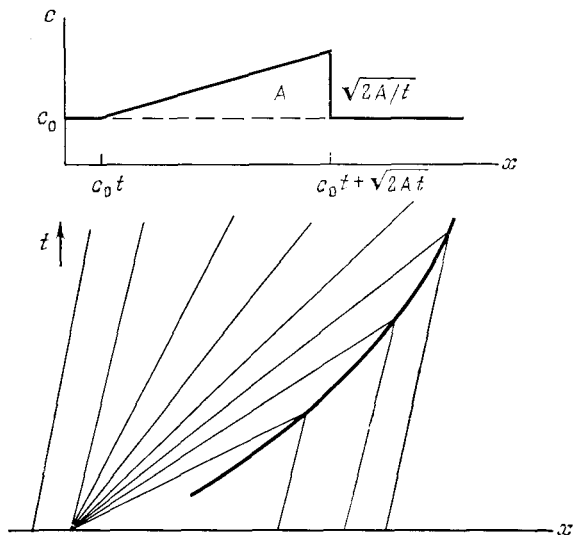


Рис. 2.11. Асимптотическая форма треугольной волны.

приведены на рис. 2.11. Отметим, что все детали начального профиля утеряны, в асимптотическом решении фигурирует только

$$\text{величина } A = \int_0^L \{F(\xi) - c_0\} d\xi.$$

N-волна

Аналогичным образом можно рассматривать и некоторые другие задачи. Важным примером является случай, когда $F(\xi)$ имеет положительную и отрицательную фазы относительно невозмущенного значения c_0 , как показано на рис. 2.12. В этом случае существуют два разрыва, соответствующие двум областям сжатия — спереди и сзади, где $F'(\xi) < 0$. Семейства хорд для каждого разрыва изображены на рисунке. При $t \rightarrow \infty$ пара (ξ_2, ξ_1) стремится для переднего разрыва к $(0, \infty)$, а для заднего разрыва к $(-\infty, 0)$. Асимптотически передний разрыв определяется так:

$$s \sim c_0 t + \sqrt{2At},$$

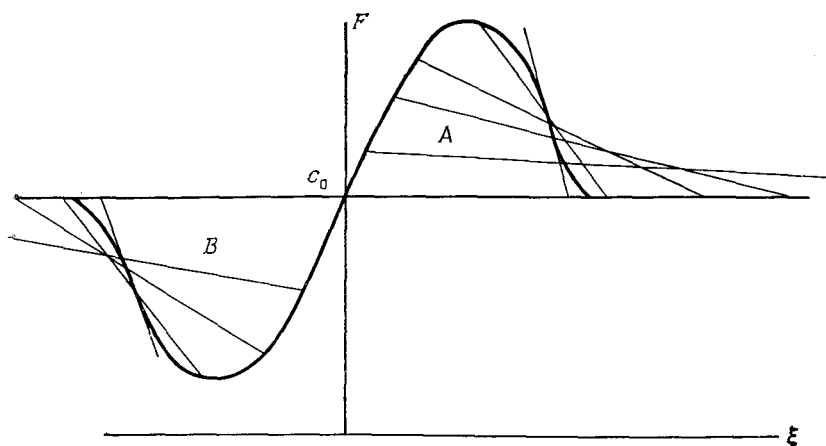


Рис. 2.12. Построение разрывов для N -волны.

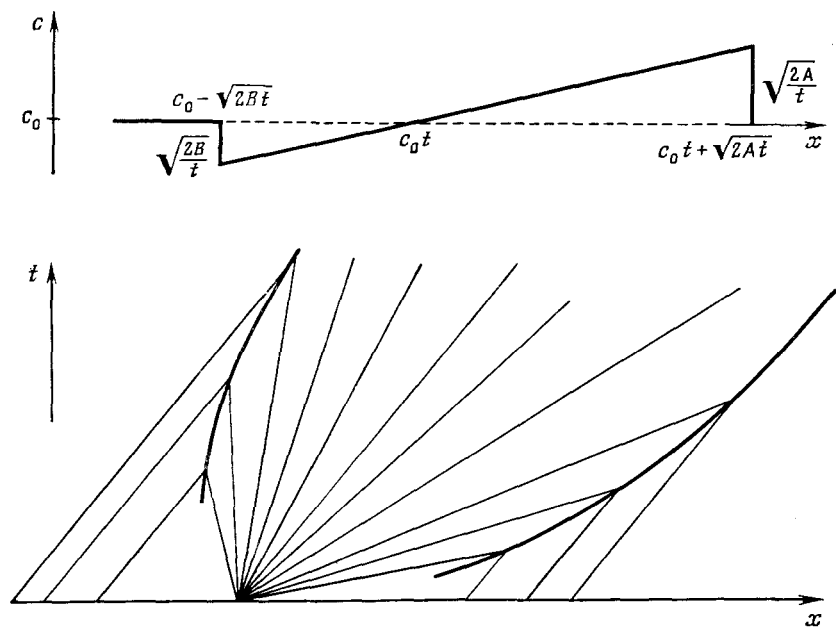


Рис. 2.13. Асимптотическая форма N -волны.

а его величина — так:

$$c - c_0 \sim \sqrt{2A/t},$$

где A — площадь области, расположенной ниже кривой F и выше прямой $c = c_0$. Задний разрыв определяется соотношениями

$$s \sim c_0 t - \sqrt{2Bt},$$

$$c - c_0 \sim -\sqrt{2B/t},$$

где B — площадь области, расположенной выше кривой F и ниже прямой $c = c_0$. Между разрывами решение асимптотически снова представляется так:

$$c \sim \frac{x}{t}, \quad c_0 t - \sqrt{2Bt} < x < c_0 t + \sqrt{2At}. \quad (2.53)$$

Асимптотическая форма N -волны и соответствующая (x, t) -диаграмма приведены на рис. 2.13. Очертания этого профиля напоминают букву N ; этим и обусловлено название N -волны.

Периодическая волна

Другой интересный случай — начальный профиль вида

$$c = F(\xi) = c_0 + a \sin(2\pi\xi/\lambda). \quad (2.54)$$

В этом случае уравнения (2.45) — (2.47) для разрыва значительно

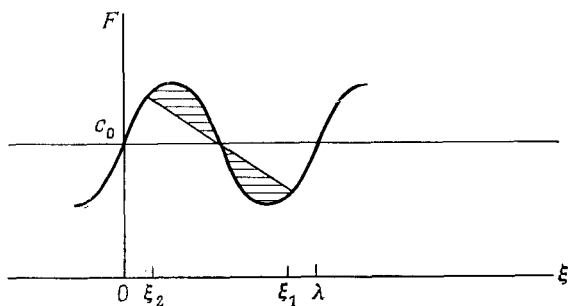


Рис. 2.14. Построение разрыва для периодической волны.

упрощаются при всех t . Рассмотрим один период $0 < \xi < \lambda$, как это сделано на рис. 2.14. Соотношение (2.45) принимает вид

$$\begin{aligned} (\xi_1 - \xi_2) \sin \frac{\pi}{\lambda} (\xi_1 + \xi_2) \cos \frac{\pi}{\lambda} (\xi_1 - \xi_2) = \\ = \frac{\lambda}{\pi} \sin \frac{\pi}{\lambda} (\xi_1 - \xi_2) \sin \frac{\pi}{\lambda} (\xi_1 + \xi_2), \end{aligned}$$

и единственное подходящее решение — это тривиальное решение

$$\sin \frac{\pi(\xi_1 + \xi_2)}{\lambda} = 0, \quad \text{т. е. } \xi_1 + \xi_2 = \lambda.$$

Вычитая и складывая равенства (2.46) и (2.47), получаем

$$t = \frac{\xi_1 - \xi_2}{2a \sin[(\pi/\lambda)(\xi_1 - \xi_2)]},$$

$$s = c_0 t + \frac{\lambda}{2}$$

соответственно. Изменение c на разрыве равно

$$c_2 - c_1 = a \sin \frac{2\pi\xi_1}{\lambda} - a \sin \frac{2\pi\xi_2}{\lambda} = 2a \sin \frac{\pi}{\lambda} (\xi_1 - \xi_2).$$

Положим

$$\xi_1 - \xi_2 = \frac{\lambda\theta}{\pi}, \quad \xi_1 + \xi_2 = \lambda;$$

тогда

$$t = \frac{\lambda}{2\pi a} \frac{\theta}{\sin \theta},$$

$$s = c_0 t + \frac{\lambda}{2}, \quad (2.55)$$

$$\frac{c_2 - c_1}{c_0} = \frac{2a}{c_0} \sin \theta.$$

Разрыв имеет постоянную скорость c_0 , и этот результат можно было бы получить заранее из симметрии задачи. Разрыв начинается

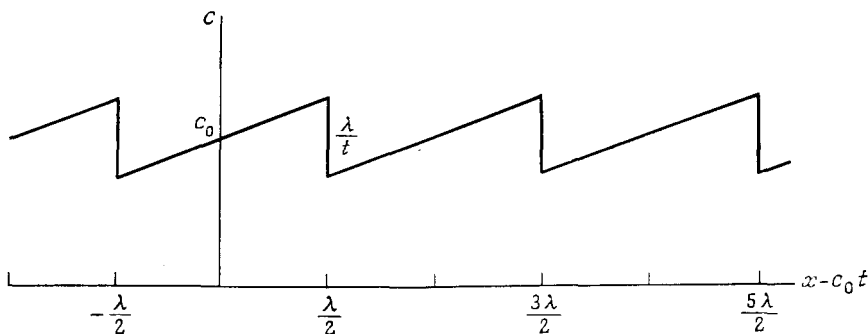


Рис. 2.15. Асимптотическая форма периодической волны.

с нулевой величины, соответствующей $\theta = 0$, в момент $t = \lambda/(2\pi a)$. Он достигает максимального значения $2a/c_0$ при $\theta = \pi/2$, $t = \lambda/(4a)$ и, наконец, затухает при $\theta \rightarrow \pi$, $t \rightarrow \infty$,

$$\frac{c_2 - c_1}{c_0} \sim \frac{\lambda}{c_0 t}. \quad (2.56)$$

Интересно, что эта асимптотическая формула не содержит амплитуду a в явном виде. Однако она применима лишь при условии $t \gg \lambda/a$. Для любой периодической функции $F(\xi)$, синусоидальной или нет, $\xi_1 - \xi_2 \rightarrow \lambda$ при $t \rightarrow \infty$; отсюда, в силу (2.49),

$$\frac{c_2 - c_1}{c_0} = \frac{F(\xi_2) - F(\xi_1)}{c_0} \sim \frac{\lambda}{c_0 t}.$$

Между двумя соседними разрывами решение для s является линейной по x функцией с наклоном $1/t$, как и раньше, и асимптотический профиль имеет пилообразную форму; см. рис. 2.15.

Слияние разрывов

Если возникло несколько ударных волн, то, вообще говоря, одна из них может догнать идущую впереди. В этом случае они объединяются и продолжают двигаться как единая ударная волна. Данный процесс также описывается нашим разрывным решением. Рассмотрим кривую F на рис. 2.16. Возникли два разрыва, соответствующие точкам перегиба P и Q с семействами хорд, отсекающих равные площади, таких, как P_1P_2 и Q_1Q_2 . Со временем точки Q_1 и P_2 сближаются, пока, наконец, не наступает момент, изображенный на рис. 2.16, b , когда общая хорда отсекает от обоих горбов области с равными площадями. В этот момент характеристики, соответствующие точкам P'_2 и Q'_1 , совпадают и, следовательно, разрывы сливаются в один, как это показано на (x, t) -диаграмме (рис. 2.17).

Все характеристики, проходящие между Q'_2 и P'_1 , теперь поглощены тем или другим разрывом; двигаться продолжает единый разрыв, определяемый хордами вида $P'_1Q''_2$ (рис. 2.16, c), для которых принимаются в расчет только суммарные площади, лежащие выше хорды и ниже ее.

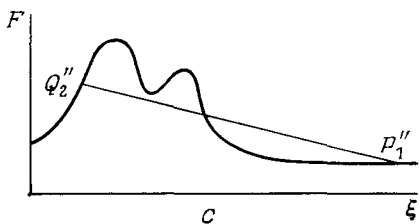
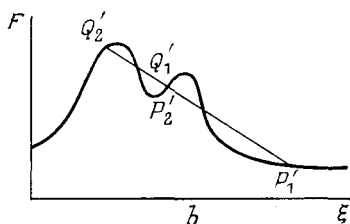
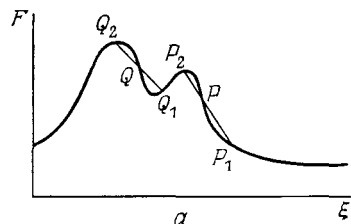


Рис. 2.16. Построение сливающихся разрывов.

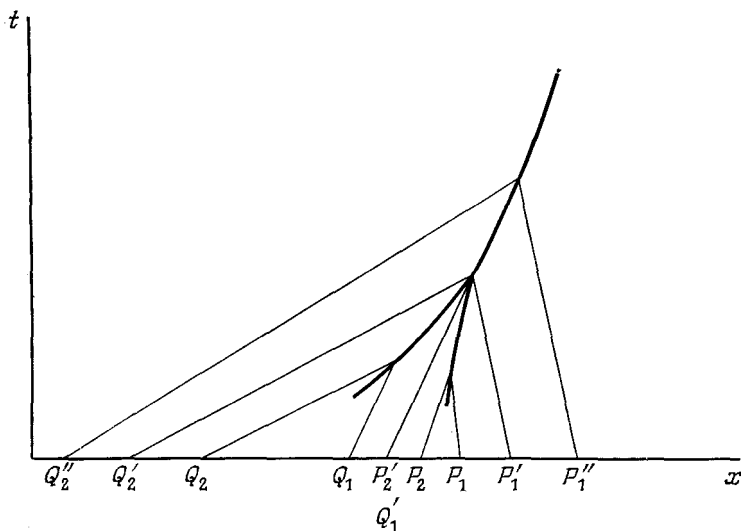


Рис. 2.17. (x, t) -диаграмма для сливающихся разрывов, изображенных на рис. 2.16.

2.9. Построение разрывов; произвольная функция $Q(\rho)$

В случае произвольной зависимости q от ρ можно вывести аналитические формулы, определяющие разрыв и аналогичные равенствам (2.45) — (2.47). Усложнение связано с нелинейностью зависимости s от ρ , в силу чего построение, приведенное на рис. 2.8, справедливо для ρ , но не для s . Следовательно, приходится работать с ρ . Но если в этом случае построить (ρ, x) -кривые, такие же, как на рис. 2.9, то линии разрыва не перейдут в прямолинейные хорды, поскольку сдвиг будет пропорционален s , а не ρ . Поэтому отображение на начальный профиль не дает каких-либо преимуществ.

Однако можно поступить следующим образом. Введем функцию $\xi(\rho)$, обратную функции

$$\rho = f(\xi),$$

а также функцию $X(\rho, t)$, обратную многозначному решению $\rho = \rho(x, t)$. Иначе говоря, мы фиксируем некоторое конкретное значение ρ и отметим его координату $X(\rho, t)$ в данный момент и его координату $\xi(\rho)$ в начальный момент. Из уравнения харак-

теристик имеем

$$X(\rho, t) = c(\rho) t + \xi(\rho). \quad (2.57)$$

Рассмотрим разрыв в точке $s(t)$ и обозначим через ρ_1 и ρ_2 значения ρ перед разрывом и за ним соответственно. Построение равных площадей на рис. 2.8 можно записать соотношением

$$\int_{\rho_2}^{\rho_1} X(\rho, t) d\rho = (\rho_1 - \rho_2) s(t).$$

(Это верно в любом из случаев $c'(\rho) \geq 0$. Мы всегда обозначаем через ρ_1 значение перед разрывом, а через ρ_2 — значение за разрывом. Если $c'(\rho) > 0$, то $\rho_2 > \rho_1$; если $c'(\rho) < 0$, то $\rho_2 < \rho_1$.) Отсюда, в силу (2.57),

$$\int_{\rho_2}^{\rho_1} \{c(\rho) t + \xi(\rho)\} d\rho = (\rho_1 - \rho_2) s(t).$$

Поскольку $c(\rho) = Q'(\rho)$, это равенство принимает вид

$$(q_1 - q_2) t - (\rho_1 - \rho_2) s(t) = - \int_{\rho_2}^{\rho_1} \xi(\rho) d\rho. \quad (2.58)$$

Интегрируя выражение справа по частям, получаем

$$-\rho_1 \xi_1 + \rho_2 \xi_2 + \int_{\xi_2}^{\xi_1} \rho(\xi) d\xi. \quad \bullet$$

Положение разрыва $s(t)$ определяется уравнениями

$$\begin{aligned} s(t) &= \xi_1 + c_1 t, \\ s(t) &= \xi_2 + c_2 t; \end{aligned} \quad (2.59)$$

можно разрешить их относительно $s(t)$ и t и подставить полученные результаты в равенство (2.58). Окончательно (2.58) примет вид

$$\{(q_2 - q_1) - (\rho_2 c_2 - \rho_1 c_1)\} \frac{\xi_1 - \xi_2}{c_1 - c_2} = \int_{\xi_2}^{\xi_1} \rho d\xi, \quad (2.60)$$

где ρ , q и c вычисляются как функции от ξ по формулам

$$\rho = f(\xi), \quad q = Q(f(\xi)), \quad c = Q'(f(\xi)), \quad (2.61)$$

а индексы обозначают значения соответствующих величин при $\xi = \xi_1$ и $\xi = \xi_2$. (Это несколько проще, чем использовать $f(\xi)$ вместо ρ , $Q(\xi)$ вместо c и ввести новый символ для q как функции от ξ .) Уравнения (2.59) и (2.60) дают три соотношения, определяющие $s(t)$, $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$. Непосредственным диффе-

ренцированием снова можно проверить, что выполняется условие на разрыве

$$\dot{s} = \frac{q_2 - q_1}{\rho_2 - \rho_1}.$$

Если q — квадратичная функция от ρ , то легко проверить, что уравнение (2.60) сводится к уравнению (2.45). Случаи, подобные одиночному горбу и N -волне, исследуются так же, как и ранее, причем получаются качественно аналогичные результаты. Асимптотические формулы (2.51), (2.52) и (2.53) остаются справедливыми, но принимается

$$A = c'(\rho_0) \int_0^L (\rho - \rho_0) d\xi$$

и аналогичное выражение для B . Формулы для ρ можно вывести из соответствующих равенств для c , поскольку в асимптотическом пределе возмущение мало и $\rho - \rho_0 = (c - c_0)/c'(\rho_0)$ с точностью до членов первого порядка.

2.10. Замечание о линеаризованной теории

Когда возмущения малы, нелинейные уравнения часто линеаризуются за счет пренебрежения всеми членами порядка выше первого по степеням возмущения. Для слабых возмущений $c - c_0/c_0 \ll 1$ уравнение

$$c_t + cc_x = 0$$

после линеаризации переходит в

$$c_t + c_0 c_x = 0.$$

Как уже было указано выше, решение этого уравнения имеет вид $c - c_0 = f(x - c_0 t)$. Эффект опрокидывания и образование разрывов полностью отсутствуют, однако, как показывают рис. 2.11, 2.13, и 2.15, для достаточно больших значений времени, эти эффекты становятся определяющими, *сколько бы слабым ни было начальное возмущение*. Из сравнения этих результатов следует, что линеаризованное приближение не может быть равномерным при $t \rightarrow \infty$.

Это можно установить и непосредственно, считая, что линейная теория учитывает только первые члены формальных разложений по степеням малого параметра. Пусть ε характеризует наибольшее начальное значение возмущения $(c - c_0)/c_0$, и пусть решение ищется в виде

$$c = c_0 + \varepsilon c_1(x, t) + \varepsilon^2 c_2(x, t) + \dots$$

Подставив это разложение в уравнение $c_t + cc_x = 0$ и приравняв нулю коэффициенты при ε^n , получим цепочку уравнений, начинающуюся уравнениями

$$\begin{aligned}c_{1t} + c_0 c_{1x} &= 0, \\c_{2t} + c_0 c_{2x} &= -c_1 c_{1x}, \\c_{3t} + c_0 c_{3x} &= -c_2 c_{1x} - c_1 c_{2x}.\end{aligned}$$

Эти уравнения легко решаются последовательно, поскольку на каждом шаге имеем уравнение вида

$$\Phi_t + c_0 \Phi_x = \Phi(x, t),$$

где Φ — функция, найденная на предыдущем шаге. Введя характеристическую координату $y = x - c_0 t$, последнее уравнение можно записать так:

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)_{y=\text{const}} = \Phi(y + c_0 t, t);$$

следовательно,

$$\Phi = \int_0^t \Phi(y + c_0 \tau, \tau) d\tau + \Psi_1(y).$$

Для c можно принять начальное условие

$$c = c_0 + \varepsilon P(x) \text{ при } t = 0$$

и положить

$$c_1 = P(x), \quad c_n = 0 \quad (n > 1) \text{ при } t = 0.$$

В этом случае дополнительные функции $\Psi(y)$ равны нулю для решений c_n , $n > 1$. Первые три функции c_n имеют вид

$$\begin{aligned}c_1 &= P(y), \\c_2 &= -tP(y)P'(y), \\c_3 &= \frac{t^2}{2}(P^2P')'.\end{aligned}$$

Ясно, что в общем случае c_n содержит член вида $t^{n-1}R_n(y)$. Следовательно, последовательные члены предполагаемого ряда для c имеют порядок $\varepsilon^n t^{n-1}$ и ряд не может сходиться равномерно при $t \rightarrow \infty$.

Недостаток линеаризованной теории, отчетливо проявляющийся при нахождении членов высших порядков, заключается в том, что она аппроксимирует характеристики семейством прямых $x - c_0 t = \text{const}$. Незначительные отклонения истинных характеристик друг от друга приводят к большим смещениям при $t \rightarrow \infty$. Правильное решение можно записать в виде телескопической

функции

$$\begin{aligned} c &= c_0 + \varepsilon P(x - ct) = \\ &= c_0 + \varepsilon P(x - [c_0 + \varepsilon P]t) \end{aligned}$$

и т. д. Используя формальное разложение в ряд Тейлора, можно теперь получить разложение решения в ряд по степеням возмущения.

2.11. Задача с краевым условием; распространение сигнала

Мы подробно исследовали решение задачи Коши. Другие граничные задачи решаются аналогичным образом. Из уравнений (2.4) ясно, что решение определено, если значения ρ заданы на какой-либо кривой, пересекающей каждую характеристику один раз.

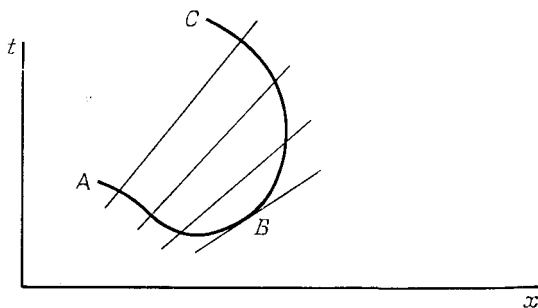


Рис. 2.18. Характеристики и начальные данные.

Такие граничные значения дают начальные условия, необходимые для интегрирования уравнений (2.4) вдоль характеристик. Проведя такое интегрирование вдоль каждой характеристики, пересекающейся с заданной граничной кривой, в принципе можно построить решение во всей области, покрываемой этими характеристиками. Если граничная кривая пересекает некоторые характеристики дважды, как, например, кривая ABC на рис. 2.18, то начальные данные следует задавать только на дуге AB или BC ; в противном случае интегрирование, начинающееся, скажем, на дуге AB , приведет к противоречию с данными на дуге BC . Трудность заключается в том, что характеристики зависят от решения, и, вообще говоря, заранее нельзя ни найти область, покрываемую характеристиками, ни проверить непротиворечивость краевых условий.

Типичной граничной задачей является так называемая задача о распространении сигнала, для которой

$$\rho = \rho_0 \text{ при } x > 0, t = 0,$$

$$\rho = g(t) \text{ при } t > 0, x = 0,$$

и решение ищется в области $x > 0, t > 0$. Конечно, такая задача возникает только в случае $c = Q'(\rho) > 0$. На рис. 2.19 построена

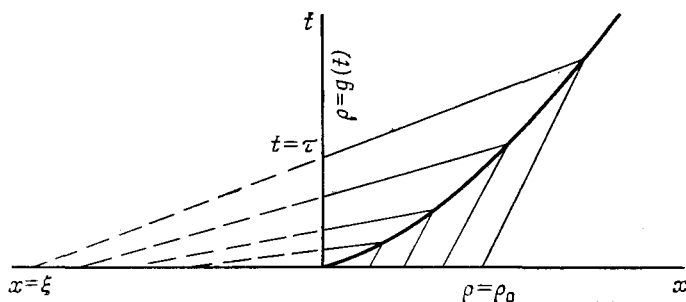


Рис. 2.19. (x, t) -диаграмма для задачи о распространении сигнала.

соответствующая (x, t) -диаграмма. Характеристики начинаются на положительной полуоси x и на положительной полуоси t . Для характеристик, начинающихся на оси x , имеем $\rho = \rho_0$, $c = c(\rho_0) = c_0$; поэтому они представляют собой прямые $x - c_0 t = \text{const}$. Отсюда следует, что

$$\rho = \rho_0, \quad c = c_0 \text{ при } x > c_0 t. \quad (2.62)$$

Обратимся к характеристикам, начинающимся на оси t , и предположим, что какая-либо из них начинается в точке $t = \tau$; тогда

$$\begin{aligned} \rho &= g(\tau), \\ x &= G(\tau)(t - \tau), \end{aligned} \quad (2.63)$$

где $G(\tau) = c\{g(\tau)\}$. Приведенные равенства неявно определяют решение через $\tau(x, t)$.

Это решение можно связать с решением задачи Коши двумя способами. Первый из них основан на том, что рассматриваемое решение совпадает с решением задачи Коши, если

$$\xi = -\tau G(\tau), \quad f(\xi) = g(\tau), \quad F(\xi) = G(\tau). \quad (2.64)$$

Это соответствует продолжению характеристик через точки $t = \tau, x = 0$ до оси x и обозначению точек пересечения через $x = \xi$. При этом задача о распространении сигнала формулируется как задача Коши. Другой способ состоит в том, что переменные x и t , а также

q и ρ меняются ролями ¹⁾; при этом в формулах вместо $dq/d\rho = c$ появится $d\rho/dq = 1/c$.

Каждую область многозначности в решении (2.63) следует заменить разрывом. Если $G(+0) > c_0$, такая область возникает мгновенно, поскольку первая характеристика $x = tG(+0)$ возмущенной области находится впереди последней характеристики $x = c_0 t$ невозмущенной области. В этом случае разрыв ненулевой величины возникает в начале координат. Параметры разрыва можно определить при помощи соответствующей задачи Коши или используя описанные выше способы, или независимым образом. Если характеристики $\tau_1(t)$ и $\tau_2(t)$ пересекаются на разрыве в момент времени t , то из (2.63) получаем

$$\begin{aligned} s(t) &= (t - \tau_1)c_1, & c_1 &= G(\tau_1), \\ s(t) &= (t - \tau_2)c_2, & c_2 &= G(\tau_2). \end{aligned} \quad (2.65)$$

и формула, соответствующая формуле (2.60), имеет вид

$$\{(q_2 - \rho_2 c_2)c_1 - (q_1 - \rho_1 c_1)c_2\} \frac{\tau_2 - \tau_1}{c_2 - c_1} = - \int_{\tau_1}^{\tau_2} q(\tau) d\tau. \quad (2.66)$$

Уравнения (2.65) и (2.66) дают три условия, определяющие функции $\tau_1(t)$, $\tau_2(t)$ и $s(t)$. Наиболее важен случай, когда передний разрыв образуется в начале координат (т. е. когда $G(+0) > c_0$) и перемещается в невозмущенную область. В этом случае $\rho_1 = \rho_0$, $c_1 = c_0$, $q_1 = q_0$ и из равенств (2.65) и (2.66) можно исключить величину τ_1 . Опуская индекс 2, запишем условие (2.66) на разрыве в виде

$$\{(q - q_0) - (\rho - \rho_0)c\}(t - \tau) = - \int_0^{\tau} \{q(\tau') - q_0\} d\tau'. \quad (2.67)$$

Здесь ρ , q и c — функции τ , определяемые равенствами

$$\rho = g(\tau), \quad q = Q(g(\tau)), \quad c = Q'(g(\tau));$$

все эти функции связаны между собой известным образом, и если одна из них задана как функция от τ , то для других получаются явные выражения. Уравнения (2.63) определяют решение в возмущенной области за разрывом; равенство (2.67) определяет величину $\tau(t)$ в точке разрыва; подставив эту величину в уравнения (2.63), найдем как местонахождение разрыва, так и значение ρ сразу за ним.

В начале движения разрыва значение $\tau(t)$ в (2.67) мало и

$$\{(q_i - q_0) - (\rho_i - \rho_0)c_i\}(t - \tau) = - (q_i - q_0)\tau + Q(\tau^2),$$

¹⁾ В этом случае «начальные данные» на прямой $x=0$ при $t < 0$ принимают вид $\rho(0, t) = \rho_0$. — Прим. ред.

где ρ_i , q_i и c_i — начальные значения при $x = 0$, т. е. $\rho_i = g(+0)$ и т. д. Следовательно,

$$\tau = \left\{ 1 - \frac{q_i - q_0}{(\rho_i - \rho_0) c_i} \right\} t + O(t^2).$$

Из (2.63) находим точку разрыва

$$x = (t - \tau) c_i + O(t^2) = \frac{q_i - q_0}{\rho_i - \rho_0} t + O(t^2).$$

Разрыв начинает движение со скоростью $(q_i - q_0)/(\rho_i - \rho_0)$; этот результат можно получить и непосредственно из условия на разрыве. Если $g(\tau)$ остается постоянной и равна ρ_i , то это верно для всех t и решение имеет разрыв, распространяющийся с постоянной скоростью и разделяющий две однородные области с $\rho = \rho_0$ и $\rho = \rho_i$.

Если $g(\tau)$ переходит в ρ_0 , то разрыв неизбежно исчезает. Для единственной положительной фазы $g(\tau)$, переходящей в ρ_0 при $\tau = T$, асимптотическое поведение описывается соотношением (2.67) при $\tau \rightarrow T$, $t \rightarrow \infty$, $\rho \rightarrow \rho_0$. В этом пределе (2.67) принимает вид

$$\frac{1}{2} c'(\rho_0) (\rho - \rho_0)^2 t \sim \int_0^T \{q(\tau') - q_0\} d\tau',$$

и выражение в (2.63), определяющее положение точки разрыва, переходит в

$$x \sim c_0 t + c'(\rho_0)(\rho - \rho_0) t.$$

Следовательно, в точке разрыва

$$\begin{aligned} \rho - \rho_0 &\sim \frac{1}{c'(\rho_0)} \sqrt{\frac{2A}{t}}, \quad c - c_0 \sim \sqrt{\frac{2A}{t}}, \\ x &\sim c_0 t + \sqrt{2At}, \end{aligned} \quad (2.68)$$

где

$$A = c'(\rho_0) \int_0^T (q - q_0) d\tau.$$

В области за разрывом

$$\begin{aligned} c &\sim \frac{x}{t}, \quad c_0 t < x < c_0 t + \sqrt{2At}, \\ \rho - \rho_0 &\sim \frac{(c - c_0)}{c'(\rho_0)} \sim \frac{1}{c'(\rho_0)} \frac{x - c_0 t}{t}. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Эти результаты очень похожи на аналогичные результаты для задачи Коши. Таким же образом можно изучить и другие случаи. Если за положительной фазой следует отрицательная фаза, то существует

второй разрыв, асимптотическое поведение которого описывается соотношениями (2.68), где A заменено на соответствующий интеграл по отрицательной фазе и должным образом изменены знаки. В пределе получается N -волна, описываемая соотношениями (2.69), продолженными вплоть до второго разрыва.

2.12. Более общие квазилинейные уравнения

Общее квазилинейное уравнение первого порядка линейно по ρ_t и ρ_x , но может содержать свободный член. Коэффициенты при ρ_t , ρ_x и свободный член могут быть произвольными функциями переменных ρ , x и t . Если коэффициент при ρ_t отличен от нуля, то уравнение можно разделить на этот коэффициент и записать в виде

$$\rho_t + c\rho_x = b, \quad (2.70)$$

где b и c — функции переменных ρ , x и t . Решение такого уравнения опять можно свести к интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений вдоль характеристик, представив (2.70) в виде

$$\frac{d\rho}{dt} = b(\rho, x, t), \quad \frac{dx}{dt} = c(\rho, x, t). \quad (2.71)$$

В частности, задача с начальными условиями

$$\rho = f(x), \quad t = 0$$

решается интегрированием системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений (2.71) с начальными условиями

$$\rho = f(\xi), \quad x = \xi \quad \text{при } t = 0.$$

Каждому значению ξ сопоставляются характеристика, выходящая из точки $x = \xi$, и значение ρ на ней. Решение во всей области получается варьированием параметра ξ .

Когда $b \neq 0$, величина ρ не является постоянной вдоль характеристики и в общем случае характеристики не являются прямыми. Но метод решения по существу остается тем же самым. Волны снова могут опрокидываться, а характеристики в (x, t) -плоскости накладываться одна на другую. Снова можно устранить многозначность решения, введя соответствующие разрывы.

Существует несколько интересных случаев, связанных с опрокидыванием, и здесь мы рассмотрим два из них.

Затухающие волны

В качестве первого примера рассмотрим случай

$$c_t + cc_x + ac = 0, \quad (2.72)$$

где a — положительная постоянная. Запишем это уравнение в характеристическом виде

$$\frac{dc}{dt} = -ac, \quad \frac{dx}{dt} = c. \quad (2.73)$$

Если рассматривать задачу Коши, то первое уравнение можно проинтегрировать:

$$c = e^{-at} f(\xi). \quad (2.74)$$

Тогда второе уравнение принимает вид

$$\frac{dx}{dt} = e^{-at} f(\xi),$$

причем $x = \xi$ при $t = 0$. Интегрируя, получаем

$$x = \xi + \frac{1 - e^{-at}}{a} f(\xi). \quad (2.75)$$

Нелинейность приводит к типичному искажению профиля волны, но одновременно волна затухает из-за наличия в уравнении свободного члена.

Рассмотрим теперь вопрос об опрокидывании. Его проще всего исследовать, выяснив, существует ли огибающая характеристических кривых (2.75). Такая огибающая удовлетворяет уравнению полученному дифференцированием (2.75) по параметру ξ :

$$0 = 1 + \frac{1 - e^{-at}}{a} f'(\xi). \quad (2.76)$$

Поскольку $a > 0$, $t > 0$, это равенство может выполняться тогда и только тогда, когда

$$f'(\xi) < -a. \quad (2.77)$$

Таким образом, опрокидывание происходит в том и только том случае, когда начальный профиль имеет достаточно большую отрицательную крутизну; если же волна сжатия недостаточно крута, то затухание может предотвратить опрокидывание.

Хотя соответствующие уравнения сложнее, чем только что рассмотренные (см. гл. 3), неравенства такого типа определяют, окажется ли приливная волна, распространяющаяся вверх по реке, достаточно мощной для опрокидывания и образования боры или трение возьмет верх. В большинстве рек доминируют эффекты трения. Однако некоторые знаменитые реки, на которых образуется бора, имеют в устье приливные волны (дополнительно

усиливающиеся за счет резкого сужения русла), достаточно высокие для того, чтобы преодолеть различные эффекты трения. Теория этого явления обсуждалась и применялась Абботтом [1]; мы вернемся к ней в § 5.7.

Волны от движущегося источника

Если в уравнении (2.70) свободный член b не зависит от ρ , то его можно рассматривать как внешний источник. Особенно интересен случай, когда этот источник движется с постоянной скоростью V . Недавно рассмотрен пример в более сложной области магнитной газовой динамики, где волны возбуждаются приложенной к жидкости движущейся силой (Хоффман [1]). В нашей простой модели можно рассмотреть некоторые качественные эффекты.

Пусть

$$b = B(x - Vt),$$

где V — постоянная, а $B(x)$ — некоторая положительная функция, быстро стремящаяся к нулю при $|x| \rightarrow \infty$. Будем считать, что при $t = 0$ величина ρ постоянна, $\rho = \rho_0$, и положим $c_0 = c(\rho_0)$. Возможны два существенно различных случая, отвечающих движению источника со сверхзвуковой скоростью $V > c_0$ и с дозвуковой скоростью $V < c_0$.

Оказывается, справедлив следующий удивительный результат: сверхзвуковой источник не обязательно приводит к образованию ударной волны, хотя это неизбежно для дозвукового источника. Это легко увидеть, рассмотрев решения со стационарным профилем вида

$$\rho = \rho(X), \quad X = x - Vt. \quad (2.78)$$

Поскольку мы все равно интересуемся только качественными эффектами, ограничимся частным случаем

$$c_t + cc_x = B(x - Vt). \quad (2.79)$$

Тогда для решения со стационарным профилем получаем

$$(c - V)c_X = B(X),$$

$$\frac{1}{2}(V - c)^2 - \frac{1}{2}(V - c_0)^2 = - \int_X^\infty B(y) dy.$$

В сверхзвуковом случае $V > c_0$ функция c равна

$$c = V - \left\{ (V - c_0)^2 - 2 \int_X^\infty B(y) dy \right\}^{1/2}. \quad (2.80)$$

Если

$$V - c_0 > \left\{ 2 \int_{-\infty}^{\infty} B(y) dy \right\}^{1/2}, \quad (2.81)$$

то равенство (2.80) определяет гладкую однозначную функцию и разрывы не возникают. Критерий (2.81) — неравенство, связывающее скорость $V - c_0$ и полную интенсивность источника

$$\int_{-\infty}^{\infty} B(y) dy.$$

Этот результат можно пояснить следующими рассуждениями. Если источник движется со сверхзвуковой скоростью, то ударная волна может двигаться вместе с ним лишь тогда, когда она достаточно сильна. Но если источник сравнительно маломощен, то сильная ударная волна не может возникнуть и не возникает.

Если неравенство (2.81) не выполняется, то волна (2.80) опрокидывается при $X \leq X_0$, где X_0 определяется из равенства

$$V - c_0 = \left\{ 2 \int_{X_0}^{\infty} B(y) dy \right\}^{1/2}.$$

При $X = X_0$ мы имеем $c = V$ и случайные возмущения начальных условий могут определять и действительно определяют поведение волны. Решение не может быть полным без тщательного учета этих возмущений. Аналогичным образом и в дозвуковом случае решение нельзя построить без учета возмущений. В обоих случаях обнаружено возникновение ударных волн. Этот вопрос был подробно рассмотрен ХOFFMANOM [1].

2.13. Нелинейные уравнения первого порядка

Рассмотрение квазилинейного уравнения подняло много вопросов, требующих дальнейшего изучения. Прежде чем приступить к этому, заметим, однако, что аналогичные построения, использующие характеристики, можно провести в общем случае произвольного нелинейного уравнения первого порядка. Эти результаты нам также понадобятся в дальнейшем.

Полезно иметь характеристическую форму для уравнения с n независимыми переменными $(x_1, \dots, x_n)$. Для этого рассмотрим функцию $\varphi(x_1, \dots, x_n)$, удовлетворяющую дифференциальному уравнению

$$H(p, \varphi, x) = 0, \quad (2.82)$$

где $\mathbf{p}$ и $\mathbf{x}$ — векторы с компонентами p_i и x_i , $i = 1, \dots, n$, и

$$p_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}. \quad (2.83)$$

Для введения характеристической формы зададимся вопросом: существуют ли в x -пространстве кривые, родственные характеристикам квазилинейных уравнений? Любую кривую $\mathcal{C}$ в x -пространстве можно записать в параметрическом виде

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\lambda).$$

Полная производная функции φ вдоль кривой $\mathcal{C}$ равна ¹⁾

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \frac{dx_j}{d\lambda} = p_j \frac{dx_j}{d\lambda}.$$

Существует ли касательный вектор $dx_j/d\lambda$, играющий особую роль при решении уравнения (2.82)? В квазилинейном случае, где $H \equiv c_j(\varphi, \mathbf{x}) p_j - b(\varphi, \mathbf{x})$, мы положили

$$\frac{dx_j}{d\lambda} = c_j(\varphi, \mathbf{x}),$$

так что $d\varphi/d\lambda = c_j p_j$; затем с помощью исходного уравнения мы нашли

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = b(\varphi, \mathbf{x}).$$

Но в общем случае величины p_i нельзя исключить из уравнения для $d\varphi/d\lambda$, каким бы ни был выбор $dx_j/d\lambda$. Таким образом, нельзя получить обыкновенное дифференциальное уравнение только для φ : в уравнение обязательно войдут и p_i . Однако рассмотрим теперь полные производные вдоль кривой $\mathcal{C}$ и от p_i :

$$\frac{dp_i}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} \frac{dx_j}{d\lambda}. \quad (2.84)$$

Дифференцируя уравнение (2.82) по x_i , получаем

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} + \frac{\partial H}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{\partial H}{\partial x_i} = 0. \quad (2.85)$$

Сравнивая (2.84) и (2.85), видим, что особенно выгодно выбрать кривую $\mathcal{C}$, положив

$$\frac{dx_i}{d\lambda} = \frac{\partial H}{\partial p_i}. \quad (2.86)$$

В этом случае равенство (2.84) с учетом (2.85) приводится к виду

$$\frac{dp_i}{d\lambda} = -p_i \frac{\partial H}{\partial \varphi} - \frac{\partial H}{\partial x_i}. \quad (2.87)$$

¹⁾ Мы пользуемся соглашением о суммировании по повторяющемуся индексу в пределах $1, \dots, n$.

Добавим еще уравнение

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = p_j \frac{\partial H}{\partial p_j}; \quad (2.88)$$

тогда уравнения (2.86) — (2.88) образуют полную систему из $2n + 1$ обыкновенных дифференциальных уравнений, определяющих «характеристики» $x_i(\lambda)$ и значения φ и p_i вдоль них. В принципе решение во всей области можно получить, интегрируя эти уравнения вдоль характеристик, покрывающих данную область.

В частном случае квазилинейного уравнения $H \equiv c_i(\varphi, \mathbf{x})p_i - b(\varphi, \mathbf{x})$ и уравнения (2.86) и (2.88) сводятся к уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{d\lambda} &= c_i(\varphi, \mathbf{x}), \\ \frac{d\varphi}{d\lambda} &= p_j c_j = b(\varphi, \mathbf{x}), \end{aligned}$$

которые можно решить независимо от (2.87). В наших предыдущих рассуждениях одной из переменных x_i было время t , соответствующий коэффициент c_i был равен единице, а параметром λ служило само время t .

Глава 3

КОНКРЕТНЫЕ ЗАДАЧИ

В этой главе основные идеи, изложенные выше, применяются для подробного изучения физических задач, обсуждавшихся в § 2.2. В то же время эти общие идеи получают дальнейшее развитие на основе конкретных уравнений.

3.1. Поток транспорта

Приложение изложенных выше идей к потоку транспорта было дано независимо Лайтхиллом и Уиземом [1] и Ричардсом [1]. Ясно, что в этом случае скорость потока

$$V(\rho) = \frac{Q(\rho)}{\rho}$$

должна быть убывающей функцией ρ , начинающейся с конечного максимального значения при $\rho = 0$ и стремящейся к нулю при

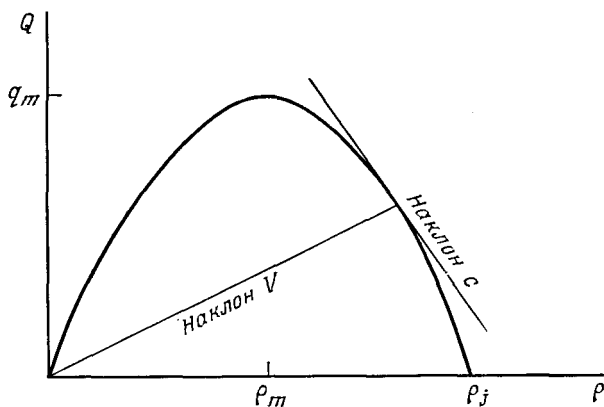


Рис. 3.1. Зависимость расхода от плотности для потока транспорта.

$\rho \rightarrow \rho_j$, значений, при котором машины упираются бамперами одна в другую. Таким образом, $Q(\rho)$ обращается в нуль при $\rho = 0$ и $\rho = \rho_j$ и достигает максимального значения q_m при некотором промежуточном значении плотности ρ_m . В общем случае

это выпуклая функция, изображенная на рис. 3.1. Реальные наблюдения за потоком транспорта показывают, что для однорядного движения характерны следующие значения: $\rho_j \sim 225$ машин на милю¹⁾, $\rho_m \sim 80$ машин на милю, $q_m \sim 1500$ машин в час. Для автострад эти величины в первом приближении можно умножить на число полос движения. Интересно, что, согласно этим цифрам, максимальная величина расхода q_m достигается при малой скорости порядка 20 миль в час.

Скорость распространения возмущений равна

$$c(\rho) = Q'(\rho) = V(\rho) + \rho V'(\rho).$$

Поскольку $V'(\rho) < 0$, эта скорость меньше скорости движения машин; волны распространяются назад по потоку транспорта, предупреждая водителей о помехах впереди. Скорость c равна наклону (q, ρ) -кривой, так что волны распространяются вперед относительно дороги при $\rho < \rho_m$ и назад при $\rho > \rho_m$. При максимальном расходе $\rho = \rho_m$ и волны неподвижны относительно дороги, так что скорость распространения относительно машин также равна $q_m/\rho_m \sim 20$ миль в час.

Поведение потока вблизи точки $\rho = \rho_j$ можно примерно описать, учтя время реакции. Если предположить, что водителю (и его машине) требуется время δ для того, чтобы отреагировать на изменение условий движения впереди, то для безопасности движения машины должны держаться одна от другой на расстоянии $V\delta$. Если h — интервал, определяемый как расстояние между передними бамперами двух соседних машин, а L — характерная длина машины, то приходим к равенству

$$V = \frac{h - L}{\delta}.$$

Поскольку $h = 1/\rho$, $L = 1/\rho_j$, имеем

$$V(\rho) = \frac{L}{\delta} \left(\frac{\rho_j}{\rho} - 1 \right), \quad Q(\rho) = \frac{L}{\delta} (\rho_j - \rho).$$

Эти равенства следует рассматривать лишь как оценку наклона кривой $Q(\rho)$ в точке ρ_j , а не как действительное предсказание линейной зависимости от ρ . Во всяком случае, из последнего равенства следует, что в этой точке скорость распространения возмущений $c_j = -L/\delta$. Для реального потока транспорта δ обычно лежит в интервале 0,5 — 1,5 секунды, хотя при других обстоятельствах время реакции человека может быть намного меньше. Считая L равной 20 футов²⁾, а δ равным одной секунде, получаем $c_j \sim -14$ миль в час.

¹⁾ Напомним, что сухопутная миля равна примерно 1,6 км. — Прим. перев.

²⁾ Напомним, что фут равен примерно 30,5 см. — Прим. перев.

Гринберг [1] показал, что данные, полученные для туннеля Линкольна в Нью-Йорке, хорошо описываются формулой

$$Q(\rho) = a\rho \ln(\rho_j/\rho),$$

где $a = 17,2$ миль в час, $\rho_j = 228$ машин на милю. При такой зависимости относительная скорость распространения возмущения $V - c$ равна постоянному значению a при всех значениях

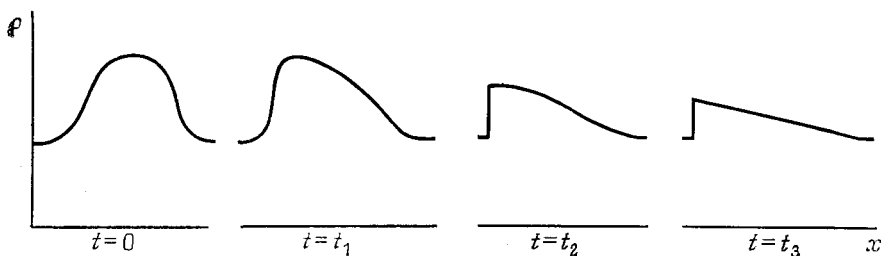


Рис. 3.2. Опрокидывание волны в потоке транспорта.

плотности. Величины ρ_m и q_m равны 83 машины на милю и 1430 машин в час соответственно. Логарифмическая формула не дает конечного предела для V при $\rho \rightarrow 0$, но справедливость этой теории для очень малой плотности движения сомнительна, так что этот факт сам по себе не важен. В случае конечного максимума V и конечных значений $V'(\rho)$ мы имеем $c \rightarrow V$ при $\rho \rightarrow 0$ и следует ожидать, что c с уменьшением плотности $V - c$ убывает.

Поскольку функция $Q(\rho)$ выпукла вверх, $Q''(\rho) < 0$ и c сама является убывающей функцией от ρ . Это означает, что локальное увеличение плотности распространяется так, как показано на рис. 3.2, и разрыв образуется на заднем фронте. Машины движутся быстрее, чем волны, так что каждый водитель попадает в такое локальное увеличение плотности сзади. Он должен резко тормозить в переходной области и постепенно наращивать скорость, покидая затор. Это, видимо, согласуется с практикой. Детали можно проанализировать с помощью теории, развитой в гл. 2. В частности, асимптотически волна принимает треугольную форму, изображенную на последнем из рис. 3.2. Длина волны возрастает как $t^{1/2}$, и величина разрыва затухает как $t^{-1/2}$. Соответствующие аналитические выражения имеют вид

$$c \sim \frac{x}{t}, \quad \rho - \rho_0 \sim \frac{x - c_0 t}{c'(\rho_0) t} \quad \text{при} \quad c_0 t - \sqrt{2Bt} < x < c_0 t,$$

где

$$B = |c'(\rho_0)| \int_{-\infty}^{\infty} (\rho - \rho_0) dx.$$

Разрыв находится в точке

$$x = c_0 t - \sqrt{2Bt},$$

а скачки переменных c и ρ в этой точке составляют

$$c - c_0 \sim -\sqrt{\frac{2B}{t}}, \quad \rho - \rho_0 \sim \frac{1}{|c'(\rho_0)|} \sqrt{\frac{2B}{t}}.$$

Задача о светофоре

Более сложной задачей является анализ потока транспорта у светофора. Мы построим характеристики на (x, t) -диаграмме.

Расстояние

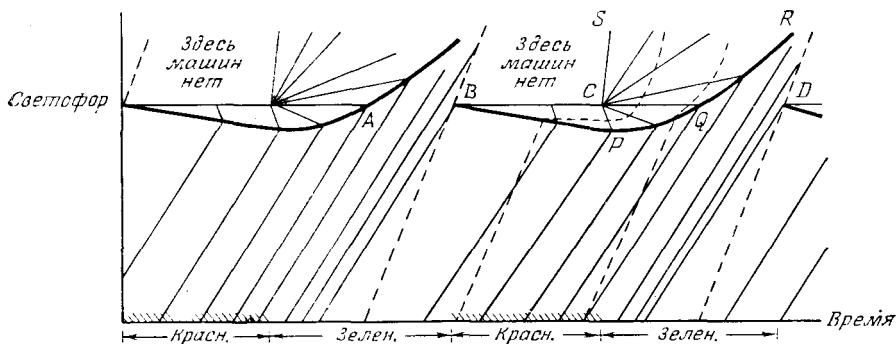


Рис. 3.3. Волновая диаграмма для задачи о светофоре.

Они являются линиями постоянной плотности, а их наклоны $c(\rho)$ определяют значения ρ на них. Таким образом, задача будет решена, как только будет построена (x, t) -диаграмма.

Предположим сначала, что зеленый свет горит достаточно долго, так что проходящий транспорт движется свободно с некоторым значением $\rho_i < \rho_m$. Тогда мы можем начать с характеристик, имеющих наклон $c(\rho_i)$ и пересекающих ось t в интервале AB (рис. 3.3); AB — часть «зеленого периода». (На (x, t) -диаграмме ось x направлена по вертикали, а ось t по горизонтали, как это принято в литературе по потокам транспорта.) Непосредственно под отрезком BC , соответствующим «красному периоду», машины стоят с плотностью $\rho = \rho_j$, так что характеристики имеют отрицательный наклон $c(\rho_j)$. Линия, разделяющая неподвижную очередь перед светофором и свободный поток, должна быть линией разрыва BP , и из условия на разрыве следует, что он распространяется со скоростью

$$-\frac{q(\rho_i)}{\rho_j - \rho_i}.$$

Когда в точке C включается зеленый свет, передние машины могут двигаться с максимальной скоростью, поскольку перед ними плот-

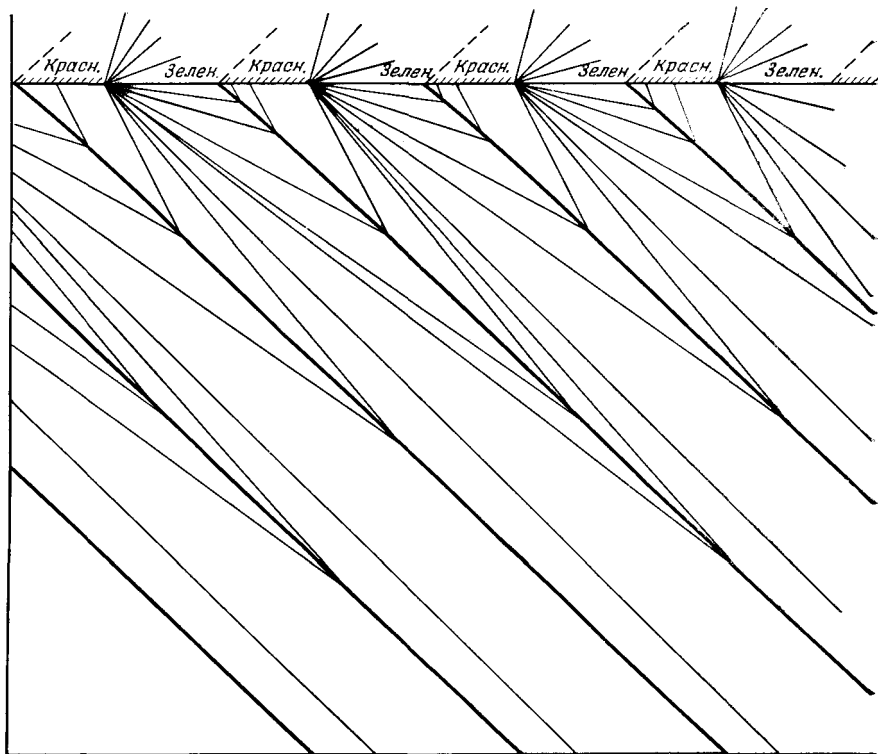


Рис. 3.4. Волновая диаграмма для эле движущегося потока транспорта у перегруженного светофора.

ность ρ равна 0. (Можно приближенно учесть конечность ускорения, продлив эффективный «красный период».) Этот этап представлен характеристикой CS с максимальным наклоном $c(0)$. Между лучами CS и CP расположен веер волн разрежения со всеми промежуточными значениями c . Точно на перекрестке CQ наклон c должен быть нулевым. Но это соответствует максимуму $q = q_m$. Следовательно, справедливо интересное утверждение, что расход q достигает своего максимального значения непосредственно у светофора. Разрыв $BPQR$ ослабляется волной разрежения и в конце концов ускоряется и проходит перекресток при условии, что «зеленый период» достаточно длителен. Легко вывести критерий прохождения разрыва через перекресток. Полный входящий поток за время BQ равен $(t_r + t_s)q_i$, где t_r — «красный период» BC ,

а t_s — часть «зеленого периода» до момента прохождения разрыва. Поток через перекресток за это время равен $t_s q_m$. Эти два потока должны быть равны, следовательно,

$$t_s = \frac{t_r q_i}{q_m - q_i}.$$

Для прохождения разрыва через перекресток и свободной работы светофора необходимо, чтобы длительность «зеленого периода» превосходила это критическое значение.

Если разрыв не проходит через перекресток, то поток никогда не становится свободным и возникает пресловутая уличная пробка. Чтобы это понять, достаточно взглянуть на (x, t) -диаграмму на рис. 3.4. Пояснений не требуется!

Эффекты высших порядков. Диффузия и время реакции

Существует два очевидных дополнительных эффекта, которые желательно включить в теорию. Один из них был упомянут в § 2.4: зависимость q не только от ρ , но и от ρ_x . Это приближенно описывает учет водителем обстановки впереди и приводит к *диффузии* волн. Простейшее предположение, правильно отражающее качественное поведение, имеет вид

$$q = Q(\rho) - v \rho_x, \quad v = V(\rho) - \frac{v}{\rho} \rho_x, \quad (3.1)$$

и нет оснований для введения более сложных выражений.

Второй эффект — наличие интервала времени между изменением условий движения и реакцией водителя и его машины. Один из возможных способов учета этого эффекта заключается в том, чтобы рассматривать выражение для v в (3.1) как желаемую скорость, к которой стремится водитель. Следовательно, для ускорения можно принять формулу

$$v_t + v v_x = -\frac{1}{\tau} \left\{ v - V(\rho) + \frac{v}{\rho} \rho_x \right\}. \quad (3.2)$$

Коэффициент τ характеризует время реакции и схож с величиной δ , упомянутой выше. Уравнение (3.2) следует решать совместно с уравнением сохранения

$$\rho_t + (\rho v)_x = 0. \quad (3.3)$$

Когда v и τ , выраженные в подходящих безразмерных единицах, малы, уравнение (3.2) аппроксимируется равенством $v = V(\rho)$, и мы имеем более простую теорию. Когда в уравнении (3.2) учитываются члены высших порядков, следует ожидать появления ударных волн в виде сглаженных ступенек и т. п. Это в целом верно, но в действительности ситуация оказывается более сложной.

Для первого знакомства с нелинейным уравнением всегда полезно рассмотреть сначала линеаризованную теорию, хотя линеаризация и может иметь свои собственные недостатки, как было указано в § 2.10. Линеаризовав уравнения (3.2) и (3.3) для малых возмущений состояния $\rho = \rho_0$, $v = v_0 = V(\rho_0)$ подстановкой

$$\rho = \rho_0 + r, \quad v = v_0 + w$$

и сохранением только первых степеней r и w , получим

$$\tau(w_t + v_0 w_x) = - \left\{ w - V'(\rho_0) r + \frac{v}{\rho_0} r_x \right\},$$

$$r_t + v_0 r_x + \rho_0 w_x = 0.$$

Кинематическая волновая скорость равна

$$c_0 = \rho_0 V'(\rho_0) + V(\rho_0);$$

отсюда $V'(\rho_0) = -(v_0 - c_0)/\rho_0$. Подставляя это выражение и исключая w , получаем

$$\frac{\partial r}{\partial t} + c_0 \frac{\partial r}{\partial x} = v \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} - \tau \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_0 \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 r. \quad (3.4)$$

Когда $v = \tau = 0$, имеем линеаризованное приближение к кинематическим волнам $r = f(x - c_0 t)$. Член, пропорциональный v , представляет диффузию, характерную для уравнения теплопроводности. Эффект конечного времени реакции τ понять не так просто, но наводящие соображения можно получить следующим образом. Основное волновое движение, описываемое левой частью уравнения, имеет вид $r = f(x - c_0 t)$, так что производная по t приближенно равна произведению величины $-c_0$ и производной по x :

$$\frac{\partial}{\partial t} \simeq -c_0 \frac{\partial}{\partial x}. \quad (3.5)$$

Если это приближение использовать в правой части (3.4), то уравнение примет вид

$$\frac{\partial r}{\partial t} + c_0 \frac{\partial r}{\partial x} = \{v - (v_0 - c_0)^2 \tau\} \frac{\partial^2 r}{\partial x^2}. \quad (3.6)$$

Имеет место комбинированная диффузия, если

$$v > (v_0 - c_0)^2 \tau, \quad (3.7)$$

и неустойчивость, если

$$v < (v_0 - c_0)^2 \tau. \quad (3.8)$$

Это естественно, поскольку в случае устойчивого движения водитель должен смотреть достаточно далеко вперед, учитывая время реакции.

Критерий устойчивости можно вывести обычным способом и непосредственно из полного уравнения (3.4). Уравнение (3.4) имеет

экспоненциальные решения вида

$$r \propto e^{ikx - i\omega t},$$

причем выполняется условие

$$\tau (\omega - v_0 k)^2 + i (\omega - c_0 k) - vk^2 = 0.$$

Эти экспоненциальные решения будут устойчивы, если $\text{Im } \omega < 0$ для обеих корней ω . Легко проверить, что это требование эквивалентно (3.7), так что результат приближенных рассуждений подтверждается и обобщается на волны произвольной длины.

Волны высшего порядка

Следует отметить, что правая часть уравнения (3.4) сама содержит волновой оператор и это уравнение можно переписать в виде

$$\frac{\partial r}{\partial t} + c_0 \frac{\partial r}{\partial x} = -\tau \left(\frac{\partial}{\partial t} + c_+ \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + c_- \frac{\partial}{\partial x} \right) r, \quad (3.9)$$

где

$$c_+ = v_0 + \sqrt{v/\tau}, \quad c_- = v_0 - \sqrt{v/\tau}. \quad (3.10)$$

Следовательно, можно ожидать, что волны, распространяющиеся со скоростями c_+ и c_- , также играют некоторую роль. На данной стадии пока еще рано углубляться в этот вопрос, но стоит сделать замечание, весьма существенное для интерпретации условия устойчивости. В дальнейшем при исследовании уравнений высшего порядка мы увидим, что скорости распространения, соответствующие производным высшего порядка, определяют самый быстрый и самый медленный сигналы. В данном случае для сколь угодно малого, но отличного от нуля времени реакции τ самый быстрый сигнал распространяется со скоростью c_+ , а самый медленный — со скоростью c_- . Таким образом, ясно, что приближение

$$\frac{\partial r}{\partial t} + c_0 \frac{\partial r}{\partial x} = 0 \quad (3.11)$$

может иметь смысл лишь при

$$c_- < c_0 < c_+. \quad (3.12)$$

Но это в точности совпадает с критерием (3.7). Таким образом, поток устойчив тогда и только тогда, когда выполняется условие (3.12), и в этом случае при малых τ уравнение (3.9) можно приближенно заменить уравнением (3.11). Имеется точное соответствие между устойчивостью и взаимодействием волн.

Уравнение (3.9) встречается в различных приложениях и будет подробно изучено в гл. 10.

Структура ударной волны

Более сложная форма поправок высшего порядка приводит к новым возможностям в структуре ударной волны. Для простого диффузионного члена с $v > 0$ в § 2.4 было показано, что ударная волна имеет непрерывную структуру. Теперь мы увидим, что этого может и не быть, если в уравнение входят и другие члены высшего порядка. Будем искать решение системы (3.2)–(3.3) со стационарным профилем вида

$$\rho = \rho(X), \quad v = v(X), \quad X = x - Ut,$$

где U — постоянная скорость перемещения. Уравнение (3.3) принимает вид

$$-U\rho_X + (v\rho)_X = 0. \quad (3.13)$$

Проинтегрировав, получим

$$\rho(U - v) = A, \quad (3.14)$$

где A — некоторая постоянная. Уравнение (3.2) принимает вид

$$\tau\rho(v - U)v_X + v\rho_X + \rho v - Q(\rho) = 0. \quad (3.15)$$

Поскольку $v = U - A/\rho$, это уравнение сводится к

$$\left(v - \frac{A^2}{\rho^2}\tau\right)\rho_X = Q(\rho) - \rho U + A. \quad (3.16)$$

При $\tau = 0$ последнее уравнение совпадает с уравнением (2.21), как это и должно быть. При $\tau \neq 0$ возможность обращения в нуль выражения $v - A^2\tau/\rho^2$ приводит к новым эффектам.

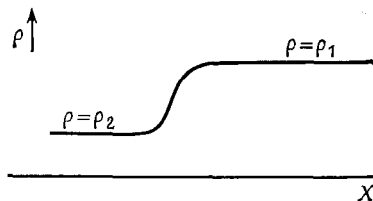


Рис. 3.5. Структура непрерывной ударной волны.

Как и раньше, нас интересуют решения, заключенные между ρ_1 при $X = +\infty$ и ρ_2 при $X = -\infty$. Эти значения будут нулями правой части уравнения (3.16). Для потока транспорта $c'(\rho) = Q'(\rho)$, так что $\rho_2 < \rho_1$ и правая часть положительна при $\rho_2 < \rho < \rho_1$. Если в этом интервале выражение $v - A^2\tau/\rho^2$ остается положительным, то $\rho_X > 0$ и получается гладкий профиль, изображенный на рис. 3.5. В силу равенства (3.14), условие поло-

жительности $v - A^2\tau/\rho^2$ можно записать следующим образом:

$$v > (v - U)^2\tau, \text{ т.е. } v - \sqrt{v\tau} < U < v + \sqrt{v\tau}. \quad (3.17)$$

По виду это условие напоминает линеаризованный критерий устойчивости (3.7), где v_0 заменено локальной скоростью v , а c_0 заменено скоростью ударной волны U . Как и (3.12), его можно рассматривать как предупреждение об осложнениях, возможных в случае,

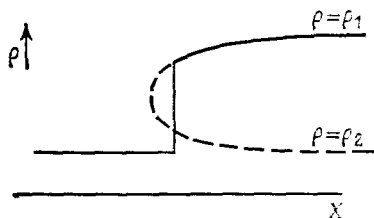


Рис. 3.6. Структура ударной волны с внутренним разрывом.

когда скорость ударной волны выйдет из интервала, ограниченно-го скоростями сигналов высшего порядка. Однако это не обязательно приведет к неустойчивости. Условия устойчивости равномерного потока на $\pm \infty$ имеют вид

$$\begin{aligned} v_1 - \sqrt{v_1\tau} < c_1 < v_1 + \sqrt{v_1\tau}, \\ v_2 - \sqrt{v_2\tau} < c_2 < v_2 + \sqrt{v_2\tau}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

В общем случае возможно, что эти условия выполняются, а условие (3.17) все же нарушается. При этом выражение $v - A^2\tau/\rho^2$ меняет в переходной области знак, как показано на рис. 3.6, и однозначный непрерывный профиль не может существовать.

В большинстве задач о структуре ударной волны, когда профиль «поворачивает назад», он спрямляется введением подходящего разрыва. Строго говоря, эта ситуация опять соответствует нарушению предположений, лежащих в основе описания процесса на данном уровне. Однако введение разрыва, *совместимого с основными уравнениями в интегральной форме*, позволяет избежать более строгого исследования эффектов высших порядков. В случае уравнений (3.2) и (3.3) не ясно, какие законы сохранения пригодны для вывода условия на разрыве или какие дополнительные эффекты следует учесть. Можно ожидать существования разрывного профиля, изображенного сплошной кривой на рис. 3.6; но в этом случае не ясно, как получить точное описание разрыва. В других случаях, которые будут обсуждаться ниже, детальное исследование можно довести до конца. Здесь следует подчеркнуть, что разрывы, получающиеся в простой теории, описываемой

уравнением

$$\rho_t + c(\rho)\rho_x = 0,$$

в более строгой теории не всегда удастся заменить непрерывной переходной областью.

Замечание о дискретных моделях

Большая работа была проделана по изучению дискретных моделей, в которых движение n -й машины зависит от движения остальных машин (см., например, Ньюэлл [1] и приведенные в этой статье ссылки на более ранние работы). Пусть координата n -й машины в момент времени t равна $s_n(t)$. Обычно предполагают, что закон движения имеет вид

$$\dot{s}_n(t + \Delta) = G\{s_{n-1}(t) - s_n(t)\}, \quad (3.19)$$

где $\dot{s}_n$ — скорость, $h_n = s_{n-1} - s_n$ — интервал, а Δ — время, характеризующее реакцию водителя. Если функция $G(h_n)$ выбрана линейной по h_n или уравнение линеаризовано для изучения малых флуктуаций вблизи равномерного движения, то решение можно получить при помощи преобразования Лапласа. В общем случае, однако, приходится обращаться к численному анализу.

В таких моделях внимание концентрируется на движении каждой отдельной машины; в них используются масштабы, иные, чем в непрерывной модели, в которой сложное поведение всей совокупности машин характеризуется функцией $Q(\rho)$ и параметрами v и τ . Но каждая дискретная модель приводит к конкретному виду этих величин, что может оказаться полезным при обработке результатов наблюдения. Кроме того, такие модели могут приводить к дополнительным эффектам, которые нельзя заметить в непрерывной модели.

Чтобы установить соответствие между дискретной моделью, основывающейся на уравнении (3.19), и непрерывной моделью, отметим связь между $G(h)$ и $Q(\rho)$. В однородном потоке с одними и теми же интервалами h все скорости одинаковы и в соответствии с (3.19) определяются соотношением $v = G(h)$. Поскольку $h = 1/\rho$, $v = q/\rho$, функция $Q(\rho)$, входящая в непрерывные уравнения, равна

$$Q(\rho) = \rho G(1/\rho).$$

Если имеется эмпирическая или какая-либо другая информация о $G(h)$, то ее можно перевести в информацию о $Q(\rho)$ при $\rho \approx \rho_j$. Конечно, при более низких плотностях величина $Q(\rho)$ будет другой из-за обгона с переходом на другую полосу.

Распространение волны, которое описывается уравнением (3.19) и в котором движение впереди идущей машины передается после-

довательно назад по потоку, должно быть конечно-разностным вариантом результатов, описанных выше для континуума с указанным выбором функции $Q(\rho)$. В конечно-разностной форме (3.19) содержатся также эффекты высшего порядка, эквивалентные эффектам, учтенным в уравнении (3.2), и можно провести подробное сравнение. Если положить

$$v_n(t) = \dot{s}_n(t), \quad s_{n-1}(t) - s_n(t) = h_n(t), \quad (3.20)$$

то уравнение (3.19) будет эквивалентным двум уравнениям

$$v_n(t + \Delta) = G(h_n), \quad (3.21)$$

$$\frac{dh_n}{dt} = v_{n-1}(t) - v_n(t). \quad (3.22)$$

Теперь введем непрерывные функции $v(x, t)$ и $h(x, t)$, такие, что

$$v(s_n, t) = v_n(t), \quad (3.23)$$

$$h\left(\frac{s_{n-1} + s_n}{2}, t\right) = h_n(t), \quad (3.24)$$

и, считая величины Δ и h_n малыми, перейдем к соответствующим уравнениям в частных производных. Уравнение (3.21) можно переписать в виде

$$v\{s_n(t + \Delta), t + \Delta\} = G\{h(s_n + \frac{1}{2}h_n, t)\}$$

и приближенно заменить уравнением

$$v + (v_t + vv_x)\Delta = G(h) + \frac{1}{2}hG'(h)h_x, \quad (3.25)$$

где все функции вычисляются при $x = s_n(t)$ и ошибки имеют порядок Δ^2 и h^2 . Уравнение (3.22) можно переписать в виде

$$\frac{d}{dt}h\left(\frac{s_{n-1} + s_n}{2}, t\right) = v(s_{n-1}, t) - v(s_n, t)$$

и приближенно заменить уравнением

$$h_t + vh_x = hv_x, \quad \text{где } x = \frac{s_{n-1} + s_n}{2}. \quad (3.26)$$

В этом уравнении ошибки имеют *третий* порядок по h (в силу центрирования h в средней точке $(s_{n-1} + s_n)/2$), так что оно верно и в первом и во втором порядках. В переменных $\rho = 1/h$, $V(\rho) = G(h)$ уравнения (3.25) и (3.26) принимают вид

$$v + (v_t + vv_x)\Delta = V(\rho) + \frac{1}{2}\frac{V'(\rho)}{\rho}\rho_x, \quad (3.27)$$

$$\rho_t + (\rho v)_x = 0. \quad (3.28)$$

В низшем порядке по Δ и h будем иметь

$$v = V(\rho), \quad \rho_t + (\rho v)_x = 0,$$

что в точности совпадает с уравнениями кинематической теории. Разности подобраны таким образом, что поправки следующего порядка оставляют неизменным уравнение сохранения (3.28).

Уравнения (3.27) и (3.28) будут эквивалентны уравнениям (3.2) и (3.3), если положить

$$\tau = \Delta, \quad v = -1/2 V'(\rho).$$

Поскольку $V - c = -\rho V'(\rho)$, критерий устойчивости (3.7) можно записать в виде

$$2\rho^2 |V'(\rho)| \Delta < 1,$$

или, в эквивалентной форме,

$$2G'(h)\Delta < 1.$$

Именно это условие было обнаружено в дискретных моделях потока транспорта (Чендлер, Херман и Монтролл [1]; Коментани и Сасаки [1]). Аналогичным образом структура ударной волны, изученная нами на основе уравнения (3.2), должна быть близкой к структуре, полученной Ньюэллом [1] на основе уравнения (3.19).

Одно из явлений, которые нельзя описать в непрерывной модели, это столкновение машин. В цепочке, описываемой уравнением (3.19), это происходит тогда, когда $s_{n-1} - s_n$ уменьшается до длины машины L . В частном случае уравнения

$$\dot{s}_n(t + \Delta) = \alpha \{s_{n-1}(t) - s_n(t) - L\},$$

которое решается при помощи преобразования Лапласа, можно проверить, что критерий отсутствия столкновений имеет вид

$$\alpha \Delta < 1/e;$$

это несколько сильнее критерия устойчивости $2\alpha \Delta < 1$, полученного выше. Подробный анализ этих условий завел бы нас слишком далеко, и мы отсылаем читателя к обсуждению вопросов локальной устойчивости в статье Хермана, Монтролла, Поттса и Розери [1].

3.2. Паводковые волны

Для паводковых волн в реках «плотностью» в смысле общей теории, изложенной в гл. 2, служит площадь поперечного сечения реки $A(x, t)$, измеренная в точке x в момент времени t . Если расход через это сечение равен $q(x, t)$ в единицу времени, то закон сохранения имеет вид

$$\frac{d}{dt} \int_{x_2}^{x_1} A(x, t) dx + q(x_1, t) - q(x_2, t) = 0,$$

или, в дифференциальной форме,

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0. \quad (3.29)$$

Течение в реке, очевидно, настолько сложно, что любая модель для второго соотношения между q и A оказывается чрезвычайно приближенной и дает лишь качественные эффекты и порядок величин для скоростей распространения, волновых профилей и т. д. Однако наблюдения во время медленных изменений уровня реки все же можно использовать для установления зависимости между глубиной, площадью A и расходом q . Такие наблюдения дают эмпирические кривые для функции

$$q = Q(A, x) \quad (3.30)$$

в стационарном потоке. Это соотношение можно объединить с уравнением (3.29) и получить первое приближение для очень медленно меняющегося нестационарного потока, а именно

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial A} \frac{\partial A}{\partial x} = - \frac{\partial Q}{\partial x}. \quad (3.31)$$

Мы снова получили уравнение, обсуждавшееся в гл. 2, причем скорость распространения возмущений составляет

$$c = \frac{\partial Q}{\partial A} = \frac{1}{b} \frac{\partial Q}{\partial h}. \quad (3.32)$$

(Второе выражение содержит ширину b и глубину h , причем $dA = b dh$.) Это формула Клайца — Седдона для паводковых волн, впервые, по-видимому, установленная Клайцем (1858 г., не опубликовано), а подробно изученная и успешно использованная Седдоном [1].

Эмпирическое соотношение (3.30) можно сопоставить с простой теоретической моделью. Это соотношение отражает равновесие между силой трения о дно реки и силой тяжести. В теоретических моделях сила трения обычно предполагается пропорциональной v^2 , где v — средняя скорость,

$$v = q/A,$$

а также пропорциональной «смоченному» периметру P поперечного сечения в точке x . Таким образом, эту силу, отнесенную к единице длины реки, можно записать в виде $\rho_0 C_f P v^2$, где ρ_0 — плотность воды и C_f — коэффициент трения. Сила тяжести, отнесенная к единице длины, равна $\rho_0 g A \sin \alpha$, где α — угол наклона поверхности воды. Отсюда

$$v = \sqrt{\frac{A}{P} \frac{g \sin \alpha}{C_f}}, \quad (3.33)$$

$$Q = vA = \sqrt{\frac{A^3}{P} \frac{g \sin \alpha}{C_f}}.$$

«Смоченный» периметр P является функцией от A ; C_f также может зависеть от A . Для широких рек P мало меняется при изменении глубины реки и может считаться постоянным. Если C_f и α также принимаются постоянными, то из равенств (3.33) следует закон Шези

$$v \propto A^{1/2}, \quad Q \propto A^{3/2}.$$

Тогда скорость распространения возмущения определяется как

$$c = \frac{d}{dA}(vA) = v + A \frac{dv}{dA} = \frac{3}{2}v.$$

В более общем случае P и C_f представляют собой функции от A и степенной закон зависимости для них дает $v \propto A^n$, $Q \propto A^{1+n}$ с другим показателем степени n . Например, для треугольного поперечного сечения $P \propto A^{1/2}$ и $n = 1/4$; закон Манинга $C_f \propto A^{-1/3}$ приводит к $n = 2/3$. Для всех этих степенных законов скорость распространения возмущения равна

$$c = (1 + n)v.$$

Как и следовало ожидать, паводковые волны перемещаются быстрее, чем вода, но их скорость распространения не может намного превышать скорость воды.

Седдон обращает эти вычисления и использует свои наблюдения за скоростью распространения возмущения для определения эффективного сечения русла, т. е. зависимости P от A . Это ценная идея для всех задач о кинематических волнах: использовать наблюдения за скоростью распространения c для установления зависимости между q и r .

Если опустить зависимость Q от x , то уравнение (3.31) сводится к

$$A_t + c(A)A_x = 0$$

и можно использовать общее решение из гл. 2 с разрывами, на которых выполняется условие

$$U = \frac{q_2 - q_1}{A_2 - A_1}.$$

Для степенных законов, предложенных выше (и подтверждаемых наблюдениями), $c(A)$ — возрастающая функция от A ; следовательно, волны, связанные с возрастанием высоты поверхности, опрокидываются вперед и разрыв несет увеличение высоты, так что $A_2 > A_1$.

Эффекты высшего порядка

Как и в других рассмотренных примерах, уточнение вида связи между q и A в соотношении (3.30) затрагивает производные высших порядков. В нестационарном потоке сила трения и сила тяжести не уравниваются полностью и их разность пропорцио-

нальна ускорению жидкости; разница между наклоном поверхности воды и наклоном дна также влияет на результат.

Полезно записать уравнения в форме законов сохранения так, чтобы при необходимости можно было вывести надлежащие условия на разрывах. Для простоты рассмотрим случай широкого прямоугольного канала с постоянным уклоном α , а в качестве основных переменных вместо A и q будем использовать глубину h и среднюю скорость v . Тогда закон сохранения количества жидкости можно записать в виде

$$\frac{d}{dt} \int_{x_2}^{x_1} h dx + [hv]_{x_2}^{x_1} = 0. \quad (3.34)$$

Для формулировки закона сохранения импульса требуется некоторая дополнительная информация. Соответствующее уравнение гидравлики имеет вид

$$\frac{d}{dt} \int_{x_2}^{x_1} hv dx + [hv^2]_{x_2}^{x_1} + \left[\frac{1}{2} gh^2 \cos \alpha \right]_{x_2}^{x_1} = \int_{x_2}^{x_1} gh \sin \alpha dx - \int_{x_2}^{x_1} C_f v^2 dx. \quad (3.35)$$

С точностью до общих множителей ρ_0 (постоянная плотность воды) и b (ширина канала), на которые мы сократили, пять членов этого уравнения соответственно обозначают: 1) скорость возрастания импульса на участке $x_2 < x < x_1$, 2) суммарный перенос импульса через сечения x_1 и x_2 , 3) суммарную полную силу давления, действующую на сечения x_1 и x_2 , 4) составляющую силы тяжести вдоль уклона и 5) силу трения о дно.

Рассмотрим подробнее член, описывающий давление. В гидравлике зависимость скорости от координаты y , нормальной ко дну, исключается усреднением, так что $v = v(x, t)$, и ускорением жидкости вдоль y пренебрегают. Последнее предположение означает, что давление удовлетворяет гидростатическому закону

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\rho_0 g \cos \alpha.$$

Отсюда

$$p - p_0 = (h - y) \rho_0 g \cos \alpha,$$

и полный вклад возмущения давления, проинтегрированного по поперечному сечению реки, равен

$$b \int_0^h (p - p_0) dy = \frac{1}{2} h^2 \rho_0 g b \cos \alpha;$$

последнее выражение и определяет третий член в (3.35).

Уравнения (3.34) и (3.35) представляют собой два закона сохранения для h и v . Если h и v предполагаются непрерывно диффе-

ренцируемыми, то можно перейти к пределу $x_1 - x_2 \rightarrow 0$ и получить уравнения в частных производных для h и v . Для упрощения получающихся выражений обозначим $g' = g \cos \alpha$ и уклон $S = \operatorname{tg} \alpha$. Тогда уравнения для h и v примут вид

$$\begin{aligned} h_t + (hv)_x &= 0, \\ (hv)_t + (hv^2 + \frac{1}{2}g'h^2)_x &= g'hS - C_f v^2. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Используя первое уравнение для упрощения второго, получим эквивалентную систему

$$\begin{aligned} h_t + v h_x + h v_x &= 0, \\ v_t + v v_x + g' h_x &= g' S - C_f \frac{v^2}{h}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

В приближении кинематических волн пренебрегают левой частью второго уравнения (3.37), что дает

$$h_t + (hv)_x = 0, \quad v = \left(\frac{g'S}{C_f} \right)^{1/2} h^{1/2}. \quad (3.38)$$

В этой кинематической теории на разрыве должно выполняться условие

$$U = \frac{v_2 h_2 - v_1 h_1}{h_2 - h_1}. \quad (3.39)$$

Устойчивость; катящиеся волны

Выясним теперь, что следует из наличия дополнительных членов в (3.37). Для простоты будем считать S и C_f постоянными. Как и в задаче о потоке транспорта, рассмотрим сначала линеаризованную форму уравнений для малых возмущений стационарного состояния $v = v_0$, $h = h_0$, где

$$C_f \frac{v_0^2}{h_0} = g'S. \quad (3.40)$$

Полагая

$$v = v_0 + w, \quad h = h_0 + \eta$$

и пренебрегая всеми членами, кроме членов первого порядка по w и η , получаем

$$\begin{aligned} \eta_t + v_0 \eta_x + h_0 w_x &= 0, \\ w_t + v_0 w_x + g' \eta_x + g' S \left(\frac{2w}{v_0} - \frac{\eta}{h_0} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Исключив w , приходим к уравнению для η

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c_+ \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + c_- \frac{\partial}{\partial x} \right) \eta + \frac{2g'S}{v_0} \left(\frac{\partial}{\partial t} + c_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) \eta = 0, \quad (3.41)$$

где

$$c_+ = v_0 + \sqrt{g'h_0}, \quad c_- = v_0 - \sqrt{g'h_0}, \quad c_0 = 3v_0/2. \quad (3.42)$$

Уравнение (3.41) имеет такой же вид, как и рассмотренное выше уравнение (3.9), с соответствующим изменением выражений для c_+ и c_- . Следовательно, условие устойчивости имеет вид

$$c_- < c_0 < c_+; \quad (3.43)$$

эти же неравенства являются критерием того, что в приближении

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + c_0 \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad (3.44)$$

не нарушается условие на характеристики. Уравнение (3.44) является, конечно, линеаризацией уравнения (3.38).

Используя (3.42), условие устойчивости можно записать в виде $v_0 < 2\sqrt{g'h_0}$, или — с учетом (3.40) — в виде $S < 4C_f$. Для рек v_0 обычно значительно меньше, чем $\sqrt{g'h_0}$, но для водосливов плотин и других искусственных водоводов v_0 часто превосходит эту критическую величину. Результирующий поток не

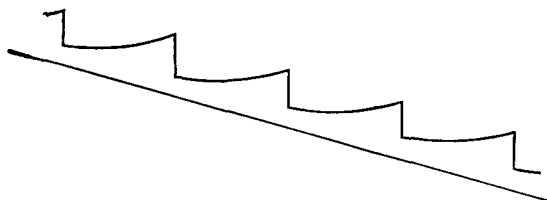


Рис. 3.7. Катящиеся волны.

обязательно является полностью хаотическим и лишенным какой-либо структуры. При благоприятных условиях он принимает вид «катящихся волн», изображенных на рис. 3.7 и образованных периодическими разрывными борами, разделенными гладкими профилями. Первые данные наблюдений и фотографии этого явления были получены Корнишем в 1905 г. и прекрасно описаны в классической книге Корниш [1], суммирующей его наблюдения за волнами на песке и на воде. Наиболее характерные данные относятся к каменному водоводу в Альпах (Грюнбах, Мерлиген) с уклоном 1 к 14. В случае когда средняя глубина составляла приблизительно 3 дюйма¹⁾, средняя скорость течения оценивалась

¹⁾ Один дюйм равен примерно 2,54 см. — Прим. перев.

в 10 футов в секунду, а вся картина катящихся волн двигалась вниз со средней скоростью 13,5 футов в секунду. Для этих данных число Фруда $v_0/\sqrt{g'h_0}$ равняется 5,6, что значительно превосходит критическое значение 2. Эти результаты дают также $S/C_f = 12,5$ и приводят к $C_f \approx 0,006$.

Джеффрис [1] ввел в рассмотрение условие неустойчивости и отметил, что для гладких цементных каналов (в которых он проводил эксперименты) коэффициент трения $C_f \approx 0,0025$. Это значение для C_f согласуется с общепринятым. Для такого коэффициента трения однородный поток должен становиться неустойчивым, когда уклон S превосходит 1 к 100. Джеффрис пришел к выводу, что его эксперименты по возбуждению катящихся волн неубедительны, и считал, что требовались более длинные каналы с уклонами, значительно превосходящими 1 к 100. Значительно позже Дресслер [1] вернулся к этой задаче и показал, как построить нелинейные решения уравнения (3.36) с подходящими условиями на разрыве, описывающие катящиеся волны. Подробности будут указаны ниже после рассмотрения вопроса о стационарном волновом профиле в устойчивом случае.

Моноклиальная паводковая волна

Структура ударных волн, возникающих в кинематической теории (формулы (3.38) и (3.39)), особенно важна в задаче о паводковых волнах, поскольку в действительности ударная волна имеет толщину порядка 50 миль! Как обычно, для ее определения необходимо найти решения со стационарными профилями в более подробном описании, которое в данном случае обеспечивается уравнениями (3.37). Будем искать решения, для которых

$$h = h(X), \quad v = v(X), \quad X = x - Ut.$$

Тогда уравнения (3.37) принимают вид

$$(v-U) \frac{dv}{dX} + g' \frac{dh}{dX} = g'S - C_f \frac{v^2}{h}, \quad (3.45)$$

$$h(U-v) = B, \quad (3.46)$$

где уравнение (3.46) получено интегрированием уравнения неразрывности, а B — постоянная интегрирования. Однородные состояния (h_1, v_1) при $X = \infty$ и (h_2, v_2) при $X = -\infty$ удовлетворяют равенствам

$$g'S - C_f \frac{v_1^2}{h_1} = g'S - C_f \frac{v_2^2}{h_2} = 0,$$

$$h_1(U-v_1) = h_2(U-v_2) = B.$$

Выразив все характеризующие поток постоянные через h_1 и h_2 ,

получим

$$v_1^2 = \frac{S}{C_f} g' h_1, \quad v_2^2 = \frac{S}{C_f} g' h_2, \quad (3.47)$$

$$B = \left(\frac{v_2 - v_1}{h_2 - h_1} \right) h_1 h_2 = \left(\frac{g' S}{C_f} \right)^{1/2} \frac{h_1 h_2}{h_1^{1/2} + h_2^{1/2}}, \quad (3.48)$$

$$U = \frac{v_2 h_2 - v_1 h_1}{h_2 - h_1} = \left(\frac{g' S}{C_f} \right)^{1/2} \frac{h_2^{3/2} - h_1^{3/2}}{h_2 - h_1}. \quad (3.49)$$

Последнее из этих равенств в точности совпадает с условием на разрыве в кинематической теории — с равенством (3.39). Это естественно, и следует ожидать, что решения уравнений (3.45) и (3.46) будут описывать структуру таких кинематических ударных волн.

После исключения v из уравнений (3.45) и (3.46) уравнение для $h(X)$ принимает вид

$$\frac{dh}{dX} = - \frac{(B - Uh)^2 C_f - g' h^3 S}{g' h^3 - B^2}. \quad (3.50)$$

Поскольку числитель должен обращаться в нуль при $h = h_1$ и $h = h_2$, эти величины должны быть корнями кубического уравнения. Тогда третий корень равен

$$H = \frac{C_f}{S} \frac{B^2}{g' h_1 h_2} = \frac{h_1 h_2}{(h_1^{1/2} + h_2^{1/2})^2}.$$

Поскольку $H < h_1, h_2$ и решение h принимает значения в интервале между h_1 и h_2 , в рассматриваемом решении этот третий корень $h = H$ никогда не реализуется.

Теперь уравнение (3.50) можно переписать в виде

$$\frac{dh}{dX} = -S \frac{(h_2 - h)(h - h_1)(h - H)}{h^3 - B^2/g'}, \quad (3.51)$$

и поведение решения определяется знаком знаменателя $h^3 - B^2/g'$ и соответствующим возможным изменением этого знака на профиле. В силу равенства (3.46), имеем

$$g' h^3 - B^2 = g' h^3 - (U - v)^2 h^2 = h^2 \{g' h - (U - v)^2\};$$

знак этого выражения зависит от того, какое из неравенств $U \leq v + \sqrt{g' h}$ справедливо. (Из (3.48) следует, что $B > 0$, откуда, в силу (3.46), $U > v$, так что U всегда больше, чем $v - \sqrt{g' h}$.)

Когда $h_2 \rightarrow h_1$, из (3.49) следует, что

$$U \rightarrow \frac{3}{2} \left(\frac{g' S}{C_f} \right)^{1/2} h_1^{1/2} = \frac{3}{2} v_1.$$

В устойчивом случае $^{3/2} v_1 < v_1 + \sqrt{g' h_1}$, поэтому в случае слабых волн для интегральной кривой уравнения (3.51) при $h = h_1$, $X = \infty$ знаменатель в (3.51) отрицателен. В соответствии с этим $h_X > 0$, h возрастает, $g' h^3 - B^2$ остается положительным и полу-

чается гладкий профиль, изображенный на рис. 3.8. Это так называемая моноклиальная паводковая волна. Тот факт, что для этого профиля необходимо условие $h_2 > h_1$, согласуется с тенденцией к опрокидыванию кинематических волн, поскольку в данной задаче $c'(h) > 0$. Гладкий профиль такого типа может

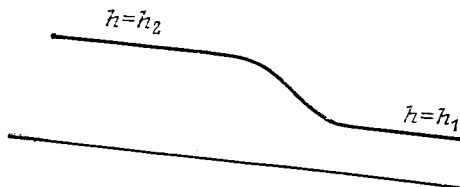


Рис. 3.8. Структура моноклиальной паводковой волны.

существовать, когда скорость распространения ударной волны лежит в интервале

$${}^{3/2}v_1 < U < v_1 + \sqrt{g'h_1} \quad (3.52)$$

Учитывая равенства (3.47) и (3.49), легко показать, что это эквивалентно выполнению неравенств

$$1 < \left(\frac{h_2}{h_1} \right)^{1/2} < \frac{1 + \{1 + 4(S/C_f)^{1/2}\}^{1/2}}{2(S/C_f)^{1/2}}.$$

Однако неравенства (3.52) больше отвечают существу дела в силу физической интерпретации скоростей. Ударная волна распростра-

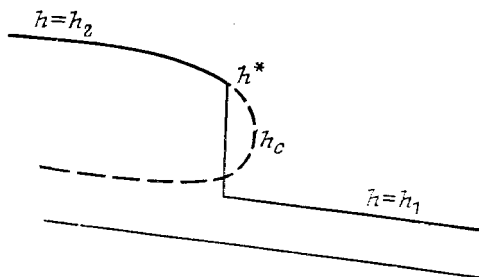


Рис. 3.9. Структура моноклиальной паводковой волны с внутренним разрывом.

няется быстрее, чем волны низшего порядка, но медленнее, чем волны высшего порядка перед ней.

Если

$$v_1 + \sqrt{g'h_1} < U < v_2 + \sqrt{g'h_2},$$

то знаменатель в (3.51) меняет на профиле знак и интегральная кривая поворачивает назад (рис. 3.9). Однозначный профиль получается введением соответствующего разрыва, как показано на этом рисунке. В отличие от случая потока транспорта основные законы сохранения в интегральной форме (3.34) и (3.35) известны и справедливы как для непрерывных, так и для разрывных решений. Применяя к ним процедуру, описанную в § 2.3, получаем следующие условия на расположенном в точке $x = s(t)$ разрыве ¹⁾:

$$-\dot{s}[h] + [hv] = 0, \quad (3.53)$$

$$-\dot{s}[hv] + [hv^2 + \frac{1}{2}g'h^2] = 0. \quad (3.54)$$

Следует специально отметить, что правая часть равенства (3.35) не дает вклада в пределе $x_1 \rightarrow x_2$. Эти условия на разрыве следует рассматривать совместно с уравнениями (3.36) так же, как условие (3.39) рассматривается совместно с уравнением (3.38). Следует быть осторожным при объединении уравнений и условий на разрыве на каждом уровне описания. При изменении уровня описания меняется число как уравнений, так и условий на разрыве. Разрывы, описываемые условиями (3.53) и (3.54), реально проявляются как турбулентные боры, известные в теории волн на воде как «гидравлические прыжки» или буруны на отмели.

В данном случае необходимо построить разрыв, удовлетворяющий условиям (3.53) и (3.54), для решения уравнения (3.36) со стационарным профилем; ясно, что скорость разрыва так же равна U . В силу (3.46), для любого разрыва между ветвями профиля (включая прямые $h = h_1$ и $h = h_2$ как возможные решения уравнения (3.51)) выражение $h(U - v)$ автоматически будет непрерывным и условие (3.53) будет выполненным. Второе требование (3.54) определяет положение этого разрыва. Для выполнения условия (3.54) требуется, чтобы выражение

$$hv(v - U) + \frac{1}{2}g'h^2$$

было непрерывным. В силу (3.46), это эквивалентно непрерывности выражения

$$\frac{B^2}{h} + \frac{1}{2}g'h.$$

Если разрыв выбирается таким, чтобы профиль изменялся от $h = h_1$ до $h = h^*$ на верхней ветви, как показано на рис. 3.9, то это требование принимает вид

$$\frac{B^2}{h^*} + \frac{1}{2}g'h^{*2} = \frac{B^2}{h_1} + \frac{1}{2}g'h_1^2, \quad \text{или} \quad \frac{h^*}{h_1} = \frac{\{1 + 8B^2/g'h_1^3\}^{1/2} - 1}{2}.$$

¹⁾ Для завершения решения данной физической задачи здесь нам требуются математические результаты, которые будут установлены ниже (в гл. 5 и 10). Однако представляется более удобным использовать их здесь с минимумом пояснений, чем откладывать полное решение задачи.

Используя соотношения (3.48), последнее равенство можно переписать в терминах h_1 и h_2 . Можно проверить, что указанный выбор согласуется со следующими требованиями: 1) $g'h^{*3} - B^2 > 0$, так что $h = h^*$ на верхней ветви, и 2) $h^* < h_2$, если $S < 4C_f$.

Окончательный вывод, таким образом, состоит в том, что первоначальный разрыв кинематической теории (равенства (3.38) и (3.39)) при более подробном описании (3.36) переходит в гладкий профиль, если выполняются неравенства (3.52). Для более сильных ударных волн, нарушающих условия (3.52), остается разрыв, отвечающий разрыву в решении уравнений (3.36). Дальнейшее выяснение важности неравенств (3.52) будет проведено (см. гл. 10) после подробного изложения теории характеристик и разрывов для систем высших порядков.

Упомянутые выше катящиеся волны получаются объединением гладких участков, удовлетворяющих уравнению (3.50), с разрывными борами, удовлетворяющими условиям (3.53) и (3.54). Можно показать, что выражение $g'h^3 - B^2$ должно менять знак на профиле, но гладкие части сохраняются монотонными требованием, чтобы числитель в (3.50) также обращался в нуль при критическом значении глубины. Это требование связывает два параметра B и U , один из которых можно считать основным в семействе решений и связать с величиной расхода. Дальнейшие детали можно найти в статье Дресслера [1].

3.3. Ледники

Най [1, 2] отметил, что эти идеи о паводковых волнах равным образом применимы к изучению волн в ледниках, и исследовал наиболее важные свойства таких волн. Он ссылается на Финстервальдера [1] как на первого исследователя волновых движений в ледниках и на независимо полученные результаты Вертмана [1].

Учитывая трудности проведения наблюдений за течением ледников, связанные как с их недоступностью, так и с малой скоростью движения, более надежными считаются полутеоретические выводы. Для этого подробно рассмотрим движение типа сдвига при двумерном стационарном течении по склону постоянной крутизны. Пусть $u(y)$ — скорость слоя, находящегося на расстоянии y от основания, и пусть $\tau(y)$ — сдвигающее усилие. Для льда представляется разумной следующая зависимость между этим усилием и скоростью деформации:

$$\mu \frac{du}{dy} = \tau^n, \quad (3.55)$$

где n приближенно равно 3 или 4. (В случае ньютоновой вязкой среды $n = 1$.) Далее, лед скользит по основанию согласно при-

ближнему закону

$$\nu u(0) = \tau^m(0), \quad (3.56)$$

где $m \approx 1/2 (n + 1) \approx 2$. Для слоя, лежащего между y и $y + \delta y$, разность между сдвигающими усилиями должна уравниваться силой тяжести. Если α — угол наклона и ρ — плотность льда, то

$$\delta \tau = -\rho \delta y g \sin \alpha.$$

Таким образом,

$$\frac{d\tau}{dy} = -\rho g \sin \alpha. \quad (3.57)$$

Поскольку τ обращается в нуль на поверхности ледника $y = h$, решение для τ имеет вид

$$\tau = (h - y) \rho g \sin \alpha.$$

Интегрируя теперь уравнение (3.55) с граничным условием (3.56), получаем

$$u(y) = \frac{(\rho g \sin \alpha)^m h^m}{\nu} + \frac{1}{\mu} \frac{(\rho g \sin \alpha)^n}{n+1} \{h^{n+1} - (h-y)^{n+1}\}. \quad (3.58)$$

Расход, отнесенный к единице ширины, равен

$$Q^*(h) = \int_0^h u dy = \frac{(\rho g \sin \alpha)^m h^{m+1}}{\nu} + \frac{(\rho g \sin \alpha)^n h^{n+2}}{n+2}. \quad (3.59)$$

Для оценки порядка величин можно положить

$$Q^*(h) \propto h^N,$$

где N лежит в интервале между 3 и 5. Скорость распространения возмущений

$$c = \frac{dQ^*}{dh} = Nv,$$

где v — средняя скорость Q^*/h . Таким образом, волны распространяются со скоростью, в три-пять раз большей, чем средняя скорость течения. Характерные скорости имеют порядок от 10 до 100 метров в год.

Используя результаты и идеи, приведенные в гл. 2, можно решать различные задачи. Интересным вопросом, рассмотренным Наем, является влияние периодического накопления и испарения льда; в зависимости от периода это может быть связано с сезонными или климатическими изменениями. Для этого в уравнение неразрывности добавляется известный член $f(x, t)$, т. е. полагают

$$h_t + q_x^* = f(x, t), \quad q^* = Q^*(h, x). \quad (3.60)$$

Последствия определяются интегрированием характеристических уравнений

$$\frac{dh}{dt} = f(x, t) - Q_x^*(h, x),$$

$$\frac{dx}{dt} = Q_h^*(h, x).$$

Основной результат заключается в том, что некоторые части ледника могут быть очень чувствительными к внешнему воздействию и добавочный член может сработать как спусковой механизм для сравнительно быстрых локальных изменений.

3.4. Химические процессы обмена; хроматография; отложение осадков в реках

Уравнения, описывающие процесс обмена между твердой фазой и протекающей через нее жидкостью, были выведены в § 2.2. Обмен либо может быть связан с частицами или ионами какого-нибудь вещества, либо речь может идти о тепловом обмене между твердой фазой и жидкостью. Другим примером является отложение осадков в реках (см. Кинч [1]).

Уравнения, связывающие плотность ρ_f в жидкости и плотность ρ_s адсорбированного вещества, имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_f + \rho_s)_i + \frac{\partial}{\partial x} (V \rho_f) = 0, \quad (3.61)$$

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} = k_1 (A - \rho_s) \rho_f - k_2 \rho_s (B - \rho_f). \quad (3.62)$$

При сравнительно медленных изменениях плотностей и сравнительно высоких скоростях реакции k_1, k_2 во втором уравнении можно пренебречь членом $\partial \rho_s / \partial t$ и взять его в квазиравновесной форме, что даст

$$\rho_s = R(\rho_f) = \frac{k_1 A \rho_f}{k_2 B + (k_1 - k_2) \rho_f}. \quad (3.63)$$

Подставив это выражение в (3.61), получим

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \frac{V}{1 + R'(\rho_f)} \frac{\partial \rho_f}{\partial x} = 0. \quad (3.64)$$

Таким образом, изменения плотности распространяются вверх по потоку со скоростью

$$c = \frac{V}{1 + R'(\rho_f)}, \quad (3.65)$$

где

$$R'(\rho_f) = \frac{k_1 k_2 AB}{\{k_2 B + (k_1 - k_2) \rho_f\}^2}. \quad (3.66)$$

Если рассматриваемые плотности малы, то приближенно

$$c = \frac{k_2 B}{k_1 A + k_2 B} V. \quad (3.67)$$

Скорость распространения возмущений зависит от скоростей реакции рассматриваемого процесса; она меньше для вещества с большей адсорбционной способностью. Если на колонку поступает смесь веществ, различные компоненты которой обладают различными адсорбционными способностями, то эти компоненты будут двигаться вниз по колонке с различными скоростями. Таким образом, на колонке компоненты смеси образуют отдельные полосы; если они к тому же окрашены, то образуется спектр. В этом и заключается процесс хроматографического разделения. Нелинейные эффекты приводят к более высоким концентрациям в начале или в конце полосы в зависимости от знака $c'(\rho_f)$. Конечно, нелинейные уравнения для одного компонента справедливы только после разделения.

Структуру ударной волны и другие вопросы можно изучать при помощи полных уравнений (3.64) и (3.62). Достопримечательно, что в этом случае, как показал Томас [1], полные уравнения можно преобразовать (точно) в линейное уравнение. Сначала вводится движущаяся система координат

$$\tau = t - \frac{x}{V}, \quad \sigma = \frac{x}{V},$$

и уравнения принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_f}{\partial \sigma} + \frac{\partial \rho_s}{\partial \tau} &= 0, \\ \frac{\partial \rho_s}{\partial \tau} &= \alpha \rho_f - \beta \rho_s - \gamma \rho_s \rho_f. \end{aligned} \quad (3.68)$$

Первое уравнение превращается в тождество выбором

$$\rho_f = \psi_\tau, \quad \rho_s = -\psi_\sigma, \quad (3.69)$$

а из второго уравнения получается уравнение для ψ :

$$\psi_{\sigma\tau} + \alpha \psi_\tau + \beta \psi_\sigma + \gamma \psi_\sigma \psi_\tau = 0. \quad (3.70)$$

Произведем теперь нелинейное преобразование

$$\gamma \psi = \ln \chi \quad (3.71)$$

и получим

$$\chi_{\sigma\tau} + \alpha \chi_\tau + \beta \chi_\sigma = 0, \quad (3.72)$$

так что нелинейное преобразование исключило нелинейный член. В исходных переменных мы получаем

$$\rho_f = \frac{1}{\gamma} \frac{\chi_t}{\chi}, \quad \rho_s = -\frac{\chi_t + V\chi_x}{\gamma\chi}, \quad (3.73)$$

$$\chi_{tt} + V\chi_{xt} + (\alpha + \beta)\chi_t + \beta V\chi_x = 0. \quad (3.74)$$

Общее решение этого линейного уравнения можно получить при помощи преобразования Фурье, так что в данном случае решения приближенного уравнения (3.64), включающие, если необходимо, разрывы, можно подробно сравнить с точным решением. Этот вопрос широко изучался Гольдштейном и Мерреем (Гольдштейн [1], Гольдштейн и Меррей [1]). Точное решение подтверждает идеи и методы введения разрывов в решения уравнения (3.64). Детали здесь не приводятся, поскольку такое же подтверждение дает уравнение Бюргерса, с которым проще работать. Несколько сходный анализ проводится в гл. 10 в ином контексте.

Для процессов обмена обе постоянные $\alpha = k_1 A$ и $\beta = k_2 B$ положительны. При таких знаках равновесное состояние всегда устойчиво. Это можно проверить, рассмотрев возмущения уравнения (3.74). Заметим, что волны низшего порядка распространяются со скоростью

$$c_0 = \frac{\beta V}{\alpha + \beta},$$

в то время, как скорости волн высшего порядка равны $c_- = 0$ и $c_+ = V$. Поэтому при $\alpha > 0$, $\beta > 0$ критерий устойчивости $c_- < c_0 < c_+$ всегда выполняется.

Глава 4

УРАВНЕНИЕ БЮРГЕРСА

Простейшим уравнением, отражающим как эффекты нелинейного распространения, так и эффекты диффузии, является уравнение Бюргерса

$$c_t + cc_x = \nu c_{xx}. \quad (4.1)$$

Выше было показано (см. (2.28)), что это уравнение является точным для волн, описываемых уравнениями

$$\rho_t + q_x = 0, \quad q = Q(\rho) - \nu \rho_x, \quad (4.2)$$

в случае когда $Q(\rho)$ — квадратичная функция. В общем случае, когда в рассматриваемой задаче существенны оба эффекта, обычно существует способ вывода уравнения (4.1) либо как достаточно точного приближения, либо как удобной основы для грубых оценок.

В случае произвольной зависимости $Q(\rho)$ в уравнениях (4.2) можно, например, получить уравнение

$$c_t + cc_x = \nu c_{xx} - \nu c''(\rho) \rho_x^2, \quad (4.3)$$

где, как обычно, $c(\rho) = Q'(\rho)$. Отношение $\nu c''(\rho) \rho_x^2$ к νc_{xx} имеет порядок амплитуды возмущения, и следует ожидать, что уравнение (4.1) является хорошим приближением для малых амплитуд. В этом случае полагают, что пренебрежение данным весьма малым членом не создает накапливания ошибок (скажем, при $t \rightarrow \infty$), неизбежно приводящего к неравномерности приближения. Для сравнения напомним, что линеаризация левой части вида $c_t + c_0 c_x$, где c_0 — некоторое постоянное невозмущенное значение, в этом отношении катастрофична. Но для проверки можно установить, что в решении, описывающем структуру ударной волны (см. § 2.4), где наибольшими являются диффузионные члены, в области ударной волны член $\nu c''(\rho) \rho_x^2$ остается по порядку величины меньше, чем νc_{xx} .

Эти рассуждения можно положить в основу формального разложения в ряд теории возмущений по надлежащим образом выбранному малому параметру. С другой стороны, тот факт, что члены, оставленные в уравнении (4.1), описывают понятные и важные явления, тогда как член $\nu c''(\rho) \rho_x^2$ является скорее математической помехой, позволяет предположить, что уравнение (4.1)

окажется полезным для качественного описания даже вне области, где оно, строго говоря, применимо.

Аналогичным образом уравнение Бюргерса оказывается полезным для систем высшего порядка, таких, как (3.2)—(3.3), в которых отражаются и нелинейное распространение, и диффузия. Конечно, оно применимо лишь в устойчивой области и для тех частей решения, где доминируют волны низшего порядка. Соответствующие результаты легко находятся и обычно подтверждаются более строгими рассуждениями. В случае системы (3.2)—(3.3) из уравнения (3.6) следует, что эффективный коэффициент диффузии равен $\nu^* = \nu - (\nu_0 - c_0)^2 \tau$, так что именно это значение следует использовать в уравнении (4.1). Действительно, уравнение (3.6) является полностью линеаризованным уравнением Бюргерса для рассматриваемой системы.

Теперь наша главная цель — показать, что точное решение уравнения Бюргерса подтверждает идеи об ударных волнах, развитые в гл. 2. Иначе говоря, мы хотим проверить, что при $\nu \rightarrow 0$ (в надлежащем безразмерном виде) решения уравнения (4.1) сходятся к решениям уравнения

$$c_t + cc_x = 0 \quad (4.4)$$

с разрывными ударными волнами, удовлетворяющими условию

$$U = 1/2 (c_1 + c_2), \quad c_2 > U > c_1, \quad (4.5)$$

и линиями разрывов, указанными в § 2.8.

4.1. Замена Коула — Хопфа

Независимо друг от друга Коул [1] и Хопф [1] получили замечательный результат, заключающийся в том, что уравнение (4.1) можно свести к линейному уравнению теплопроводности нелинейной заменой

$$c = -2\nu \frac{\psi_x}{\psi}. \quad (4.6)$$

Эта замена аналогична найденному ранее Томасом преобразованию уравнений обмена, описанному в § 3.4. Это преобразование тоже удобно провести в два этапа. Положим сначала

$$c = \psi_x;$$

тогда, проинтегрировав уравнение (4.1) получим

$$\psi_t + 1/2 \psi_x^2 = \nu \psi_{xx}.$$

Положим теперь

$$\psi = -2\nu \ln \phi,$$

откуда

$$\varphi_t = \nu \varphi_{xx}. \quad (4.7)$$

Такая нелинейная замена полностью исключает нелинейный член. Общее решение уравнения теплопроводности (4.7) хорошо известно, и его можно получить различными способами.

Основная задача, рассматривавшаяся в гл. 2, — это задача с начальными условиями

$$c = F(x) \quad \text{при} \quad t = 0.$$

Преобразованием (4.6) эти условия переводятся в следующие начальные условия:

$$\varphi = \Phi(x) = \exp \left\{ -\frac{1}{2\nu} \int_0^x F(\eta) d\eta \right\}, \quad t = 0, \quad (4.8)$$

для уравнения теплопроводности. Решение φ имеет вид

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{4\pi\nu t}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\eta) \exp \left\{ -\frac{(x-\eta)^2}{4\nu t} \right\} d\eta. \quad (4.9)$$

Следовательно, в силу равенства (4.6), для c имеем формулу

$$c(x, t) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-\eta}{t} e^{-G/(2\nu)} d\eta}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-G/(2\nu)} d\eta}, \quad (4.10)$$

где

$$G(\eta; x, t) = \int_0^{\eta} F(\eta') d\eta' + \frac{(x-\eta)^2}{2t}. \quad (4.11)$$

4.2. Поведение решения при $\nu \rightarrow 0$

Рассмотрим теперь поведение точного решения (4.10) при $\nu \rightarrow 0$, причем x , t и $F(x)$ фиксированы. Когда $\nu \rightarrow 0$, основной вклад в интегралы, входящие в формулу (4.10), дают окрестности стационарных точек функции G . Стационарная точка — это такая точка, где

$$\frac{\partial G}{\partial \eta} = F(\eta) - \frac{x-\eta}{t} = 0. \quad (4.12)$$

Пусть $\eta = \xi(x, t)$ — стационарная точка, т. е. $\xi(x, t)$ определяется как решение уравнения

$$F(\xi) - \frac{x - \xi}{t} = 0. \quad (4.13)$$

Вклад окрестности стационарной точки $\eta = \xi$ в интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\eta) e^{-G(\eta)/(2v)} d\eta$$

равен

$$g(\xi) \sqrt{\frac{4\pi v}{|G''(\xi)|}} e^{-G(\xi)/(2v)};$$

это обычная формула метода перевала.

Предположим сначала, что существует только одна стационарная точка $\xi(x, t)$, удовлетворяющая уравнению (4.13). Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x - \eta}{t} e^{-G(\eta)/(2v)} d\eta \sim \frac{x - \xi}{t} \sqrt{\frac{4\pi v}{|G''(\xi)|}} e^{-G(\xi)/(2v)}, \quad (4.14)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-G(\eta)/(2v)} d\eta \sim \sqrt{\frac{4\pi v}{|G''(\xi)|}} e^{-G(\xi)/(2v)}, \quad (4.15)$$

и из равенства (4.10) получаем

$$c \sim \frac{x - \xi}{t}, \quad (4.16)$$

где $\xi(x, t)$ определяется уравнением (4.13). Полученное асимптотическое решение можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} c &= F(\xi), \\ x &= \xi + F(\xi) t. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Это в точности совпадает с решением уравнения (4.4), приведенным в (2.5)—(2.6); стационарная точка $\xi(x, t)$ соответствует характеристической переменной.

Однако мы видим, что при достаточно больших значениях времени формулы (4.17) в некоторых случаях дают многозначное решение и приходится вводить разрывы. В то же время решение (4.10) уравнения Бюргерса, очевидно, однозначно и непрерывно для любого t . Дело в том, что, когда достигается такая стадия, появляются две стационарные точки, удовлетворяющие уравнению (4.13), и необходимо пересмотреть предыдущий анализ асимптотического поведения. Если обозначить эти две стационарные точки через ξ_1 и ξ_2 , причем $\xi_1 > \xi_2$, то как от ξ_1 , так и от ξ_2 получатся вклады вида (4.14) и (4.15). Следовательно, главная часть

решения будет учтена, если положить

$$c \sim \frac{\{(x - \xi_1)/t\} |G''(\xi_1)|^{-1/2} e^{-G(\xi_1)/(2\nu)}}{|G''(\xi_1)|^{-1/2} e^{-G(\xi_1)/(2\nu)} + |G''(\xi_2)|^{-1/2} e^{-G(\xi_2)/(2\nu)}} + \\ + \frac{\{(x - \xi_2)/t\} |G''(\xi_2)|^{-1/2} e^{-G(\xi_2)/(2\nu)}}{|G''(\xi_1)|^{-1/2} e^{-G(\xi_1)/(2\nu)} + |G''(\xi_2)|^{-1/2} e^{-G(\xi_2)/(2\nu)}}. \quad (4.18)$$

Когда $G(\xi_1) \neq G(\xi_2)$, наличие в экспонентах малого знаменателя ν делает один из членов преобладающим при $\nu \rightarrow 0$. Если $G(\xi_1) < G(\xi_2)$, то

$$c \sim \frac{x - \xi_1}{t},$$

если же $G(\xi_1) > G(\xi_2)$, то

$$c \sim \frac{x - \xi_2}{t}.$$

В каждом из этих случаев справедливо решение (4.17), где либо $\xi = \xi_1$, либо $\xi = \xi_2$. Но выбор теперь однозначен: и ξ_1 , и ξ_2 являются функциями от (x, t) , критерий $G(\xi_1) \geq G(\xi_2)$ определяет выбор ξ_1 или ξ_2 при заданных (x, t) . Переход от ξ_1 к ξ_2 происходит в тех точках (x, t) , где

$$G(\xi_1) = G(\xi_2).$$

В силу (4.11), это имеем место, когда

$$\int_0^{\xi_2} F(\eta') d\eta' + \frac{(x - \xi_2)^2}{2t} = \int_0^{\xi_1} F(\eta') d\eta' + \frac{(x - \xi_1)^2}{2t}. \quad (4.19)$$

Поскольку и ξ_1 , и ξ_2 удовлетворяют уравнению (4.13), последнее условие можно записать в виде

$$\frac{1}{2} \{F(\xi_1) + F(\xi_2)\} (\xi_1 - \xi_2) = \int_{\xi_2}^{\xi_1} F(\eta') d\eta'. \quad (4.20)$$

Это в точности совпадает с уравнением (2.45) для определения разрыва. Изменение выбора членов в (4.18) приводит в пределе $\nu \rightarrow 0$ к разрыву функции $c(x, t)$. Все остальные утверждения § 2.8 можно подтвердить аналогичным образом. Таким образом, мы приходим к выводу, что решения уравнения Бюргера при $\nu \rightarrow 0$ переходят в решения уравнения (4.4) с разрывами (4.5).

В действительности ν фиксировано, но сравнительно мало, и следует ожидать, что предельное решение при $\nu \rightarrow 0$ обычно будет хорошим приближением. Поскольку ν — размерная величина, для обоснования этих рассуждений необходимо измерять ν в безразмерных единицах, введя ее отношение к какой-либо другой величине той же размерности. Это нетрудно сделать. Например,

в задаче с одиночным горбом, где $F(x)$ имеет изображенную на рис. 2.9 форму, можно ввести параметр

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \{F(x) - c_0\} dx. \quad (4.21)$$

Размерности величин A и v равны $L^2 T^{-1}$, так что

$$R = \frac{A}{2v} \quad (4.22)$$

является безразмерным числом, и мы говорим, что v мало, если $R \gg 1$. Если длина горба равна L , то число R характеризует отношение нелинейного члена $(c - c_0)c_x$ к диффузионному члену vc_{xx} в области, где характерный масштаб по x для производных равен L . (В области ударной волны, например, характерны более короткие расстояния.) Следуя принятой в теории вязкой жидкости терминологии, удобно называть R числом Рейнольдса.

Даже после уточнения смысла понятия «малое v » остается различие между предельными решением при $v \rightarrow 0$ и решением при фиксированном малом v . Как было показано в (2.26), толщина ударной волны стремится к бесконечности, если ее интенсивность стремится к нулю. Следовательно, для фиксированного R , если даже оно сколь угодно велико, любое решение, описывающее формирование ударной волны или ее затухание при $t \rightarrow \infty$, не всегда будет хорошо аппроксимироваться разрывной теорией в этих областях. Что касается области формирования ударной волны, точные подробности обычно несущественны и достаточно иметь хорошую оценку самой области, где она образуется, а не детальный вид профиля, но это и обеспечивается разрывной теорией. Эффекты диффузии в затухающих при $t \rightarrow \infty$ ударных волнах более интересны. Мы разберем эти вопросы на характерных примерах в следующих параграфах.

4.3. Структура ударной волны

Профиль ударной волны для уравнения (4.1) удовлетворяет уравнению

$$-Uc_X + cc_X = vc_{XX}, \quad X = x - Ut,$$

откуда

$$\frac{1}{2}c^2 - Uc + C = vc_X.$$

Если $c \rightarrow c_1, c_2$ при $X \rightarrow \pm \infty$, то

$$U = \frac{1}{2}(c_1 + c_2), \quad C = \frac{1}{2}c_1c_2,$$

и уравнение можно переписать как

$$(c - c_1)(c_2 - c) = -2\nu c_x.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\frac{X}{\nu} = \frac{2}{c_2 - c_1} \ln \frac{c_2 - c}{c - c_1},$$

что согласуется с (2.25), поскольку $c = 2\alpha\rho + \beta$ для квадратичной функции $Q(\rho)$. Разрешая полученное равенство относительно c , получаем

$$c = c_1 + \frac{c_2 - c_1}{1 + \exp \left\{ \frac{c_2 - c_1}{2\nu} (x - Ut) \right\}}, \quad U = \frac{c_1 + c_2}{2}. \quad (4.23)$$

Положив в равенствах (4.10) — (4.11)

$$F(x) = \begin{cases} c_1, & x > 0, \\ c_2 > c_1, & x < 0, \end{cases}$$

можно исследовать диффузию первоначальной ступеньки в стационарный профиль. Решению можно придать вид

$$c = c_1 + \frac{c_2 - c_1}{1 + h \exp \left\{ \frac{c_2 - c_1}{2\nu} (x - Ut) \right\}}, \quad U = \frac{c_1 + c_2}{2}, \quad (4.24)$$

где

$$h = \frac{\int_{-(x-c_1t)/\sqrt{4\nu t}}^{\infty} e^{-\zeta^2} d\zeta}{\int_{(x-c_2t)/\sqrt{4\nu t}}^{\infty} e^{-\zeta^2} d\zeta}. \quad (4.25)$$

Для фиксированного x/t из интервала $c_1 < x/t < c_2$ величина $h \rightarrow 1$ при $t \rightarrow \infty$ и решение сходится к (4.23).

4.4. Одиночный горб

Частное решение в виде одиночного горба можно получить при начальном условии

$$F(x) = c_0 + A\delta(x). \quad (4.26)$$

Параметр A согласуется с формулой (4.21), и число Рейнольдса составляет $R = A/(2\nu)$. Постоянную c_0 , не теряя общности, можно опустить, поскольку подстановка

$$c = c_0 + \tilde{c}, \quad x = c_0 t + \tilde{x} \quad (4.27)$$

приводит уравнение Бюргерса к виду

$$\tilde{c}_t + \tilde{c} \tilde{c}_{\tilde{x}} = \nu \tilde{c}_{\tilde{x}\tilde{x}}. \quad (4.28)$$

Это исключение c_0 эквивалентно переходу в систему координат, движущуюся со скоростью c_0 . Таким образом, будем рассматривать только случай

$$F(x) = A\delta(x). \quad (4.29)$$

Нижний предел в интеграле, входящем в формулу (4.11), можно считать произвольным, поскольку правая часть (4.10) от него не зависит. Следовательно, можно положить его равным $+0$, включив δ -функцию при $\eta < 0$ и исключив ее при $\eta > 0$. Тогда

$$G = \begin{cases} \frac{(x-\eta)^2}{2t}, & \eta > 0, \\ \frac{(x-\eta)^2}{2t} - A, & \eta < 0. \end{cases}$$

Интегралы в числителе дроби (4.10) вычисляются, а интегралы в знаменателе выражаются через дополнительный интеграл ошибок. Результат таков:

$$c(x, t) = \sqrt{\frac{\nu}{t}} \frac{(e^R - 1) e^{-x^2/(4\nu t)}}{\sqrt{\pi} + (e^R - 1) \int_{x/\sqrt{4\nu t}}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi}, \quad R = \frac{A}{2\nu}. \quad (4.30)$$

То, что решение должно иметь вид

$$c = \sqrt{\frac{\nu}{t}} f\left(\frac{x}{\sqrt{\nu t}}, \frac{A}{\nu}\right),$$

можно было предсказать, исходя из соображений размерности. В задачу входят только два размерных параметра A и ν , оба имеющие размерность $L^2 T^{-1}$; нет отдельных параметров с размерностью длины и времени, которые могли бы служить масштабами для x и t по отдельности.

Когда $R \rightarrow 0$, следует ожидать, что диффузия доминирует над нелинейностью. При $R \ll 1$ знаменатель в (4.30) равен $\sqrt{\pi} + O(R)$ равномерно по x , t , ν ; поэтому c можно приближенно представить в виде:

$$c(x, t) = \sqrt{\frac{\nu}{\pi t}} R e^{-x^2/(4\nu t)} = \frac{A}{\sqrt{4\pi\nu t}} e^{-x^2/(4\nu t)}. \quad (4.31)$$

Это функция источника для уравнения теплопроводности $c_t = \nu c_{xx}$, так что наши ожидания оправдались.

Для обсуждения поведения решения при больших R удобно ввести безразмерную переменную $z = x/\sqrt{2At}$ и переписать (4.30)

в виде

$$c = \sqrt{\frac{2A}{t}} g(z, R),$$

$$g(z, R) = \frac{(e^R - 1)}{2\sqrt{R}} \frac{e^{-z^2 R}}{\sqrt{\pi} + (e^R - 1) \int_{z\sqrt{R}}^{\infty} e^{-\zeta^2} d\zeta}, \quad (4.32)$$

$$z = \frac{x}{\sqrt{2At}}.$$

Рассмотрим теперь поведение функции g при $R \rightarrow \infty$ для различных интервалов z . Во всех случаях $e^R - 1$ можно приближенно заменить на e^R , полагая

$$g \approx \frac{1}{2\sqrt{R}} \frac{e^{R(1-z^2)}}{\sqrt{\pi} + e^R \int_{z\sqrt{R}}^{\infty} e^{-\zeta^2} d\zeta} \quad (4.33)$$

Если $z < 0$, то интеграл стремится к

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\zeta^2} d\zeta = \sqrt{\pi};$$

следовательно, $g \rightarrow 0$ по крайней мере как $1/\sqrt{R}$. Если $z > 0$, то интеграл становится малым и можно использовать асимптотическое равенство

$$\int_{\eta}^{\infty} e^{-\zeta^2} d\zeta \approx \frac{e^{-\eta^2}}{2\eta} \quad \text{при } \eta \rightarrow \infty.$$

Следовательно,

$$g \sim \frac{z}{1 + 2z\sqrt{\pi R} e^{R(z^2-1)}}, \quad z > 0, \quad R \rightarrow \infty. \quad (4.34)$$

При $0 < z < 1$ имеем

$$g \sim z, \quad 0 < z < 1, \quad R \rightarrow \infty. \quad (4.35)$$

Если же $z > 1$, то $g \rightarrow 0$ при $R \rightarrow \infty$. Таким образом, $g \rightarrow 0$ всюду, за исключением интервала $0 < z < 1$, в котором $g \sim z$. В исходных переменных этот результат записывается так:

$$c \sim \begin{cases} \frac{x}{t} & \text{при } 0 < x < \sqrt{2At}, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Это и есть соответствующее решение уравнения (4.4) с разрывом в точке $x = \sqrt{2At}$. Скорость ударной волны равна $U = \sqrt{A/(2t)}$,

а c меняется скачком от нуля до $\sqrt{2A/t}$, так что условие на разрыве (4.5) выполнено.

То же самое выражение ($c_0 = 0$, согласно принятому выше соглашению) было получено в (2.52) для асимптотического поведения решения уравнения (4.4) в случае одиночного горба произвольной формы. Там была асимптотика в другом смысле, исследовалось поведение решения при $t \rightarrow \infty$ в рамках описания, даваемого уравнением (4.4). Для начальных условий в виде δ -функции подобная асимптотика получается немедленно.

Разрыв находится в точке $z = 1$, и для больших, но конечных R выражение (4.34) дает быстрый переход от экспоненциально малых значений при $z > 1$ к $g \sim z$ при $z < 1$. В этой переходной области ударной волны $z \approx 1$ (4.34) можно приближенно переписать так:

$$g \approx \frac{1}{1 + 2\sqrt{\pi R} e^{2R(z-1)}}. \quad (4.36)$$

В исходных переменных получаем

$$c \approx \sqrt{\frac{2A}{t}} \frac{1}{1 + \exp \left\{ \frac{1}{2v} \sqrt{\frac{2A}{t}} (x - \sqrt{2At}) + \frac{1}{2} \ln \frac{2\pi A}{v} \right\}}. \quad (4.37)$$

Это согласуется с профилем ударной волны (4.23) при $c_2 - c_1 = \sqrt{2A/t}$, причем с точностью до малых первого порядка разрыв расположен в точке $x = \sqrt{2At}$. В силу (4.36), ширина этой переходной области имеет порядок $O(R^{-1})$.

Существует другая переходная область (с менее резким переходом), которая расположена вблизи точки $z = 0$ и в которой сглаживается разрыв производной между $g \sim 0$ при $z < 0$ и $g \sim z$ при $0 < z < 1$. Из (4.33) следует, что этой переходной области соответствуют значения

$$z = O(R^{-1/2}),$$

и в этом случае (4.33) можно приближенно представить в виде

$$g \approx \frac{e^{-Rz^2}}{2\sqrt{R} \int_{z\sqrt{R}}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi}. \quad (4.38)$$

В исходных переменных имеем

$$c \approx \sqrt{\frac{v}{t}} \frac{e^{-x^2/(4vt)}}{\int_{x/\sqrt{4vt}}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi}. \quad (4.39)$$

Вид этого решения для больших значений R изображен на рис. 4.1, где построен график $g(z) = c\sqrt{t/(2A)}$ в зависимости от z .

При $R \rightarrow \infty$ переходная область ударной волны переходит в линию разрыва для c , а переходная область около $x=0$ переходит в линию разрыва для c_x . В безразмерных переменных g и z этот профиль не зависит от t . Следовательно, если начальные условия

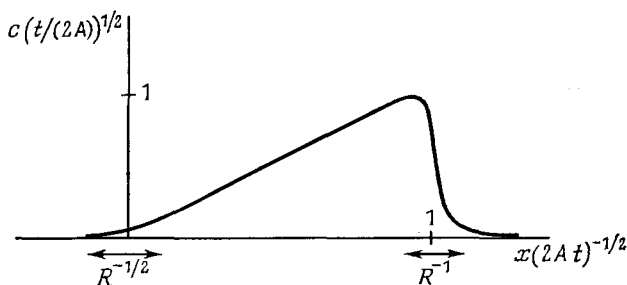


Рис. 4.1. Решение уравнения Бюргера в виде треугольной волны.

обеспечивают достаточно большое значение R , то ударная волна остается достаточно слабой и разрывная теория (4.4) дает хорошее приближение для всех t . Это верно, несмотря на то, что интенсивность ударной волны пропорциональна $\sqrt{2A/t}$ и стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$.

В данной связи следует подчеркнуть, что площадь области между профилем и осью абсцисс остается постоянной даже при учете диффузии, поскольку

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} c \, dx = \left[vc_x - \frac{1}{2} c^2 \right]_{-\infty}^{\infty} = 0.$$

Поэтому «эффективное» число Рейнольдса, определяемое как

$$\frac{1}{2v} \int_{-\infty}^{\infty} c \, dx,$$

остается постоянным для всех t . Следующий пример показывает, что более типична ситуация, когда в затухающей волне диффузия в конце концов преобладает, и что одиночный горб является в этом отношении исключением.

4.5. N-волна

Последние примеры, которые мы рассмотрим, легче получить, подобрав сначала подходящие решения ϕ уравнения теплопроводности (4.7) и затем подставив их в равенство (4.6), определяющее c . При этом в качестве наводящего соображения можно использовать

идею, что c ведет себя как φ_x . Так, в случае одиночного горба следовало бы взять φ равным решению уравнения (4.7) с начальными условиями в виде ступеньки. Для того чтобы получить N -волну для c , выберем в качестве φ решение уравнения теплопроводности в виде функции источника:

$$\varphi = 1 + \sqrt{a/t} e^{-x^2/(4vt)}. \quad (4.40)$$

В силу (4.6), соответствующее решение c равно

$$c = -\frac{2v\varphi_x}{\varphi} = \frac{x}{t} \frac{\sqrt{a/t} e^{-x^2/(4vt)}}{1 + \sqrt{a/t} e^{-x^2/(4vt)}}. \quad (4.41)$$

Поскольку φ при $t \rightarrow 0$ ведет себя как δ -функция, выражение (4.41) несколько затруднительно интерпретировать как решение задачи

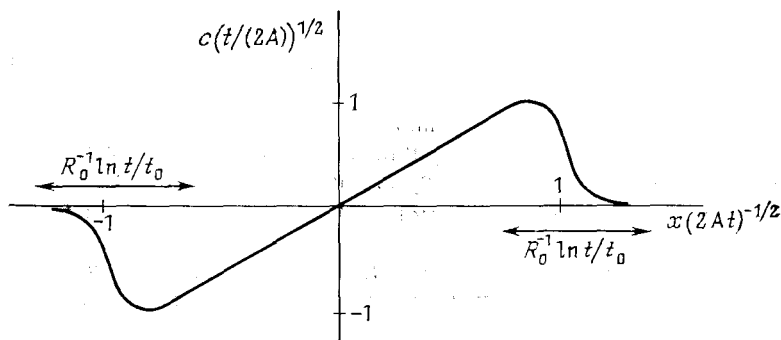


Рис. 4.2. Решение уравнения Бюргерса в виде N -волны.

Коши для c . Однако для любого $t > 0$ оно представляется графиком, изображенным на рис. 4.2, с положительной и отрицательной фазами, и в качестве начального профиля можно взять профиль при любом значении $t = t_0 > 0$. Этот профиль типичен для решений вида N -волны.

Площадь положительной фазы профиля равна

$$\int_0^\infty c dx = -2v [\ln \varphi]_0^\infty = 2v \ln (1 + \sqrt{a/t}). \quad (4.42)$$

Отрицательная фаза имеет такую же площадь. Таким образом, в противоположность предыдущему случаю площадь положительной фазы стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$. Если величину интеграла (4.42) в начальный момент времени t_0 обозначить через A , то можно ввести число Рейнольдса

$$R_0 = \frac{A}{2v} = \ln (1 + \sqrt{a/t_0}). \quad (4.43)$$

Но с ростом времени *эффективным* числом Рейнольдса будет

$$R(t) = \frac{1}{2v} \int_0^{\infty} c dx = \ln(1 + \sqrt{a/t}), \quad (4.44)$$

и это число стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$. Если $R_0 \gg 1$, то можно ожидать, что «невязкая теория» (4.4) — (4.5) в течение некоторого времени будет хорошим приближением, но, поскольку $R(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, в результате будет преобладать диффузионный член. В этом отношении данный пример отличается от предыдущего, в котором эффективное число Рейнольдса оставалось постоянным и равным исходному числу Рейнольдса. Проверим теперь детали.

Введя величины R_0 и t_0 , получаем $a = t_0 (e^{R_0} - 1)^2$, поэтому (4.41) можно переписать в виде

$$c = \frac{x}{t} \left\{ 1 + \sqrt{\frac{t}{t_0}} \frac{e^{x^2/(4vt)}}{e^{R_0} - 1} \right\}^{-1}. \quad (4.45)$$

При $R_0 \gg 1$ (соответственно при $t_0 \ll a$) это выражение можно аппроксимировать следующим:

$$c \sim \frac{x}{t} \left\{ 1 + \sqrt{\frac{t}{t_0}} e^{(x^2/(2At) - 1)R_0} \right\}^{-1} \quad (4.46)$$

для всех x и t . Таким образом при фиксированном t и $R_0 \rightarrow \infty$

$$c \sim \begin{cases} \frac{x}{t}, & -\sqrt{2At} < x < \sqrt{2At}, \\ 0, & |x| > \sqrt{2At}. \end{cases}$$

Этот результат в точности совпадает с невязким решением. Однако для любых фиксированных a и v непосредственно из (4.41) видно (и можно также проверить с помощью (4.46)), что

$$c \sim \frac{x}{t} \sqrt{\frac{a}{t}} e^{-x^2/(4vt)} \quad \text{при } t \rightarrow \infty. \quad (4.47)$$

Это дипольное решение уравнения теплопроводности. В последней стадии затухания диффузия доминирует над линейностью. Следует, однако, помнить, что эта стадия затухания наступает при чрезвычайно больших значениях времени, так что невязкая теория оказывается приемлемой почти во всей интересующей нас области.

4.6. Периодическая волна

Периодическое решение можно получить, взяв в качестве φ совокупность тепловых источников, расположенных на расстоянии λ один от другого. Тогда

$$\varphi = (4\pi\nu t)^{-1/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{(x-n\lambda)^2}{4\nu t} \right\}, \quad (4.48)$$

$$c = -2\nu \frac{\varphi_x}{\varphi} = \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \{(x-n\lambda)/t\} \exp \{-(x-n\lambda)^2/(4\nu t)\}}{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp \{-(x-n\lambda)^2/(4\nu t)\}}. \quad (4.49)$$

Если $\lambda^2/(4\nu t) \gg 1$, то экспонента с наименьшим значением $(x-n\lambda)^2/(4\nu t)$ доминирует над всеми остальными. Следовательно, при $(m - 1/2)\lambda < x < (m + 1/2)\lambda$ будет доминировать член с $n = m$ и (4.49) можно приближенно переписать так:

$$c \sim \frac{x - m\lambda}{t}, \quad (m - 1/2)\lambda < x < (m + 1/2)\lambda.$$

Это волна пилообразной формы с периодическими разрывами, расположенными на расстоянии λ один от другого, и на каждом разрыве с скачком меняется от $-\lambda/(2t)$ до $\lambda/(2t)$. Данный результат согласуется с формулой (2.56).

Для изучения последней стадии затухания, когда $\lambda^2/(4\nu t) \ll 1$, можно использовать другую форму решения. Выражение (4.48) является периодическим по x , и в интервале $-\lambda/2 < x < \lambda/2$

$$\varphi \rightarrow \delta(x) \quad \text{при} \quad t \rightarrow 0.$$

Это начальное условие можно разложить в ряд Фурье

$$\Phi(x) = \frac{1}{\lambda} \left\{ 1 + 2 \sum_1^{\infty} \cos \frac{2\pi n x}{\lambda} \right\};$$

тогда соответствующее решение уравнения теплопроводности для φ будет

$$\varphi = \frac{1}{\lambda} \left\{ 1 + 2 \sum_1^{\infty} \exp \left(-\frac{4\pi^2 n^2}{\lambda^2} \nu t \right) \cos \frac{2\pi n x}{\lambda} \right\}. \quad (4.50)$$

Можно проверить непосредственно, что это ряд Фурье для функции (4.48). Далее,

$$c = -\frac{2\nu\varphi_x}{\varphi} = \frac{\frac{8\pi\nu}{\lambda} \sum_1^{\infty} n \exp\left(-\frac{4\pi^2 n^2}{\lambda^2} \nu t\right) \sin \frac{2\pi n x}{\lambda}}{1 + 2 \sum_1^{\infty} \exp\left(-\frac{4\pi^2 n^2}{\lambda^2} \nu t\right) \cos \frac{2\pi n x}{\lambda}}. \quad (4.51)$$

Если $\nu t/\lambda^2 \gg 1$, то член ряда с $n = 1$ доминирует над остальными, и мы имеем

$$c \sim \frac{8\pi\nu}{\lambda} \exp\left(-\frac{4\pi^2 \nu t}{\lambda^2}\right) \sin \frac{2\pi x}{\lambda}. \quad (4.52)$$

Это решение уравнения $c_t = \nu c_{xx}$, и снова на последней стадии затухания преобладает диффузия.

4.7. Слияние ударных волн

Когда одна ударная волна настигает другую, они сливаются в единую ударную волну возросшей интенсивности, как показано на F -диаграмме рис. 2.16 для невязкого решения ($\nu \rightarrow 0$). Оказывается возможным найти простое решение уравнения Бюргерса, описывающее этот процесс для произвольного ν .

Решение для одиночной ударной волны дается формулами (4.23) и соответствующее выражение для φ имеет вид

$$\varphi = f_1 + f_2, \quad f_j = \exp\left(-\frac{c_j x}{2\nu} + \frac{c_j^2 t}{4\nu} - b_j\right). \quad (4.53)$$

В формулах (4.23) параметры b_1 и b_2 , определяющие исходное положение ударной волны, положены равными нулю. Выражения f_1 и f_2 , очевидно, являются решениями уравнения теплопроводности (4.7). Выражение для c имеет вид

$$c = -\frac{2\nu\varphi_x}{\varphi} = \frac{c_1 f_1 + c_2 f_2}{f_1 + f_2}. \quad (4.54)$$

Пусть $c_2 > c_1$; тогда при $x \rightarrow +\infty$ преобладает f_1 и $c \rightarrow c_1$, а при $x \rightarrow -\infty$ преобладает f_2 и $c \rightarrow c_2$. Центр ударной волны расположен там, где $f_1 = f_2$, т. е. в точке $x = \frac{1}{2}(c_1 + c_2)t$.

Теперь, поскольку каждая функция f_j является решением уравнения теплопроводности, очевидно, можно добавлять в (4.53) и другие члены и получать более общие решения уравнения Бюргерса. Такие решения описывают взаимодействующие ударные

волны. Рассмотрим здесь случай, когда

$$\begin{aligned} \varphi &= f_1 + f_2 + f_3, \quad b_1 = b_2 = 0, \quad b_3 = \frac{c_3 - c_2}{2v}, \\ c &= \frac{c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3}{f_1 + f_2 + f_3}, \quad c_3 > c_2 > c_1 > 0. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Если v достаточно мало, то можно выделить переходные области между состояниями c_1, c_2, c_3 , замечая, в какой из областей доминирует соответствующая функция f . При $t = 0$ функция f_1 доминирует в интервале $0 < x$, функция f_2 — в интервале $-1 < x < 0$, а функция f_3 — в интервале $x < -1$. Таким образом, об-

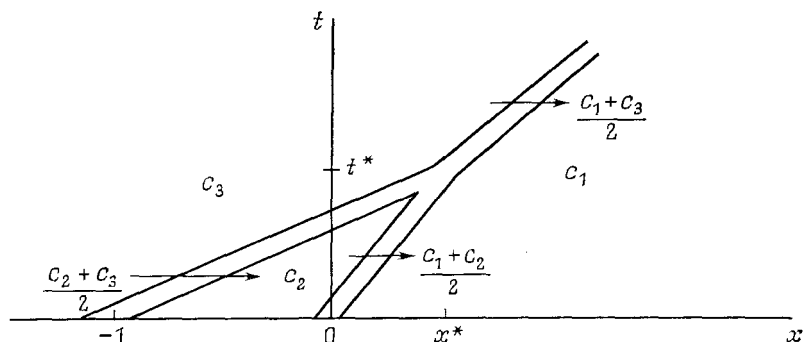


Рис. 4.3. Сливающиеся ударные волны.

ласть перехода от c_1 к c_2 расположена возле $x = 0$, а от c_2 к c_3 — возле $x = -1$. При $t > 0$ области, в которых $c \simeq c_1$, $c \simeq c_2$, $c \simeq c_3$, можно найти таким же образом; результат изображен на рис. 4.3. В начальный период переход от c_1 к c_2 происходит там, где $f_1 = f_2$, т. е. в точке

$$x = \frac{c_1 + c_2}{2} t, \quad (4.56)$$

а переход от c_2 к c_3 — там, где $f_2 = f_3$, т. е. в точке

$$x = \frac{c_2 + c_3}{2} t - 1. \quad (4.57)$$

Поскольку $\frac{1}{2}(c_2 + c_3) > \frac{1}{2}(c_1 + c_2)$, вторая ударная волна настигает первую в точке (x^*, t^*) , определяемой равенствами (4.56) и (4.57). В этой точке $f_1 = f_2 = f_3$.

При $t > t^*$ области, в которой преобладала бы функция f_2 , уже не существует и непрерывное решение описывает единую ударную волну с областью перехода от c_1 к c_3 , движущуюся со скоростью $\frac{1}{2}(c_1 + c_3)$ вдоль прямой

$$x - x^* = \frac{c_1 + c_3}{2} (t - t^*), \quad (4.58)$$

определяемой условием $f_1 = f_3$.

Глава 5

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Следующий шаг в развитии теории гиперболических волн связан с обобщением развитых выше идей и методов на системы высшего порядка. Ряд предварительных замечаний уже был сделан при рассмотрении разнообразных модификаций основного волнового движения, но вопросы, непосредственно связанные с возможностью существования в системе нескольких различных волновых мод, были затронуты лишь мимоходом. Теперь мы перейдем к общему обсуждению этих вопросов.

Многие физические задачи приводят к системам квазилинейных уравнений первого порядка. Такие уравнения линейны по производным первого порядка от зависимых переменных, но их коэффициенты могут быть функциями от зависимых переменных. Если такие уравнения описывают волновое движение, то во многих вопросах можно разобраться, изучая плоские волны. Учитывая это, мы начнем со случая двух независимых переменных. Этими двумя переменными часто являются время и одна пространственная координата, так что будем обозначать их через t и x и использовать соответствующую терминологию, хотя наши рассуждения применимы к любым системам с двумя независимыми переменными. Если зависимые переменные обозначить через $u_i(x, t)$, $i = 1, \dots, n$, то общая квазилинейная система первого порядка будет иметь вид

$$A_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial t} + a_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x} + b_i = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (5.1)$$

где матрицы A , a и вектор b могут быть функциями от $u_1, \dots, u_n$, а также от x и t . (Напоминаем, что здесь и ниже, если не оговорено противное, автоматически проводится суммирование по повторяющимся индексам.)

В этой главе мы установим условия, при которых система (5.1) является гиперболической, и обсудим некоторые общие следствия гиперболичности. Будут сделаны отдельные краткие замечания о ситуации, которая возникает в случае нескольких пространственных переменных, но этот случай большего числа измерений будет рассматриваться в основном применительно к конкретным задачам, причем будет существенно использоваться то обстоятельство, что в любой малой области двух- или трехмерные волны локально ведут себя как плоские.

5.1. Характеристики и классификация систем

Ключом к решению одного уравнения первого порядка, как показано в гл. 2, служит использование семейства характеристик в (x, t) -плоскости; вдоль каждой характеристики уравнение в частных производных сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению. В некоторых случаях затем удастся найти решение в аналитическом виде. Но в худшем случае уравнение в частных производных сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с последующим пошаговым численным интегрированием. В любом варианте решение можно построить последовательным «локальным» рассмотрением малых областей; не обязательно вычислять сразу все решение в целом. Это, конечно, соответствует основным идеям волнового движения: за любой малый интервал времени на поведение в выбранной точке могут оказать влияние только те точки, которые расположены настолько близко, что волны от них успевают дойти вовремя. Поставим следующий вопрос: возможны ли такие локальные вычисления для системы (5.1)? Если они возможны, то система является гиперболической и можно сформулировать соответствующее точное определение.

В общем случае любое из уравнений (5.1) включает различные комбинации $\partial u_j / \partial t$ и $\partial u_j / \partial x$ для каждого u_j . Это значит, что оно содержит информацию о скоростях изменения различных функций u_j в различных направлениях и нельзя получить информацию об этих скоростях для всех u_j в каком-либо *едином* направлении. Но мы можем провести различные преобразования системы n уравнений (5.1) и посмотреть, нельзя ли получить такую информацию из какой-либо их комбинации. Рассмотрим поэтому линейную комбинацию

$$l_i \left(A_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial t} + a_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x} \right) + l_i b_i = 0, \quad (5.2)$$

где вектор l — функция от x, t и u , и выясним, можно ли выбрать вектор l так, чтобы уравнение (5.2) приняло вид

$$m_j \left(\beta \frac{\partial u_j}{\partial t} + \alpha \frac{\partial u_j}{\partial x} \right) + l_j b_j = 0. \quad (5.3)$$

Если это возможно, то уравнение (5.3) дает связь между производными *всех* u_j по единому направлению (α, β) . В этом случае целесообразно ввести в (x, t) -плоскости кривые, определяемые векторным полем (α, β) . Если $x = X(\eta)$, $t = T(\eta)$ — параметрическое представление одной из таких кривых, то полная производная функции u_j вдоль этой кривой равна

$$\frac{du_j}{d\eta} = T' \frac{\partial u_j}{\partial t} + X' \frac{\partial u_j}{\partial x}.$$

Не теряя общности, можно положить

$$\alpha = X'(\eta), \quad \beta = T'(\eta)$$

и переписать (5.3) в виде

$$m_j \frac{du_j}{d\eta} + l_j b_j = 0. \quad (5.4)$$

Условия того, что уравнение (5.2) можно представить в форме (5.4), имеют вид

$$l_i A_{ij} = m_j T', \quad l_i a_{ij} = m_j X',$$

и исключая m_j , получаем

$$l_i (A_{ij} X' - a_{ij} T') = 0. \quad (5.5)$$

Имеем n уравнений для множителей l_i и направления (X', T') . Поскольку они однородны по l_i , необходимым и достаточным условием существования нетривиального решения является обращение в нуль определителя

$$|A_{ij} X' - a_{ij} T'| = 0. \quad (5.6)$$

Это условие определяет направление кривой. Такая кривая называется *характеристикой*, а соответствующее уравнение (5.4) называется уравнением в *характеристической форме*.

Каждое уравнение в характеристической форме дает только одну связь между n производными функций u_j вдоль соответствующей характеристики. Как мы увидим ниже, для возможности локального построения решения в некоторой малой области требуется существование n независимых уравнений в характеристической форме. Это условие является основой определения гиперболической системы.

Сначала, однако, следует отметить сравнительно слабое, но важное ограничение, наложенное на системы, к которым применимо это определение. Ограничение касается матриц коэффициентов A и a . Сразу видно, что одна из них или даже обе они могут быть вырожденными.

Если определитель $|A_{ij}| = 0$, то $T' = 0$ является решением уравнения (5.6), а x -направление — характеристическим, если же $|a_{ij}| = 0$, то $X' = 0$ является решением, t -направление — характеристическим. Несомненно, допустимо, чтобы оси были характеристиками, и эти возможности следовало бы включить в рассмотрение. Однако в некоторых случаях, когда обе матрицы оказываются вырожденными, системы так сильно вырождаются, что подобные возможности следует исключить.

Эти две ситуации можно различить, проверив, устраняются ли трудности при повороте осей. Если беда лишь в том, что исходные оси совпадают с характеристиками, то поворот осей приведет к новой системе с невырожденными матрицами. Поворот осей

заменяет исходные матрицы в (5.1) их линейными комбинациями. Следовательно, соответствующее условие состоит в том, чтобы

$$|\lambda A_{ij} + \mu a_{ij}| \neq 0 \quad (5.7)$$

для некоторых λ, μ , не равных нулю одновременно, и не требуется проводить соответствующее преобразование в явном виде. Если условие (5.7) никогда не выполняется, то имеем вырожденный случай, который следует исключить. В последнем случае все направления формально являются характеристическими и все построения незаконны. Судя по примерам, приведенным в следующем параграфе, системы, так сильно вырожденные, содержат лишние неизвестные, исключение которых может привести к системам с коэффициентами, уже удовлетворяющими условию (5.7).

Учитывая это ограничение, можно ввести следующее определение.

Определение. Система (5.1), удовлетворяющая условию (5.7), называется *гиперболической*, если существуют n линейно независимых вещественных векторов $l^{(k)}$, $k = 1, \dots, n$, таких, что

$$l_i^{(k)} \{A_{ij}\alpha^{(k)} - a_{ij}\beta^{(k)}\} = 0 \quad (5.8)$$

для каждого k , и соответствующие направления $\{\alpha^{(k)}, \beta^{(k)}\}$ вещественны, причем $\alpha^{(k)2} + \beta^{(k)2} \neq 0$.

Следует отметить, что ударение здесь делается на существование n независимых векторов $l^{(k)}$ и что не требуется, чтобы соответствующие направления $(\alpha^{(k)}, \beta^{(k)})$ были различны. Если все эти направления различны и существуют n различных семейств характеристик, то система называется *строго гиперболической*, но мы будем мало пользоваться этим термином. Как мы увидим ниже, возможны случаи, когда уравнение (5.6) имеет менее чем n различных решений, и тем не менее существуют n независимых векторов l .

Частный случай $A_{ij} = \delta_{ij}$. Во многих задачах система (5.1) принимает специальный вид

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + a_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x} + b_i = 0, \quad (5.9)$$

т.е. матрица A является единичной матрицей. В других случаях система сводится к такому виду умножением на A^{-1} (после замены координат, если исходная матрица A особенная). Редко имеет смысл подробно проводить соответствующие преобразования, но в случае необходимости можно, не теряя общности, пользоваться такой формой системы (5.1). Из (5.6) следует, что в этой форме записи $T' \neq 0$, так что характеристики никогда не будут направлены вдоль оси x . Следовательно, их можно параметризовать са-

мим t и описывать уравнениями вида $x = X(t)$. Линейная комбинация

$$l_i \frac{\partial u_i}{\partial t} + l_i a_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x} + l_i b_i = 0$$

принимает характеристическую форму

$$l_i \frac{\partial u_i}{\partial t} + l_i b_i = 0 \quad \text{на} \quad \frac{dX}{dt} = c \quad (5.10)$$

при условии, что

$$l_i a_{ij} = l_j c. \quad (5.11)$$

В частности, *характеристическая скорость* c должна удовлетворять уравнению

$$|a_{ij} - c\delta_{ij}| = 0. \quad (5.12)$$

Возможные корни c являются собственными числами матрицы a , а векторы l — соответствующими левыми собственными векторами.

Следующие два утверждения вытекают из известных теорем линейной алгебры.

Собственные векторы l , отвечающие различным собственным числам c , линейно независимы. Поэтому *система является гиперболической, если уравнение (5.12) имеет n различных вещественных корней c .*

Если a — вещественная симметрическая матрица, то все корни уравнения (5.12) вещественны и существуют n линейно независимых собственных векторов. Поэтому система является гиперболической, *если a — вещественная симметрическая матрица.*

5.2. Примеры классификации систем

Прежде чем приступить к использованию уравнений в характеристической форме и изучению дальнейших свойств характеристик, проиллюстрируем наши идеи несколькими примерами и покажем некоторые трудности, которые могут возникнуть при классификации систем.

Пример 1. Прежде всего рассмотрим волновое уравнение

$$u_{tt} - \gamma u_{xx} = 0.$$

Введя новые функции $v = u_x$ и $w = u_t$, его можно переписать в виде системы

$$\begin{aligned} v_t - w_x &= 0, \\ w_t - \gamma v_x &= 0. \end{aligned}$$

Линейная комбинация

$$l_1 (v_t - w_x) + l_2 (w_t - \gamma v_x) = 0$$

принимает характеристическую форму

$$l_1 (v_t + cv_x) + l_2 (w_t + cw_x) = 0,$$

если

$$-\gamma l_2 = cl_1,$$

$$-l_1 = cl_2.$$

Нетривиальное решение существует, когда $c^2 = \gamma$. Если $\gamma > 0$, то можно положить

$$c = +\sqrt{\gamma}, \quad l_1 = -\sqrt{\gamma}, \quad l_2 = 1;$$

$$c = -\sqrt{\gamma}, \quad l_1 = +\sqrt{\gamma}, \quad l_2 = 1.$$

Два вектора l линейно независимы, так что система является гиперболической. Если $\gamma < 0$, то не существует вещественных характеристических форм; действительно, в этом случае уравнение является прототипом *эллиптических* уравнений.

Пример 2. Уравнение теплопроводности

$$u_t - u_{xx} = 0$$

эквивалентно системе

$$u_t - v_x = 0,$$

$$u_x - v = 0.$$

Ясно, что комбинация

$$l_1 (u_t - v_x) + l_2 (u_x - v) = 0$$

может иметь характеристическую форму лишь при $l_1 = 0$. Таким образом, единственным решением (с точностью до числового множителя) является $l = (0, 1)$. Поскольку для системы второго порядка существует только один вектор l , она не является гиперболической. Если следовать общему формализму, то уравнение (5.6) в данном случае сводится к

$$\begin{vmatrix} X' & T' \\ -T' & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{т. е. } T'^2 = 0.$$

Таким образом, ось x является двойной характеристикой, но для нее существует единственная характеристическая форма

$$u_x - v = 0.$$

Пример 3. Простейшее гиперболическое уравнение второго порядка вида

$$u_{xt} = 0$$

эквивалентно системе

$$\begin{aligned}u_t - v &= 0, \\v_x &= 0.\end{aligned}$$

В этом случае обе матрицы A и a вырождены, но условие (5.7) выполнено и никаких неприятностей не возникает. Уравнение (5.6) имеет вид

$$\begin{vmatrix} X' & 0 \\ 0 & -T' \end{vmatrix} = 0, \quad \text{т. е. } X'T' = 0.$$

Обе оси t и x являются характеристиками, и исходные уравнения уже имеют характеристическую форму.

Пример 4. Рассмотрим теперь уравнение

$$u_{tt} - \gamma u_{xx} + u = 0.$$

Если положить $u_x = v$, $u_t = w$, как в примере 1, то наличие дополнительного не дифференциального члена u помешает полному исключению переменной u ; это наводит на мысль перейти к трем уравнениям. Если в качестве эквивалентной системы выбрать

$$\begin{aligned}u_x - v &= 0, \\u_t - w &= 0, \\w_t - \gamma v_x + u &= 0,\end{aligned}$$

то возникнут неприятности, поскольку обе матрицы A и a вырождены вместе со всеми их линейными комбинациями. Уравнение (5.6) имеет вид

$$\begin{vmatrix} -T' & 0 & 0 \\ X' & 0 & 0 \\ 0 & \gamma T' & X' \end{vmatrix} = 0$$

и, очевидно, выполняется для всех пар (X', T') . Однако эта система исключается условием (5.7).

По крайней мере при $\gamma > 0$ можно выдвинуть указанное выше предположение, что система, вероятно, содержит лишние неизвестные и может быть упрощена. Возможность такого упрощения можно установить, переписав уравнение в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - V\bar{\gamma} \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + V\bar{\gamma} \frac{\partial}{\partial x} \right) u + u = 0.$$

Тогда, положив

$$\varphi = u_t + V\bar{\gamma} u_x,$$

получим систему *второго порядка*

$$\varphi_t - \sqrt{\gamma} \varphi_x + u = 0,$$

$$u_t + \sqrt{\gamma} u_x - \varphi = 0.$$

Коэффициенты этой системы не имеют особенностей. В действительности она уже записана в характеристической форме, и существуют в точности две характеристики.

Пример 5. Другая система, которую можно предложить для уравнения

$$u_{tt} - \gamma u_{xx} + u = 0,$$

такова:

$$u_t - w = 0,$$

$$v_t - w_x = 0,$$

$$w_t - \gamma v_x + u = 0.$$

Она отличается от системы из примера 4 тем, что уравнение $v_t - w_x = 0$, полученное исключением u , подставлено в $u_x - v = 0$. Теперь A — единичная матрица и нет оснований ожидать неприятностей. Условие (5.6) имеет вид

$$\begin{vmatrix} X' & 0 & 0 \\ 0 & X' & T' \\ 0 & \gamma T' & X' \end{vmatrix} = 0, \quad \text{т. е. } X' (X'^2 - \gamma T'^2) = 0.$$

Два корня $X' = \pm \sqrt{\gamma} T'$, очевидно, являются характеристиками исходного уравнения, но откуда взялась лишняя характеристика $X' = 0$? Предложенная система сама по себе не имеет недостатков, но она уже не эквивалентна исходному уравнению. На самом деле она эквивалентна уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} (u_{tt} - \gamma u_{xx} + u) = 0.$$

Появление дополнительной характеристики отвечает дополнительному дифференцированию по t .

Пример 6. Система

$$u_t + C(u, v) u_x = 0,$$

$$v_t + C(u, v) v_x = u$$

представляет собой очевидный пример системы с одной характеристикой, на которой $dx/dt = C$, но с двумя независимыми характеристическими формами. Следовательно, она является гиперболической.

Пример 7. В теории диспергирующих волн встречается система

$$\begin{aligned}u_t + C(u) u_x &= 0, \\v_t + C(u) v_x + C'(u) v u_x &= 0.\end{aligned}$$

Единственной возможной характеристической формой является первое уравнение в исходном виде. Следовательно, система не является гиперболической. Однако в данном исключительном случае первое уравнение можно решить независимо от второго, проинтегрировав его вдоль характеристик $dx/dt = C$. Затем, зная u во всей области, можно вычислить u_x и, проинтегрировав второе уравнение вдоль тех же самых характеристик, найти v . В этом отношении данная система подобна гиперболической системе с двойной характеристикой, однако формально ее следует классифицировать как параболическую.

В примерах 2—7 классификация требовала разъяснений ¹⁾. Теперь мы добавим несколько примеров, в которых нет трудностей в классификации. Это хорошо известные и характерные нелинейные системы. Мы приведем лишь относящиеся к делу сведения с минимумом объяснений.

Пример 8. Газовая динамика. Для сжимаемого невязкого течения газа со скоростью u , давлением p , плотностью ρ и энтропией S уравнения имеют вид (см. гл. 6)

$$\begin{aligned}\rho_t + u\rho_x + \rho u_x &= 0, \\u_t + uu_x + \frac{1}{\rho} p_x &= 0, \\S_t + uS_x &= 0,\end{aligned}$$

где $p = p(\rho, S)$. Уравнения в характеристической форме записываются так:

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dt} \pm \rho a \frac{du}{dt} &= 0 \quad \text{на} \quad \frac{dx}{dt} = u \pm a, \\ \frac{dS}{dt} &= 0 \quad \text{на} \quad \frac{dx}{dt} = u,\end{aligned}$$

где $a^2 = (\partial p / \partial \rho)_{S=\text{const}}$. Для газа с постоянными теплоемкостями $p = \kappa \rho^\gamma e^{S/c_v}$ и $a^2 = \gamma p / \rho$.

Пример 9. Речные волны и теория мелкой воды. Соответствующие уравнения были получены выше (см. (3.37)); их характери-

¹⁾ Общепринято также следующее определение гиперболической системы: система вида (5.9) является гиперболической, если соответствующая задача Коши оказывается корректно поставленной.— *Прим. ред.*

стическая форма следующая:

$$\frac{d}{dt}(v \pm 2\sqrt{g'h}) = g'S - C_f \frac{v^2}{h} \quad \text{на} \quad \frac{dx}{dt} = v \pm \sqrt{g'h}.$$

Пример 9'. Для упрощенной кинематической аппроксимации уравнений (3.38) характеристическая форма сводится к одному уравнению

$$\frac{dh}{dt} = 0 \quad \text{на} \quad \frac{dx}{dt} = \frac{3}{2} \left(\frac{g'S}{C_f} \right)^{1/2} h^{1/2}.$$

Пример 10. Магнитная газовая динамика. Для проводящего газа в магнитном поле уравнения (в стандартных обозначениях) иногда записывают в виде

$$\begin{aligned} \rho_t + u\rho_x + \rho u_x &= 0, \\ \rho(u_t + uu_x) + p_x &= jB, \\ \frac{1}{\gamma-1}(p_t + up_x) - \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho}(\rho_t + u\rho_x) &= \frac{j^2}{\sigma}, \\ B_t + E_x &= 0, \\ \varepsilon_0 E_t + \frac{1}{\mu} B_x + j &= 0, \end{aligned}$$

где $j = \sigma(E - uB)$. Характеристические скорости равны $\pm (\varepsilon_0 \mu)^{-1/2}$, $u \pm a$, u .

Пример 10'. Если проводимость σ очень велика, то предыдущая система приводится к упрощенному виду, часто вполне достаточному для приложений, а именно к виду

$$\begin{aligned} \rho_t + u\rho_x + \rho u_x &= 0, \\ B_t + uB_x + Bu_x &= 0, \\ \rho(u_t + uu_x) + p_x + \frac{1}{\mu} BB_x &= 0, \\ \frac{1}{\gamma-1}(p_t + up_x) - \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho}(\rho_t + u\rho_x) &= 0; \end{aligned}$$

характеристические скорости теперь равны $u \pm (a^2 + B^2/\mu\rho)^{1/2}$, u , u .

Пример 11. Нелинейные эффекты для электромагнитных волн. При простом, но, возможно, идеализированном описании явлений нелинейной оптики можно положить

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial D}{\partial t} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial B}{\partial x} &= 0, \end{aligned}$$

причем $D = D(E)$. Характеристическая форма этих уравнений такова

$$\frac{dB}{dt} \pm \frac{1}{c(E)} \frac{dE}{dt} = 0 \quad \text{на} \quad \frac{dx}{dt} = \pm c(E),$$

где $c(E) = \{\mu D'(E)\}^{-1/2}$. Дисперсионные эффекты, как правило, противоречат соотношению $D = D(E)$.

Пример 12. Нелинейные упругие волны в стержне. Взяв в качестве зависимых переменных перемещение $\xi(x, t)$ сечения, первоначально расположенного в точке x , и напряжение $\sigma(x, t)$, одномерное уравнение распространения волн в стержне можно записать в следующем виде:

$$\rho_0 \xi_{tt} = \sigma_x,$$

где ρ_0 — первоначальная плотность в недеформированном состоянии. Введя деформацию $\varepsilon = \xi_x$ и скорость $u = \xi_t$, получим эквивалентную систему

$$\rho_0 u_t - \sigma_x = 0,$$

$$\varepsilon_t - u_x = 0.$$

В линейной теории полагают $\sigma \propto \varepsilon$, но можно учесть и нелинейные эффекты, считая σ более общей функцией $\sigma = \sigma(\varepsilon)$. Характеристические скорости равны $\pm \{\sigma'(\varepsilon)/\rho_0\}^{1/2}$. При надлежащем выборе $\sigma(\varepsilon)$ распространение связано с интересными эффектами; в частности, несколько странно, что ударные волны возникают в *разгрузочной* фазе возмущения. Этот вопрос рассмотрен в книге Куранта и Фридрихса ([1], стр. 235).

5.3. Инварианты Римана

Каждое уравнение в характеристической форме вводит свою линейную комбинацию производных. Для простоты мы рассмотрим упрощенную форму (5.10), где эта линейная комбинация имеет вид $l_i du_i/dt$. В линейной теории вектор $\mathbf{l}$ не зависит от $\mathbf{u}$, так что после введения новой переменной $r = l_i u_i$ уравнение принимает следующий простой вид:

$$\frac{dr}{dt} + f(x, t, \mathbf{u}) = 0.$$

В нелинейной теории, однако, $\mathbf{l}$ может зависеть от $\mathbf{u}$ и не всегда возможно привести уравнение к такому виду. Для этого необходимо найти λ и r , такие, чтобы

$$l_i du_i = \lambda dr,$$

или — что то же самое — чтобы

$$l_i = \lambda \frac{\partial r}{\partial u_i}. \quad (5.13)$$

(Здесь x и t фиксированы; дифференциал dr относится только к приращениям u .) Это частный случай задачи Пфаффа об интегрируемости дифференциальных форм. Для $n = 2$ можно исключить r и получить уравнение для λ , которое, очевидно, имеет решение. Однако при $n > 2$ исключение из равенств (5.13) как λ , так и r приводит к условиям на l_i , которые являются необходимыми условиями существования такого представления.

Для гиперболической системы n характеристических уравнений принимают особенно простой вид, если оказывается возможным ввести переменные r_k для каждой дифференциальной формы $l_i^{(2)} du_i$. Тогда функции r_k можно использовать как новые переменные вместо u_i и характеристические уравнения запишутся в виде

$$\frac{dr_k}{dt} + f_k(x, t, \mathbf{r}) = 0 \quad \text{на} \quad \frac{dx}{dt} = c_k(x, t, \mathbf{r}). \quad (5.14)$$

Это всегда можно сделать в линейной теории, и в этом случае функции f_k линейны по $\mathbf{r}$. Для нелинейных теорий это всегда возможно при $n = 2$ и может оказаться невозможным при $n > 2$.

Такие переменные для случая $n = 2$ были введены Риманом в его работе по плоским волнам в газовой динамике. В этом частном случае (см. § 6.7) функции f_k равны нулю, так что r_1 и r_2 постоянны на соответствующих характеристиках; поэтому функции r_1 и r_2 называются *инвариантами Римана*. В общем случае функции r_k можно называть *римановыми переменными*.

5.4. Интегрирование шагами при помощи характеристик

Для понимания структуры гиперболических задач, в частности таких вопросов, как правильное число граничных условий и вид области зависимости, полезно представлять себе процедуру построения решения при помощи последовательных малых приращений времени. Для простоты будем предполагать, что характеристические уравнения можно представить в виде (5.14), но качественно явления будут такими же и в общем случае.

Рассмотрим задачу с начальными и краевыми условиями в области $x > 0$, $t > 0$ с данными на лучах $x = 0$ и $t = 0$. Если P — произвольная точка (x, t) -плоскости и если Q_k — близлежащая точка, расположенная на k -й характеристике, проходящей через точку P , то уравнения (5.14) с точностью до членов первого порядка

можно записать в виде

$$r_k(P) - r_k(Q_k) + f_k(Q_k) \{t(P) - t(Q_k)\} = 0, \quad (5.15)$$

$$x(P) - x(Q_k) = c_k(Q_k) \{t(P) - t(Q_k)\} \quad (5.16)$$

с очевидными обозначениями величин в точках P и Q_k . Если эти уравнения записать для всех n характеристик и если значения всех величин в точках Q_k известны, то равенства (5.15) дают n уравнений для величин r_k в точке P . Если некоторые из c_k одинаковы, то некоторые из Q_k будут совпадать, но это не имеет значения при условии, что n уравнений (5.15) образуют полную систему.

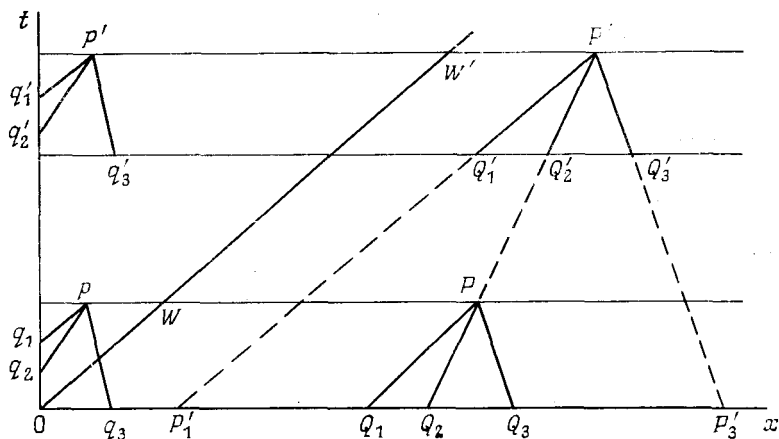


Рис. 5.1. Построение решений с помощью характеристик.

Проведем теперь такое построение многократно, как показано на рис. 5.1. На этом рисунке нанесены три характеристики, причем $c_1 > c_2 > 0 > c_3$. Возьмем сначала точку P после первого шага по времени; $t(P) = \Delta t$. Эта точка берется с достаточно большим значением $x(P)$, чтобы характеристики PQ_1, PQ_2, PQ_3 пересекали положительную полуось x , как показано на рисунке. В этом случае $t(Q_k) = 0$. Если все r_k первоначально известны как функции от x при $t = 0$, то каждая c_k известна как функция от x , так что для выбранного значения $x(P)$ уравнения (5.16) определяют $x(Q_k)$ для каждого k . Тогда $r_k(Q_k)$ и $f_k(Q_k)$ вычисляются по первоначальным значениям r_k и уравнения (5.15) определяют $r_k(P)$. Это верно для всех точек P , лежащих на прямой $t = \Delta t$, при условии, что они находятся справа от точки W , определяемой отрезком OW характеристики, соответствующей наибольшей скорости c_1 и проходящей через начало координат.

Эти вычисления можно повторить, давая времени последовательные приращения. Например, в точке P' значения r_k находятся при помощи величин Q'_1, Q'_2, Q'_3 , которые были определены на предыдущем шаге. Так в принципе можно построить решение в треугольной области, расположенной справа от характеристики OW , если заданы значения всех r_k на луче $t = 0, x > 0$. Ясно также, что значения в точке P' будут зависеть только от данных на ограниченном отрезке P'_1 и P'_3 отрезка оси x , где $P'_1P'_3$ — характеристики, отвечающие самой большой и самой малой скорости соответственно. Отрезок $P'_1P'_3$ представляет собой область зависимости для P' . Наличие области зависимости указывает на волновой характер решения. Сигналы распространяются со скоростями c_1, c_2, c_3 , и только волны, исходящие из точек, расположенных между P'_1 и P'_3 , успевают достичь точки P' .

Для задачи с полными начальными значениями, когда r_k при $t = 0$ заданы на всей оси $x, -\infty < x < \infty$, описанное построение можно использовать для доказательства теорем существования и единственности. Для установления корректности постановки задачи нужно еще проверить, что решение устойчиво (вопрос, которого мы здесь не касаемся).

Но вернемся к смешанной задаче с данными при $t = 0$, известными только для $x > 0$, и остальной информацией в виде данных на полуоси $x = 0, t > 0$. Рассмотрим точку p на прямой $t = \Delta t$, расположенную слева от точки W , так что две положительные характеристики пересекают ось t в точках q_1 и q_2 . Значение $r_3(p)$ все еще определяется данными в точке q_3 , расположенной на оси x . Действительно, точку p можно взять на самой оси t , а r_3 все еще будет определяться данными на оси x . Таким образом, величину r_3 нельзя произвольно задавать при $x = 0$. Для определения $r_1(p)$ и $r_2(p)$ потребуются значения r_1, r_2 и r_3 в точках q_1 и q_2 . Значение r_3 при $x = 0$ вычисляется, а не задается, но, очевидно, r_1 и r_2 должны быть заданы. Для последующих шагов по времени все повторяется. Например, в точке p' значение r_3 определяется данными в точке q'_3 ; значения r_1 и r_2 определяются по данным в точках q'_1 и q'_2 , так что значения r_1 и r_2 должны быть заданы в этих точках. Таким образом, для корректно поставленной задачи

$$r_1, r_2, r_3 \text{ заданы при } t = 0, x > 0,$$

$$r_1, r_2 \text{ заданы при } x = 0, t > 0.$$

Данные на оси $x = 0$ влияют на решение только в области левее «волнового фронта» OWW' . Конечно, можно задавать и другие эквивалентные данные, и в общем случае любые три условия при $t = 0$ и любые два условия при $x = 0$ будут корректными. Единственное ограничение состоит в том, что два условия, заданные на оси $x = 0$, не должны определять r_3 , поскольку r_3 определяется начальными условиями.

Полученные здесь результаты можно обобщить на n уравнений и другие граничные условия. Из построения решения ясно, что *число граничных условий должно быть равно числу характеристик, направленных в рассматриваемую область*. Чтобы сделать термин «направленных» осмысленным, следует для каждой характеристики определить положительное направление. Когда t — время, это направление обычно выбирается в сторону возрастания t . Для определения положительного направления можно использовать другую координату, т. е. x , или даже функцию от (x, t) , но в каждом случае правильность выбора граничных условий нуждается в проверке, аналогичной проведенной выше.

Доказательства существования и единственности могут основываться на итерациях интегральных соотношений, выражающих значение в точке в виде интегралов по соответствующему характеристическому треугольнику (например, $P'P'_1P'_2$ для P' на рисунке 5.1). В целом построение аналогично итерациям Пикара для обыкновенных дифференциальных уравнений. Здесь можно сослаться на Куранта и Гильберта ([1], стр. 458).

В нелинейных задачах характеристические скорости c_k являются функциями от u , так что число условий, заданных на какой-либо границе, также может являться функцией от u .

5.5. Разрывы производных

Из проведенного выше построения решения видно, что характеристики несут информацию с границы в рассматриваемую область. Физически характеристики соответствуют волнам, распространяющимся со скоростями c_k . Судя по этому построению, в общем случае следует ожидать, что любое резкое изменение данных на границе приведет к соответствующим резким изменениям решения, распространяющимся вдоль характеристик, проходящих через эти граничные точки. Если такое резкое изменение представляет собой разрыв некоторых производных функции u , то это не слишком определенное соображение становится точным и можно ожидать, что разрывы производных распространяются вдоль характеристик. Соответствующие результаты можно получить непосредственно из уравнений. Рассуждения проводятся для случая разрыва первого рода первых производных функций u_j . Производные высших порядков и прочие особенности можно рассмотреть аналогичным образом.

Пусть $\xi(x, t) = 0$ — гладкая кривая, разделяющая две области, в каждой из которых u непрерывно дифференцируема. Предположим, что u_j непрерывны при $\xi \rightarrow \pm 0$ и что du_j/dt и du_j/dx имеют конечные пределы при $\xi \rightarrow \pm 0$. Если $\xi(x, t)$ — достаточно гладкая функция то можно ввести новую локальную систему

координат $\xi(x, t)$, $\eta(x, t)$ и записать (5.1) в виде

$$(A_{ij}\xi_t + a_{ij}\xi_x) \frac{\partial u_j}{\partial \xi} + (A_{ij}\eta_t + a_{ij}\eta_x) \frac{\partial u_j}{\partial \eta} + b_i = 0. \quad (5.17)$$

Эти уравнения справедливы в каждой из областей $\xi > 0$ и $\xi < 0$. По предположению

$$u_j(+0, \eta) = u_j(-0, \eta), \quad (5.18)$$

откуда

$$\frac{\partial u_j(+0, \eta)}{\partial \eta} = \frac{\partial u_j(-0, \eta)}{\partial \eta}. \quad (5.19)$$

Это означает, что на кривой $\xi = 0$ касательные производные непрерывны и только нормальные производные $\partial u_j / \partial \xi$ могут претерпевать разрыв. Пределы равенств (5.17) конечны при $\xi \rightarrow \pm 0$, а все коэффициенты непрерывны. Следовательно, взяв разность пределов с обеих сторон, получим

$$(A_{ij}\xi_t + a_{ij}\xi_x) \left[\frac{\partial u_j}{\partial \xi} \right] = 0, \quad (5.20)$$

где

$$\left[\frac{\partial u_j}{\partial \xi} \right] = \left(\frac{\partial u_j}{\partial \xi} \right)_{\xi=+0} - \left(\frac{\partial u_j}{\partial \xi} \right)_{\xi=-0}.$$

Отсюда скачки $[\partial u_j / \partial \xi]$ отличны от нуля лишь в том случае, когда на кривой $\xi = 0$

$$|A_{ij}\xi_t + a_{ij}\xi_x| = 0. \quad (5.21)$$

Если кривую $\xi(x, t) = 0$ описывать другим способом: $x = X(\eta)$, $t = T(\eta)$, то

$$(\xi_t, \xi_x) \propto \{X'(\eta), -T'(\eta)\}.$$

При этом равенство (5.21) совпадает с равенством (5.6), и, следовательно, *разрывы первых производных функции и могут иметь место только на характеристиках.*

Согласно этому утверждению, распространяющиеся разрывы исключены, если система не имеет характеристик; в этом случае любой разрыв граничных данных немедленно сгладится в решении. С другой стороны, существование характеристик не является гарантией возникновения разрывов. Уравнения дают дополнительные ограничения на $[\partial u_j / \partial \xi]$, и, если система не полностью гиперболическая, эти ограничения могут оказаться настолько жесткими, что $[\partial u_j / \partial \xi] = 0$. Однако, если система гиперболическая, дополнительные соотношения не исключают разрывов, вместо этого они дают уравнения, определяющие изменение величин разрывов, когда они распространяются вдоль характеристик.

Если равенство (5.21) выполнено и выбрана конкретная характеристика, то уравнения (5.20) дают ряд соотношений между вели-

чинами $[\partial u_j / \partial \xi]$ на этой характеристике. Число этих соотношений определяется рангом матрицы коэффициентов в (5.20). В простейшем случае имеется $n - 1$ соотношение, так что все скачки $[\partial u_j / \partial \xi]$ определяются через один из них, или в более симметричном виде

$$[\partial u_j / \partial \xi] = \sigma L_j, \quad (5.22)$$

где L — любое нетривиальное решение системы

$$(A_{ij}\xi_t + a_{ij}\xi_x) L_j = 0, \quad (5.23)$$

а σ на данной стадии пока не определено. Если ранг матрицы равен r , то существуют $n - r$ независимых решений системы (5.23) и соответствующее число членов в (5.22) с $n - r$ параметрами σ .

Можно получить дополнительную информацию, взяв производную по ξ системы (5.17) и рассмотрев разность пределов при $\xi \rightarrow \pm 0$. Результат имеет следующий общий вид:

$$(A_{ij}\xi_t + a_{ij}\xi_x) \left[\frac{\partial^2 u_j}{\partial \xi^2} \right] + E_i \left(\frac{d}{d\eta} \left[\frac{\partial u_j}{\partial \xi} \right], \left[\frac{\partial u_j}{\partial \xi} \right] \right) = 0, \quad (5.24)$$

где E_i линейна по первому аргументу и не более чем квадратична по второму. Хотя в основном эти уравнения дают информацию о скачках вторых производных $[\partial^2 u_j / \partial \xi^2]$ при переходе через $\xi = 0$, из вырожденности матрицы

$$A_{ij}\xi_t + a_{ij}\xi_x$$

следует, что некоторые линейные комбинации величин E_i обращаются в нуль. Отсюда получаются новые соотношения, которым должны удовлетворять величины $[\partial u_j / \partial \xi]$. Их число равно $n - r$ (где r опять ранг матрицы), и это в точности совпадает со степенью произвола, остающегося после решения системы (5.20). Эти соотношения и дают искомые уравнения для параметров σ , введенных в (5.22).

Детали становятся довольно сложными, так что подробные построения мы проведем только для случая разрывов на волновом фронте, распространяющемся в область с постоянным однородным состоянием. Этот пример содержит все важные черты и во всяком случае является основным приложением теории разрывов. Мы будем также считать, что система имеет упрощенный вид (5.9).

5.6. Разложение вблизи волнового фронта

Рассмотрим систему (5.9) в случае, когда она допускает постоянные решения $u_j = u_j^0$. Для этого необходимо, чтобы вектор b не зависел от x и t и чтобы вектор $u^{(0)}$ удовлетворял условию

$$b_i(u^{(0)}) = 0. \quad (5.25)$$

Для систем вида (5.9) характеристики никогда не направлены вдоль оси x , так что t можно использовать как параметр на волновом фронте и записать уравнение волнового фронта в виде $x = X(t)$. Вместо того чтобы вычислять пределы производных с помощью уравнений, в задаче о волновом фронте особенно удобно использовать эквивалентный способ разложения решения по степеням

$$\xi = x - X(t).$$

Если первые производные разрывны, то удобно строить решение в следующем виде:

$$u_j = u_j^{(0)}, \quad \xi > 0, \quad (5.26)$$

$$u_j = u_j^{(0)} + u_j^{(1)}(t)\xi + \frac{1}{2}u_j^{(2)}(t)\xi^2 + \dots, \quad \xi < 0. \quad (5.27)$$

Тогда

$$\left[\frac{\partial u_j}{\partial t} \right] = \dot{X}(t) u_j^{(1)}(t), \quad \left[\frac{\partial u_j}{\partial x} \right] = -u_j^{(1)}(t), \quad (5.28)$$

и производные высших порядков аналогичным образом связаны с другими коэффициентами.

Разложение в степенной ряд удобно для обобщения на особенности иного вида. Если наименьшие производные, имеющие разрывы, — это производные m -го порядка, то степенной ряд после $u_j^{(0)}$ содержит члены порядка ξ^m ; кроме того, можно включить особенности, соответствующие разложению по дробным степеням $|\xi|$ или по степеням $\ln |\xi|$. Вопросы сходимости здесь не существенны, мы используем формальные степенные ряды как способ вычисления производных, которые можно было бы получить и переходом к соответствующим пределам в уравнениях.

Коэффициенты в (5.27) получены подстановкой ряда в (5.9) и последовательным приравниванием коэффициентов при степенях ξ к нулю. Если величины a_{ij} — функции от x , t и $\mathbf{u}$, то их следует разложить в степенные ряды по ξ с коэффициентами, зависящими от t . Таким образом,

$$a_{ij} = a_{ij}^{(0)} + \xi \left(\frac{\partial a_{ij}^{(0)}}{\partial u_h} u_h^{(1)} + \frac{\partial a_{ij}^{(0)}}{\partial x} \right) + \dots, \quad (5.29)$$

где нулевой верхний индекс означает, что аргументы у соответствующих функций равны $x = X(t)$, t и $\mathbf{u} = \mathbf{u}^{(0)}$. Однако, выписывая окончательные уравнения для $u_j^{(m)}(t)$, мы будем для простоты опускать нулевой верхний индекс. Подстановкой в (5.9) получаем

$$a_{ij} u_j^{(1)} - c u_i^{(1)} = 0, \quad (5.30)$$

$$a_{ij} u_j^{(2)} - c u_i^{(2)} + \left\{ \frac{d u_i^{(1)}}{dt} + \frac{\partial a_{ij}}{\partial u_h} u_j^{(1)} u_h^{(1)} + \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x} + \frac{\partial b_i}{\partial u_j} \right) u_j^{(1)} \right\} = 0 \quad (5.31)$$

и т. д., причем c означает $\dot{X}$. Эти равенства, конечно, соответствуют (5.20) и (5.24).

Из (5.30) мы выводим прежде всего, что скорость $\dot{X} = c$ должна удовлетворять уравнению

$$|a_{ij} - c\delta_{ij}| = 0 \quad (5.32)$$

и волновой фронт должен быть одной из характеристик. Если будем считать, что ранг матрицы в (5.30) равен $n - 1$, то получим

$$u_j^{(1)} = \sigma L_j, \quad (5.33)$$

где L_j — произвольное нетривиальное решение уравнения

$$(a_{ij} - c\delta_{ij}) L_j = 0. \quad (5.34)$$

Существует также нетривиальный собственный вектор $\mathbf{l}$, удовлетворяющий уравнению

$$l_i (a_{ij} - c\delta_{ij}) = 0. \quad (5.35)$$

(Это левый собственный вектор, отвечающий характеристической форме (5.10).) С учетом этого из уравнения (5.34) можно исключить члены с $u_j^{(2)}$ и получить

$$l_i \frac{du_i^{(1)}}{dt} + l_i \frac{\partial a_{ij}}{\partial u_k} u_j^{(1)} u_k^{(1)} + l_i \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x} + \frac{\partial b_i}{\partial u_j} \right) u_j^{(1)} = 0. \quad (5.36)$$

Наконец, подставляя сюда выражения (5.33) для $u_j^{(1)}$, приходим к уравнению

$$l_i L_i \frac{d\sigma}{dt} + Q\sigma^2 + P\sigma = 0, \quad (5.37)$$

где $l_i L_i$, Q и P — известные функции от t .

Для гиперболических систем можно показать, что $l_i L_i \neq 0$. В других случаях, однако, может оказаться, что $l_i L_i = 0$, $Q = 0$, $P \neq 0$, и придется заключить, что $\sigma = 0$, т. е. что разрывы невозможны. Например, для системы

$$\begin{aligned} u_t - v &= 0, \\ v_t - u_x &= 0, \end{aligned}$$

эквивалентной уравнению теплопроводности, в котором t и x переставлены для того, чтобы привести ее к каноническому виду (5.9), двойными характеристиками являются прямые $x = \text{const}$. Однако $\mathbf{l} = (1, 0)$, $\mathbf{L} = (0, 1)$, $Q = 0$, $P = -1$, так что разрывы невозможны.

Для гиперболических систем уравнение (5.37) записывается так:

$$\frac{d\sigma}{dt} + q\sigma^2 + p\sigma = 0. \quad (5.38)$$

Это уравнение Риккати, которое можно решить в явном виде и найти изменение σ (а следовательно, и $u_j^{(1)}$) вдоль волнового фронта.

Если исходная система линейна, то коэффициенты a_i не зависят от u и квадратичный член отсутствует. Тогда решением является

$$\sigma(t) = \sigma(0) e^{-p_1(t)}, \quad p_1(t) = \int_0^t p(t') dt', \quad (5.39)$$

где $\sigma(0)$ определяется начальными условиями. Заметим, в частности, что разрывы в решении могут появиться только как следствие соответствующих разрывов граничных и начальных условий. Более того, раз появившись, они не могут исчезнуть за конечный интервал времени.

Для нелинейных систем с $q \neq 0$ уравнение (5.38) можно переписать следующим образом:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\sigma} \right) - \frac{p}{\sigma} - q = 0;$$

тогда решение имеет вид

$$\frac{1}{\sigma} = \frac{e^{p_1(t)}}{\sigma(0)} + e^{p_1(t)} \int_0^t q(t') e^{-p_1(t')} dt'. \quad (5.40)$$

Снова разрывы, однажды появившись, не могут исчезнуть за конечный интервал времени, они могут лишь стремиться к нулю при $t \rightarrow \infty$. Однако в нелинейном случае открывается новая возможность, состоящая в том, что $\sigma \rightarrow \infty$ при *конечном* значении t . Реализация этой возможности зависит от знаков $p(t)$, $q(t)$ и от величины $\sigma(0)$. Пусть, например, речь идет об уравнении

$$\frac{d\sigma}{dt} = \nu \sigma^2 - \mu \sigma, \quad (5.41)$$

где μ , ν — положительные постоянные и $\sigma(0) = \sigma_0 > 0$. Если $\sigma_0 < \mu/\nu$, то правая часть уравнения (5.41) в начальный момент отрицательна, так что σ начинает убывать. Но тогда правая часть остается всегда отрицательной и σ продолжает убывать. В пределе $\sigma \rightarrow 0$ как $e^{-\mu t}$ при $t \rightarrow \infty$. Однако если $\sigma_0 > \mu/\nu$, то справедливо обратное и σ монотонно возрастает. Со временем член $\nu \sigma^2$ начинает доминировать и в результате $\sigma \rightarrow \infty$ при *конечном значении времени*. Решение можно записать в следующем явном виде:

$$\sigma(t) = \frac{\mu}{\nu} \frac{\sigma_0}{\sigma_0 - (\sigma_0 - \mu/\nu) e^{\mu t}}. \quad (5.42)$$

Если $\sigma_0 - \mu/\nu > 0$, то $\sigma \rightarrow \infty$ при

$$t \rightarrow \frac{1}{\mu} \ln \frac{\sigma_0}{\sigma_0 - \mu/\nu}. \quad (5.43)$$

Этот результат предсказывает нелинейное опрокидывание волнового фронта и возникновение после этого ударной волны с разрывами самих функций u_j . Хотя это рассуждение об опрокидывании и критерий вида (5.43) ограничены частным случаем волны с разрывной производной, они все же чрезвычайно ценны, поскольку в данном случае все выкладки всегда можно провести в явном виде. Функции $p(t)$ и $q(t)$, входящие в уравнение (5.38), зависят только от коэффициентов a_{ij} и b_i , и для решения этого уравнения вовсе не требуется построение решения во всей плоскости течения. Непрерывный профиль ведет себя несколько иначе, но мы получаем приблизительную оценку величин производных, нужных для возникновения опрокидывания, а также оценку времени образования разрыва. Вывести точный критерий опрокидывания на основе явной формулы для непрерывного профиля оказывается, как правило, невозможным.

5.7. Пример. Речные волны

В качестве интересного примера разложения вблизи волнового фронта рассмотрим уравнения речных волн, обсуждавшиеся в § 3.2. Они имеют вид

$$\begin{aligned} h_t + v h_x + h v_x &= 0, \\ v_t + v v_x + g' h_x &= g' S - C_f \frac{v^2}{h}. \end{aligned} \quad (5.44)$$

В равномерном потоке величины $h = h_0$, $v = v_0$ и $g' S = C_f v_0^2 / h_0$ постоянны. Волновой фронт имеет в этом случае постоянную скорость, так что положим $\xi = x - ct$. Решение за волновым фронтом ищем в виде рядов

$$\begin{aligned} h &= h_0 + \xi h_1(t) + \frac{1}{2} \xi^2 h_2(t) + \dots, \\ v &= v_0 + \xi v_1(t) + \frac{1}{2} \xi^2 v_2(t) + \dots. \end{aligned}$$

Подставляя эти разложения в уравнения (5.44) и последовательно приравнявая члены с одинаковыми степенями ξ , получаем

$$\begin{aligned} (v_0 - c) h_1 + h_0 v_1 &= 0, \\ g' h_1 + (v_0 - c) v_1 &= 0; \end{aligned} \quad (5.45)$$

$$(v_0 - c) h_2 + h_0 v_2 + \frac{dh_1}{dt} + 2v_1 h_1 = 0, \quad (5.46)$$

$$g' h_2 + (v_0 - c) v_2 + \frac{dv_1}{dt} + v_1^2 + g' S \left(\frac{2v_1}{v_0} - \frac{h_1}{h_0} \right) = 0$$

и т. д. Из первых двух уравнений имеем

$$(c - v_0)^2 = g' h_0, \quad (5.47)$$

так что скорость распространения фронта волны составляет

$$c = v_0 \pm \sqrt{g'h_0}; \quad (5.48)$$

кроме того,

$$v_1 = \frac{(c - v_0) h_1}{h_0}. \quad (5.49)$$

Соотношение (5.47) позволяет исключить из уравнений (5.46) h_2 и v_2 . Полученное уравнение имеет вид

$$g' \frac{dh_1}{dt} + 2g'v_1h_1 + (c - v_0) \left\{ \frac{dv_1}{dt} + v_1^2 + g'S \left(\frac{2v_1}{v_0} - \frac{h_1}{h_0} \right) \right\} = 0.$$

Исключив v_1 при помощи формулы (5.49), окончательно получим

$$\frac{dh_1}{dt} + \frac{3}{2} (c - v_0) \frac{h_1^2}{h_0} + \frac{S}{v_0} (c - v_0) \left(c - \frac{3}{2} v_0 \right) \frac{h_1}{h_0} = 0. \quad (5.50)$$

Величина $h_1(t)$ совпадает с производной h_x на волновом фронте.

Рассмотрим теперь различные частные случаи.

Волны на мелкой воде

В обычной теории мелкой воды в уравнениях (5.44) отсутствуют члены, характеризующие наклон и трение, и уравнение (5.50) принимает вид

$$\frac{dh_1}{dt} = -\frac{3}{2} (c - v_0) \frac{h_1^2}{h_0}.$$

Волны, распространяющиеся вниз по течению ($c = v_0 + \sqrt{g'h_0}$), опрокидываются, если $h_1 < 0$; волны, распространяющиеся вверх по течению ($c = v_0 - \sqrt{g'h_0}$), опрокидываются, если $h_1 > 0$.

Паводковые волны

Для паводковых волн, распространяющихся вниз по течению, $c = v_0 + \sqrt{g'h_0}$ и уравнение (5.50) записывается так:

$$\frac{dh_1}{dt} = -\frac{3}{2} \sqrt{\frac{g'}{h_0}} h_1^2 - \frac{g'S}{v_0} \left(1 - \frac{v_0}{2\sqrt{g'h_0}} \right) h_1. \quad (5.51)$$

Если $v_0/\sqrt{g'h_0} > 2$, то линейный член указывает на экспоненциальное возрастание независимо от знака h_1 . Это свидетельствует о неустойчивости равномерного потока при таких условиях и согласуется с результатом, полученным из (3.44). Если же $v_0/\sqrt{g'h_0} < 2$, то линейный член указывает на экспоненциальное убывание, отвечающее устойчивости. Однако если $h_1(0) < 0$ и

$$|h_1(0)| > \frac{2}{3} \frac{S \sqrt{g'h_0}}{v_0} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v_0}{\sqrt{g'h_0}} \right),$$

то $dh_1/dt < 0$ и $h_1 \rightarrow -\infty$ при конечном значении времени, что соответствует нелинейному опрокидыванию волнового фронта и образованию бора на фронте волны. Это согласуется с анализом, проведенным в § 3.2, где было показано, что достаточно сильной паводковой волне предшествует бора.

Приливно-борная волна

Для волны, распространяющейся вверх по течению, $c = v_0 - \sqrt{g'h_0}$ и уравнение (5.50) принимает вид

$$\frac{dh_1}{dt} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{g'}{h_0}} h_1^2 - \frac{g'S}{v_0} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v_0}{\sqrt{g'h_0}} \right) h_1.$$

Волна с положительным h_1 будет опрокидываться, если

$$h_1(0) > \frac{2}{3} \frac{S \sqrt{g'h_0}}{v_0} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v_0}{\sqrt{g'h_0}} \right). \quad (5.52)$$

Полученная оценка значения $h_1(0)$, приводящего к образованию бора, особенно интересна ввиду того хорошо известного факта, что приливно-борная волна возникает лишь в сравнительно малочисленных реках с достаточно высокой приливной волной в устье. Проведенный здесь анализ ограничен волновым фронтом, тогда как для описания приливной бора более подходит первоначально гладкий синусоидальный профиль. Однако при этом обнаруживаются достоинства аналитического результата: можно в явном виде установить зависимость от различных параметров, можно предсказать асимптотическое поведение для больших величин x и t и т. д.!

В непрерывном случае, для которого нельзя получить аналитическое решение, для установления четкого критерия могут потребоваться обширные численные расчеты. Поэтому предложенный выше подход дает полезные оценки. Действительно, Абботт [1], использовавший подобный анализ и детально применивший его к реке Северн, обнаружил удивительно хорошее согласование с наблюдениями. (Фактически Абботт в своей работе использовал теорию высокочастотных приближений, но оба подхода математически эквивалентны. Более того, последний подход менее оправдан, так как приливные изменения являются низкочастотными и можно оспаривать утверждение, что опрокидывание определяется только высокочастотными эффектами.)

Важно, однако, обобщить условие (5.52) так, чтобы учесть неоднородность потока и топографию невозмущенного состояния реки. Сужение реки вверх по течению особенно существенно для получения действительных оценок, поскольку оно способствует опрокидыванию волн и преодолению обычно доминирующего гасящего действия сил трения. Детали можно найти в статье Абботта.

С целью применения результатов о волновом фронте мы используем максимальную скорость изменения высоты приливной волны для определения $h_1(0)$. Если высота приливной волны в устье реки составляет

$$h = h_0 + a \sin \omega t,$$

то максимальное значение производной h_t равно $a\omega$. В разрывной теории исходное значение h_t на волновом фронте равно $(\sqrt{g'h_0} - v_0) h_1(0)$. Положим поэтому

$$h_1(0) = \frac{a\omega}{\sqrt{g'h_0} - v_0}.$$

Для однородного канала условие (5.52) предсказывает образование боры в случае, когда

$$a\omega > \frac{2S}{3v_0} (\sqrt{g'h_0} - v_0) \left(\sqrt{g'h_0} + \frac{1}{2} v_0 \right).$$

Используя равенство $g'S = C_f v_0^2 / h_0$, эту формулу можно переписать в различных видах и наиболее удачным является, пожалуй, следующий:

$$a\omega > \frac{2}{3} C_f v_0 \left(1 - \frac{v_0}{\sqrt{g'h_0}} \right) \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v_0}{\sqrt{g'h_0}} \right). \quad (5.53)$$

Для рек величина $v_0 / \sqrt{g'h_0}$ довольно мала, так что правую часть можно аппроксимировать первым сомножителем. Для типичных значений $v_0 = 5$ футов в секунду и $C_f = 0,006$ это выражение дает для a недостижимое значение порядка 100 футов. Эффекты сужения и другие факторы значительно снижают эту величину, хотя все же необходимы исключительно высокие приливы и быстро изменяющаяся топография. Именно по этой причине так мало рек, в которых возникают боры. Для реки Северн Абботт установил, что с учетом всех нелинейных эффектов требуемая величина высоты прилива $2a$ равна 39,4 фута. Сизигийные приливы имеют среднюю высоту 41,4 фута, тогда как средняя высота квадратурных приливов составляет 22,2 фута. Таким образом, Абботт предсказывает, что бора должна образовываться в течение примерно четырех дней во время наиболее высоких приливов. Это, по-видимому, подтверждается наблюдениями. Его оценки расстояния вверх по течению, на котором образуется бора, и ее максимальной высоты также хорошо согласуются с наблюдениями.

5.8. Ударные волны

Ситуация, возникающая в связи с опрокидыванием волн и формированием ударных волн, во многих отношениях почти та же, что в случае одного квазилинейного уравнения. Некоторые решения, первоначально однозначные и даже непрерывные, переходят

в многозначные: волны опрокидываются. Это снова интерпретируется как неадекватность предположений, лежащих в основе вывода системы (5.1); однако, допустив разрывные решения, можно хорошо аппроксимировать характерные черты профиля.

Мы опять будем считать, что при выводе дифференциальных уравнений исходными были соответствующие уравнения в интегральной форме

$$\frac{d}{dt} \int_{x_2}^{x_1} f_i dx + [g_i]_{x_2}^{x_1} + \int_{x_2}^{x_1} h_i dx = 0, \quad (5.54)$$

где f_i , g_i и h_i — различные величины, представляющие интерес в данной физической задаче. Например, в задачах механики f_i и g_i могут быть плотностью и потоком массы, или плотностью и потоком импульса, или плотностью и потоком энергии. Величина h_i описывает распределенные источники, такие, как импульс массовых сил в законе сохранения импульса. Уравнение (5.54) представляет собой закон сохранения рассматриваемой физической величины (массы, импульса, энергии и т. д.).

Плотности f_i являются функциями от (x, t) и n основных переменных $u = (u_1, \dots, u_n)$; в общем случае получается n уравнений (5.54), описывающих соответствующие физические законы. Затем делаются различные упрощающие предположения, связывающие g_i и h_i с x, t и u . В первом приближении g_i и h_i будут просто функциями от x, t и u . Если u имеет непрерывные первые производные, то уравнение (5.54) можно записать в дифференциальной форме

$$\frac{\partial f_i(x, t, u)}{\partial t} + \frac{\partial g_i(x, t, u)}{\partial x} + h_i(x, t, u) = 0. \quad (5.55)$$

Это закон сохранения в дифференциальной форме.

Если необходимо ввести в рассмотрение разрывы u , то следует использовать интегральную форму (5.54), причем вопрос о зависимости g_i и h_i от u сначала остается открытым. Если в точке $x = s(t)$ возникает разрывная ударная волна, то те же самые рассуждения, что и в § 2.3, дают условия на разрыве

$$-U [f_i] + [g_i] = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (5.56)$$

где U — скорость распространения разрыва $s(t)$. Затем можно ожидать, что по обе стороны разрыва еще с достаточной точностью выполняются соотношения

$$g_i = g_i(x, t, u), \quad h_i = h_i(x, t, u),$$

справедливые в областях непрерывности решения. Следовательно, условия (5.56) применимы с той же самой функциональной зависимостью g_i от u . Как и в гл. 2, более тщательный выбор g_i связан с введением производных от u , и разрывы переходят в узкие обла-

сти резкого изменения. Однако разрывная теория проще и обычно оказывается удовлетворительной.

Формальное определение *слабого решения* системы (5.55), приводящее к условиям на разрыве (5.56), почти полностью повторяет рассуждения, проведенные в § 2.7. Вычисляя производные, входящие в уравнение (5.55), получаем систему (5.1), причем

$$A_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial u_j}, \quad a_{ij} = \frac{\partial g_i}{\partial u_j}. \quad (5.57)$$

Понятие слабого решения применимо лишь к этим частным уравнениям вида законов сохранения. Более того, надо особо подчеркнуть важное обстоятельство отсутствия единственности. В типичных примерах, связанных с системой вида (5.1), можно найти более n различных уравнений в форме закона сохранения (5.55). Условия на разрыве (5.56), полученные при выборе каких-либо n из них, математически будут удовлетворяться, но правильное решение задачи дадут только те n уравнений, которые соответствуют исходным физическим законам (5.54). Хороший пример такой неединственности возникает в газовой динамике (см. гл. 6). Из-за такой неединственности мы особенно подчеркиваем здесь связь с физическими законами.

5.9. Системы с бóльшим числом независимых переменных

Обсудим вкратце ситуацию для квазилинейных уравнений с m независимыми переменными в случае, когда $m > 2$. Систему можно записать в виде

$$a_{ij}^v \frac{\partial u_j}{\partial x^v} + b_i = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (5.58)$$

где зависимые переменные u_j являются функциями от m независимых переменных $x^1, x^2, \dots, x^m$ и суммирование проводится по $v = 1, \dots, m$ и $j = 1, \dots, n$. Аналогами характеристик, рассмотренных выше для $m = 2$, служат характеристические поверхности в m -мерном x -пространстве. Их можно ввести примерно так же, как и раньше, и они сохраняют некоторые свойства характеристик. Однако их роль в построении решения существенно более ограничена.

Это ограничение связано с тем, что в общем случае нет оснований ожидать, что найдутся такие линейные комбинации уравнений (5.58), в которых производные от u_j будут производными по одному и тому же направлению. Для этого на систему или на решения следует наложить условия, которые выполняются лишь в исключительных случаях. В данном случае аналогом следует считать

случай, когда рассматриваемые направления лежат на $(m - 1)$ -мерном поверхностном элементе. Если подходящая линейная комбинация имеет вид

$$l_i a_{ij}^v \frac{\partial u_j}{\partial x^v} + l_i b_i = 0 \quad (5.59)$$

и поверхностный элемент лежит на поверхности $S(\mathbf{x}) = \text{const}$, то вектор нормали к этой поверхности имеет компоненты $\partial S / \partial x^v$ и условие ортогональности записывается так:

$$l_i a_{ij}^v \frac{\partial S}{\partial x^v} = 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (5.60)$$

Для существования нетривиального вектора $\mathbf{l}$ необходимо, чтобы выполнялось условие

$$\left| a_{ij}^v \frac{\partial S}{\partial x^v} \right| = 0. \quad (5.61)$$

Поверхности, обладающие этим свойством, называются *характеристическими поверхностями*. Система снова называется гиперболической, если существуют n независимых уравнений вида (5.59) с таким свойством. Обычно им отвечают n различных характеристических поверхностей, но это не обязательно: достаточно потребовать существования полной системы из n независимых векторов $\mathbf{l}$. Однако этот выбор не упрощает решения системы в той степени, как это было в случае $m = 2$, поскольку на каждой из поверхностей все же остается $m - 1$ связанное направление.

Ввиду этого основное свойство характеристических поверхностей в задачах о распространении волн состоит в том, что на них находятся особенности решения и, в частности, они описывают волновые фронты. Положим так же, как и в § 5.5, что $S(\mathbf{x}) = 0$ — поверхность, при переходе через которую u_j остаются непрерывными, а $\partial u_j / \partial x^v$ могут иметь разрыв первого рода. Из непрерывности u_j следует, что все касательные производные должны оставаться непрерывными, так что только нормальные производные могут претерпевать разрыв. Пусть поверхность $S = 0$ входит в семейство поверхностей $S = \text{const}$, так что S можно использовать для построения локальной системы координат, выбрав остальные $m - 1$ координат произвольным образом; тогда разрывные производные имеют вид $\partial u_j / \partial S$. Следуя рассуждениям, проведенным для случая $m = 2$, получаем

$$a_{ij}^v \frac{\partial S}{\partial x^v} \left[\frac{\partial u_j}{\partial S} \right] = 0. \quad (5.62)$$

Следовательно, разрывы могут возникать лишь на поверхностях, удовлетворяющих уравнению

$$\left| a_{ij}^v \frac{\partial S}{\partial x^v} \right| = 0. \quad (5.63)$$

Это уравнение совпадает с уравнением (5.61), определяющим характеристические поверхности. Уравнения (5.62) и (5.63) являются обобщением уравнений (5.20) и (5.21). Как и ранее, можно получить дальнейшие соотношения для скачков $[\partial u_j / \partial S]$.

5.10. Уравнения второго порядка

Линейные уравнения второго порядка, имеющие вид

$$A_{ij} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} + B_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + C\varphi = 0, \quad (5.64)$$

встречаются часто, и даже в случае двух независимых переменных обычно удобнее оставлять их в таком виде, чем работать с соответствующей системой первого порядка. Действительно, как мы видели в § 5.2, могут возникнуть трудности, связанные с нахождением *подходящей* эквивалентной системы, если, конечно, уравнение (5.64) не было получено из такой системы.

Существует много подходов к классификации уравнений вида (5.64). В задачах о распространении волн важным вопросом является возможность существования волнового фронта, несущего разрывы производных, и это дает простейшую связь, указывающую на согласованность с анализом, проведенным для систем первого порядка. Очевидно, что в тех случаях, когда уравнение (5.64) получается из соответствующей эквивалентной системы, определения гиперболичности должны совпадать. Подробное доказательство согласованности здесь не приводится, но выбор такого подхода указывает на тесную связь.

Итак, рассмотрим возможность существования разрывов первого рода у вторых производных функции φ . Если эти разрывы находятся на поверхности $S(\mathbf{x}) = 0$, причем φ и $\partial \varphi / \partial x_i$ остаются непрерывными, то, как и выше, можно ввести локальные координаты, исходя из уравнения $S(\mathbf{x}) = 0$, и показать, что $\partial^2 \varphi / \partial S^2$ разрывна, тогда как остальные производные второго порядка остаются непрерывными. Затем взяв разность пределов уравнения (5.64) с обеих сторон поверхности $S = 0$, получим

$$A_{ij} \frac{\partial S}{\partial x_i} \frac{\partial S}{\partial x_j} \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial S^2} \right] = 0. \quad (5.65)$$

Поскольку $[\partial^2 \varphi / \partial S^2] \neq 0$, отсюда вытекает необходимое условие существования разрыва:

$$A_{ij} \frac{\partial S}{\partial x_i} \frac{\partial S}{\partial x_j} = 0. \quad (5.66)$$

Можно показать, что разрывы производных первого порядка и даже самой функции φ (поскольку уравнение линейно) также

ограничены такими поверхностями. Но для этого необходимо более тщательное обсуждение, включающее вопрос об уточнении понятия решения, и мы его отложим до § 7.7, где оно будет необходимо.

Таким образом, классификация определяется квадратичной формой $A_{ij}\xi_i\xi_j$. В каждой точке x при помощи некоторого линейного преобразования ее можно привести к виду

$$a_1\xi_1^2 + \dots + a_m\xi_m^2. \quad (5.67)$$

Если все коэффициенты a_i имеют один и тот же знак, то, очевидно, уравнение (5.66) не имеет решения; в такой точке уравнение называется *эллиптическим*. Если некоторые из коэффициентов a_i равны нулю, то уравнение *параболическое*; в обычном случае один из a_i равен нулю, а остальные имеют один и тот же знак. Если все a_i отличны от нуля, но не все имеют одинаковые знаки, то имеем так называемое *ультрагиперболическое* уравнение. В приложениях встречается только случай, когда $m-1$ из m коэффициентов a_i имеют один и тот же знак и лишь один коэффициент имеет противоположный знак. Объяснение этого факта состоит в том, что в противном случае поверхности, описываемые уравнением (5.66), имели бы необычные геометрические свойства и не могли бы, например, описывать простую интуитивно ясную картину распространения волнового фронта. В соответствии с этим гиперболические уравнения ограничиваются этим случаем.

Для того чтобы не связывать эту классификацию с теорией разрывов, следует всего лишь заметить, что линейное преобразование, необходимое для приведения квадратичной формы $A_{ij}\xi_i\xi_j$ к виду (5.67), можно также использовать для введения локального преобразования координат, приводящего старший член уравнения (5.64) к виду

$$a_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X_1^2} + \dots + a_m \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X_m^2}.$$

Эти рассуждения никак не связаны с вопросом о разрывах, а классификация, как и ранее, определяется знаками коэффициентов a_i в этом члене.

Наше рассмотрение было намеренно кратким, поскольку оно никак не связано с вопросами, рассматриваемыми ниже в этой книге. Дальнейшие подробности можно найти во многих превосходных курсах по общей теории уравнений в частных производных, таких, как книга Куранта и Гильберта [1] или Петровского [1].

Глава 6

ГАЗОВАЯ ДИНАМИКА

Как было указано в гл. 1, многие из основных идей теории гиперболических волн, в частности объяснение явления формирования ударной волны, обязаны своим происхождением газовой динамике. Настоящая глава посвящена обсуждению волн и ударных волн в газовой динамике. В ней даются естественные иллюстрации общих идей, развитых в предыдущей главе, и добавляется ряд усиленных и обобщений, которые можно продемонстрировать только на конкретных задачах. Но, конечно, газовая динамика важна и интересна сама по себе, так что эта глава написана как законченное введение в предмет, а не только как иллюстрация математической теории. Более специальные вопросы рассматриваются в следующих главах, и в целом этот материал дает широкий обзор газовой динамики. Читатель, интересующийся лишь общей теорией волн, может ограничиться беглым просмотром этой главы.

6.1. Уравнения движения

Уравнения движения сжимаемой жидкости выводятся из законов сохранения массы, количества движения (импульса) и энергии в любом выделенном объеме жидкости. В каждом из этих законов вводятся свои собственные переменные, описывающие баланс. Для описания потока массы требуются две величины: плотность $\rho(\mathbf{x}, t)$ и вектор скорости $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ в точке $\mathbf{x}$ в момент времени t . В закон сохранения количества движения входят дополнительные величины, описывающие действующие на жидкость силы. Это может быть массовая сила, обычно сила тяжести, действующая на всю жидкость по всему объему. Такая сила, отнесенная к единице массы, обозначается вектором $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$; соответствующая сила тяжести равна ускорению свободного падения g , умноженному на единичный вектор, направленный по вертикали.

На жидкость действуют также напряжения, приложенные на границе выбранного ее объема. Напряжение, действующее на какой-либо малый элемент граничной поверхности, считается пропорциональным площади этого элемента. В общем случае оно зависит также от ориентации элемента поверхности. Следовательно, сила, действующая на единичную поверхность, будет функцией от точки приложения $\mathbf{x}$, времени t и единичного вектора $\mathbf{l}$, нор-

мального к данному элементу поверхности. Стандартные рассуждения, которые мы уточним ниже, показывают, что i -ю компоненту p_i напряжения можно записать в виде

$$p_i = p_{ji}l_j \quad (\text{суммирование по } j), \quad (6.1)$$

где величины $p_{ji}(\mathbf{x}, t)$ зависят только от точки $\mathbf{x}$ и времени t . Поскольку p_i и l_i — векторы, компоненты p_{ji} образуют тензор, называемый *тензором напряжений* в точке $(\mathbf{x}, t)$. Величина p_{ji} представляет собой i -ю компоненту силы, действующей на единичный элемент поверхности, нормальный к j -му направлению.

В законе сохранения энергии вводятся дальнейшие переменные. Жидкость обладает внутренней энергией, связанной с тепловым движением молекул. В теории сплошной среды эта энергия, отнесенная к единице массы, обозначается через $e(\mathbf{x}, t)$. Существует также тепловой поток через границу, и его величина, отнесенная к единице площади поверхности, обозначается вектором $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$.

Теперь мы в состоянии выписать законы сохранения, хотя они не образуют полную систему, поскольку в них неизвестных больше, чем уравнений. Рассмотрим произвольный фиксированный объем V области, занятой жидкостью, и выведем полные уравнения баланса для этого объема, учитывая перенос жидкости через граничную поверхность S . Согласно закону сохранения массы, скорость изменения полной массы в объеме V , равной

$$\int_V \rho dV,$$

уравновешивается потоком через S . Если $\mathbf{l}$ — вектор внешней нормали к S , то нормальная компонента скорости через S равна $l_j u_j$; поэтому

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV + \int_S \rho l_j u_j dS = 0. \quad (6.2)$$

Аналогичным образом уравнение полного баланса для i -й компоненты количества движения имеет вид

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho u_i dV + \int_S (\rho u_i l_j u_j - p_i) dS = \int_V \rho F_i dV. \quad (6.3)$$

Первый член левой части описывает скорость изменения количества движения жидкости в объеме V , второй — перенос количества движения через граничную поверхность, третий — скорость изменения количества движения за счет действующих на поверхности S напряжений p_i , а выражение в правой части — количество движения, порожденное силами, действующими в объеме V .

Плотность полной энергии (полная энергия, приходящаяся на единицу объема) состоит из суммы кинетической энергии $1/2 \rho u_i^2$

макроскопического движения и внутренней энергии ρe молекулярного движения. Уравнение баланса энергии имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \left(\frac{1}{2} \rho u_i^2 + \rho e \right) dV + \\ + \int_S \left\{ \left(\frac{1}{2} \rho u_i^2 + \rho e \right) l_j u_j - p_i u_i + l_j q_j \right\} dS = \\ = \int_V \rho F_i u_i dV. \quad (6.4) \end{aligned}$$

В интеграле по поверхности первый член снова соответствует вкладу переноса жидкости через границу, второй — работе, совершаемой напряжениями p_i на границе, а третий — потере или приросту тепла за счет теплового потока через границу. Выражение в правой части соответствует работе массовых сил.

Если параметры течения могут иметь разрывы, то необходимо использовать эти уравнения в интегральной форме. Для одномерных задач интегралы по объему переходят в интегралы по x , скажем от x_2 до x_1 , а интегралы по поверхности сводятся к разности подынтегральных выражений в точках x_2 и x_1 , так что уравнения принимают вид (5.54), указанный выше при рассмотрении ударных волн. Однако в большей части занимаемой жидкостью области эти параметры будут непрерывно дифференцируемыми, так что можно перейти к пределу, когда объем V стягивается к точке, и получить соответствующие дифференциальные уравнения. В уравнениях (6.2) — (6.4) дифференцирование по времени можно провести под знаком интеграла по объему, поскольку V не зависит от t , а интегралы по поверхности можно преобразовать в интегралы по объему при помощи теоремы о дивергенции:

$$\int_S l_j v_j dS = \int_V \frac{\partial v_j}{\partial x_j} dV, \quad (6.5)$$

где v_j — произвольный непрерывно дифференцируемый вектор, а V — достаточно гладкая область. Таким образом, уравнение (6.2) можно переписать в виде

$$\int_V \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j) \right\} dV = 0. \quad (6.6)$$

Поскольку подынтегральное выражение непрерывно и уравнение (6.6) выполняется для сколь угодно малого объема V , мы приходим к выводу, что

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j) = 0. \quad (6.7)$$

(Если бы это выражение было отличным от нуля в какой-либо точке, то, в силу непрерывности, оно сохраняло бы знак в некотором малом объеме V и равенство (6.6) не выполнялось бы.) При подстановке выражения (6.1) в уравнения (6.3) и (6.4) последние аналогичным образом приводятся к следующему виду:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j - p_{ji}) = \rho F_i \quad (6.8)$$

и

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho u_i^2 + \rho e \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \left(\frac{1}{2} \rho u_i^2 + \rho e \right) u_j - p_{ji} u_i + q_j \right\} = \rho F_i u_i. \quad (6.9)$$

При выводе формулы (6.1) обычно пользуются рассуждениями, которые по существу являются первым приближением к (6.3). Если наибольшее расстояние между точками, принадлежащими объему V , равно d , то величина объема V представляет собой $O(d^3)$. Тогда, в силу теоремы о среднем, интеграл по этому объему от любой непрерывной функции равен $O(d^3)$. Первый интеграл по поверхности в уравнении (6.3) равен соответствующему интегралу по объему, согласно теореме о дивергенции (6.5) и, следовательно, также является $O(d^3)$. Таким образом, из уравнения (6.3) следует, что

$$\int_S p_i dS = O(d^3) \quad (6.10)$$

для всех S . Соотношение (6.1), очевидно, является достаточным, поскольку можно использовать теорему о дивергенции. Для доказательства необходимости условия (6.1) определим сначала величины p_{ji} при $j = 1, 2, 3$ как значения p_i для элемента поверхности, перпендикулярного к осям x_1 , x_2 и x_3 соответственно. Применим соотношение (6.10) к частному случаю малого тетраэдра, три грани которого перпендикулярны трем осям координат. Если четвертая грань имеет единичную нормаль $\mathbf{l}$ и площадь ΔS , то площади остальных трех граней равны проекциям $l_1 \Delta S$, $l_2 \Delta S$ и $l_3 \Delta S$. Тогда из (6.10) следует, что

$$p_i(\mathbf{l}) \Delta S = p_{1i} l_1 \Delta S + p_{2i} l_2 \Delta S + p_{3i} l_3 \Delta S + O(d^3),$$

где $p_i(\mathbf{l})$ и p_{ji} взяты в некоторых определяемых теоремой о среднем точках, лежащих на соответствующих гранях. В пределе $d \rightarrow 0$ имеем

$$p_i(\mathbf{l}) = p_{1i} l_1 + p_{2i} l_2 + p_{3i} l_3,$$

что согласуется с равенством (6.1). Это довольно неэлегантное доказательство, но, по-видимому, его нельзя существенно улучшить.

В связи с уравнениями сохранения естественно спросить, что новое вносит закон сохранения момента количества движения (кинетического момента). Например, мы имели бы для x_3 -компоненты кинетического момента

$$\frac{\partial}{\partial t} (x_1 \rho u_2 - x_2 \rho u_1) + \frac{\partial}{\partial x_j} \{ (x_1 \rho u_2 - x_2 \rho u_1) u_j - (x_1 p_{j2} - x_2 p_{j1}) \} = x_1 \rho F_2 - x_2 \rho F_1 \quad (6.11)$$

и аналогичные выражения для других компонент. Если теперь в (6.11) подставить (6.8), то большая часть членов взаимно уничтожится и останется равенство

$$p_{12} = p_{21}.$$

Таким образом, закон сохранения кинетического момента приводит к симметрии тензора напряжений

$$p_{ji} = p_{ij}. \quad (6.12)$$

Это ценная информация, однако она является второстепенной по сравнению с остальными уравнениями.

Уравнения (6.7) — (6.9) дают пять соотношений для четырнадцати величин ρ , u_i , p_{ji} , q_i , e . Для того чтобы система стала полной, на эти переменные накладываются различные дополнительные соотношения.

6.2. Точка зрения кинетической теории

Чтобы лучше понять сущность различных членов в уравнениях сохранения (6.7) — (6.9), выясним, что они представляют собой с точки зрения молекулярной теории. Скорости молекул распределены в некотором интервале, и параметры течения связаны с функцией распределения $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$, которая определяется так, что величина

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) dx_1 dx_2 dx_3 dv_1 dv_2 dv_3$$

представляет собой вероятное число молекул в элементе объема $dx_1 dx_2 dx_3$ с центром в точке $\mathbf{x}$ и со скоростями в области $dv_1 dv_2 dv_3$ с центром в точке $\mathbf{v}$. Плотность и макроскопическая скорость $\mathbf{u}$ определяются равенствами

$$\rho = \int_{-\infty}^{\infty} m f d\mathbf{v}, \quad \rho u_i = \int_{-\infty}^{\infty} m v_i f d\mathbf{v}, \quad (6.13)$$

где m — масса одной молекулы и $\int d\mathbf{v}$ — тройной интеграл по всем значениям v_1, v_2, v_3 . Полный поток i -й компоненты импульса

через поверхность с вектором нормали $\mathbf{l}$ составляет

$$\int_{-\infty}^{\infty} m v_i (l_j v_j) f d\mathbf{v}. \quad (6.14)$$

Положим $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{c}$, так что $\mathbf{c}$ равно отклонению молекулярной скорости от средней скорости $\mathbf{u}$, определяемой равенством (6.13); тогда последнее выражение можно записать так:

$$l_j \left(u_i u_j \int_{-\infty}^{\infty} m f d\mathbf{c} + u_i \int_{-\infty}^{\infty} m c_j f d\mathbf{c} + u_j \int_{-\infty}^{\infty} m c_i f d\mathbf{c} + \int_{-\infty}^{\infty} m c_i c_j f d\mathbf{c} \right).$$

В силу определения $\mathbf{c}$ как отклонения от средней скорости второй и третий члены равны нулю и остается

$$l_j \left(\rho u_i u_j + \int_{-\infty}^{\infty} m c_i c_j f d\mathbf{c} \right). \quad (6.15)$$

Для идеализированного газа, у которого межмолекулярные силы ограничены практически мгновенными соударениями молекул, это единственный вклад в интеграл по поверхности, входящий в уравнение (6.3), и, следовательно,

$$-p_i = l_j \int_{-\infty}^{\infty} m c_i c_j f d\mathbf{c}. \quad (6.16)$$

Это равенство согласуется с формулой (6.1) и позволяет записать тензор напряжений в следующем виде:

$$-p_{ji} = \int_{-\infty}^{\infty} m c_i c_j f d\mathbf{c}; \quad (6.17)$$

условие симметрии (6.12), очевидно, выполняется. Таким образом, вклад поверхностных напряжений в (6.3) можно интерпретировать как дополнительный поток импульса, создаваемый движением молекул относительно среднего.

Каждая молекула обладает кинетической энергией поступательного движения, равной $\frac{1}{2} m v_i^2$. Молекулы также могут обладать колебательной или вращательной энергией, но здесь мы рассмотрим одноатомный газ, для которого эти дополнительные формы энергии отсутствуют. В этом случае полная энергия на единицу объема составляет

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} m v_i^2 f d\mathbf{v} = \frac{1}{2} \rho u_i^2 + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} m c_i^2 f d\mathbf{c}. \quad (6.18)$$

Следовательно, в интеграле по объему в уравнении (6.4) член, описывающий внутреннюю энергию, можно интерпретировать как дополнительную энергию движения молекул относительно среднего, так что

$$\rho e = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} m c_i^2 f d\mathbf{c}. \quad (6.19)$$

Поток энергии через элемент поверхности с нормалью $\mathbf{l}$ равен

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} m v_i^2 l_j v_j f d\mathbf{v}.$$

При помощи уже введенных величин это выражение можно представить в виде

$$l_j \left(\frac{1}{2} \rho u_i^2 u_j + \rho e u_j - p_{ji} u_i + q_j \right), \quad (6.20)$$

где

$$q_j = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} m c_i^2 c_j f d\mathbf{c}. \quad (6.21)$$

Сравнивая этот результат с уравнением (6.4), видим, что выражение (6.20) совпадает с выражением для потока энергии в (6.4) и что тепловой поток $\mathbf{q}$ интерпретируется как перенос молекулами излишка молекулярной энергии.

Даже при рассмотрении идеального газа важно включить в рассмотрение колебательную и вращательную энергию, которой обладают двухатомные и более сложные молекулы. Следует добавить эту энергию к выражению (6.19), а также учесть соответствующий вклад в вектор теплового потока (6.21). Основной результат статистической механики состоит в том, что различные формы энергии достигают равновесия с равными вкладами от каждой степени свободы. Это позволит нам при необходимости обобщить результат (6.19), не вдаваясь в подробности.

Такая интерпретация напряжения, внутренней энергии и теплового потока в терминах случайного молекулярного движения показывает, что различные величины, введенные в равенствах (6.7) — (6.9), не только являются специально подобранными переменными, отражающими все важные эффекты, которые только пришли к нам в голову, но и укладываются в содержательную схему все более и более высоких моментов функции распределения по скоростям. Действительно, в собственно кинетической теории основное уравнение формулируется для f , а затем уравнения сохранения (6.7) — (6.9) выводятся как его следствия. В качестве

уравнения для f обычно принимают уравнение Больцмана или какое-либо приближение к нему.

Вернемся теперь к уравнениям сплошной среды.

6.3. Уравнения без учета вязкости, теплопередачи и релаксации

Для газа в равновесном состоянии при отсутствии массовых сил справедливо следующее.

1. Напряжение на любом элементе поверхности направлено по нормали к этому элементу и не зависит от его ориентации, так что

$$p_{ji} = -p\delta_{ji}, \quad (6.22)$$

где p — скалярное давление.

2. Тепловой поток отсутствует:

$$q_j = 0. \quad (6.23)$$

3. Внутренняя энергия является заданной функцией

$$e = e(p, \rho) \quad (6.24)$$

от давления и плотности. Вид этой функции устанавливается на основе эксперимента и различных термодинамических соображений.

Если газ неоднороден и находится в движении, то ни одно из этих соотношений, строго говоря, не выполняется. Однако если производные по времени и по пространственным переменным не слишком велики, то указанные формулы во многих случаях являются хорошим приближением. С учетом этих соотношений основные уравнения сохранения образуют полную систему уравнений для пяти параметров течения ρ, p, u_i . Эти уравнения имеют вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j) = 0, \quad (6.25)$$

$$\frac{\partial (\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_i u_j) + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho F_i, \quad (6.26)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho u_i^2 + \rho e \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \left(\frac{1}{2} \rho u_i^2 + \rho e + p \right) u_j \right\} = \rho F_i u_i. \quad (6.27)$$

В случае когда эти уравнения предсказывают ударные волны или другие области с высокими градиентами, используемые формулы, возможно, потребуют уточнения.

Первое предположение (6.22) соответствует пренебрежению влиянием вязкости и может быть улучшено в приближении Навье—Стокса добавлением членов, линейных по градиентам скорости $\partial u_j / \partial x_i$. Второе предположение (6.23) связано с пренебрежением

теплопередачей, и его можно улучшить, положив q пропорциональным градиенту температуры. Итак, в приближении Навье — Стокса формулы (6.22) и (6.23) заменяются следующими:

$$p_{ji} = -p\delta_{ji} - \frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ji} + \mu \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right), \quad (6.28)$$

$$q_i = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i}, \quad (6.29)$$

где μ и λ — коэффициенты вязкости и теплопроводности соответственно. Температура T связана с p и ρ уравнением состояния газа.

Третье предположение (6.24) означает, что газ находится в состоянии локального термодинамического равновесия. В изменяющихся течениях внутренняя энергия всегда стремится к равновесному значению, соответствующему новым условиям. Однако при этом существует некоторая задержка во времени, особенно для установления колебательной и вращательной энергии. Такое явление называется *эффектом релаксации*, а характерное время задержки — *временем релаксации*. Это интересный, но несколько частный вопрос, так что детали мы отложим и приведем в качестве примера в гл. 10.

6.4. Термодинамические соотношения

Мы могли бы просто считать, что в равенстве (6.24) $e(p, \rho)$ представляет собой некоторую известную эмпирическую функцию. Однако термодинамические соображения не только снабжают нас необходимыми формулами, но и подсказывают, какие существенные параметры надо ввести в рассмотрение. Целесообразно привести здесь только цепочку необходимых математических формулировок и отослать читателя к многочисленным стандартным курсам для обоснования результатов и выяснения их физического смысла.

Дифференциальная форма

$$de + pd \left(\frac{1}{\rho} \right) \quad (6.30)$$

играет в термодинамике фундаментальную роль. Впервые она встречается при рассмотрении последствий приобретения единичной массой газа дополнительной энергии. Если энергия добавляется сравнительно медленно, так что резкого изменения давления не происходит, то работа, совершаемая при увеличении объема $1/\rho$ на $d(1/\rho)$, равна $pd(1/\rho)$. Остальная часть энергии должна идти на увеличение внутренней энергии на de . При этих условиях выражение (6.30) равно общему количеству приобретенной энергии. Но в любом случае для заданной функции $e(p, \rho)$ это заданная

дифференциальная форма двух переменных p и ρ . Согласно теореме Пфаффа, для нее всегда существует интегрирующий множитель, т. е. существуют функции $T(p, \rho)$ и $S(p, \rho)$, такие, что

$$T dS = de + pd \left(\frac{1}{\rho} \right). \quad (6.31)$$

Это простое математическое утверждение приобретает глубокий смысл, если учесть, что T — абсолютная температура, а S — энтропия.

В более сложных системах наряду с p и ρ появляются другие термодинамические переменные (такие, как концентрация различных фаз вещества). Для таких систем дифференциальная форма, соответствующая (6.30), переходит в форму, содержащую более двух переменных. С чисто математической точки зрения тогда уже нет оснований ожидать, что всегда найдется интегрирующий множитель, приводящий эту форму к полному дифференциалу. Однако основой термодинамики является допущение, что такой интегрирующий множитель всегда существует для всех реальных физических систем и, более того, что он всегда является абсолютной температурой.

Как уже было указано выше, кроме изложенного математического обоснования, имеются более глубокие причины для введения в рассмотрение величин T и S .

Идеальный газ

При нормальных условиях для большинства газов выполняется уравнение состояния идеального газа

$$p = \mathcal{R} \rho T, \quad (6.32)$$

где $\mathcal{R}$ — постоянная. В этом случае равенство (6.31) можно переписать в виде

$$dS = \frac{de}{T} - d(\mathcal{R} \ln \rho).$$

Отсюда следует, что de/T — полный дифференциал, и, следовательно, e является функцией от одной переменной T :

$$e = e(T). \quad (6.33)$$

Интересно, что (6.33) можно вывести из предположения (6.32), хотя в действительности условие (6.33) играет более важную роль.

Уравнения (6.32) и (6.33) описывают идеальный газ. В уравнениях движения e удобно рассматривать как функцию от p и ρ . Из (6.32) следует, что для идеального газа e является функцией от p/ρ . Вид этой функции пока еще не существует, однако широкий

диапазон явлений газовой динамики описывается одной довольно простой формулой. Она получается при рассмотрении удельных теплоемкостей.

Удельные теплоемкости

В процессе медленного нагревания единичной массы газа тепло может различными способами распределяться между внутренней энергией и работой по изменению объема при условии, что сумма (6.30) равна приращению тепла. Удельная теплоемкость определяется как отношение приращения тепла в единичной массе к приращению температуры. Если газ не расширяется, то приращение тепла полностью переходит во внутреннюю энергию, откуда

$$de = c_v dT, \quad (6.34)$$

где c_v — удельная теплоемкость при постоянном объеме. Аналогичным образом, если давление остается постоянным, а газ может расширяться, то из (6.30) имеем

$$d\left(e + \frac{p}{\rho}\right) = c_p dT, \quad (6.35)$$

где c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении. Величина $e + p/\rho$, входящая сюда, а также, заметим, играющая роль потока в уравнении (6.27) представляет собой энтальпию

$$h = e + \frac{p}{\rho}. \quad (6.36)$$

Из уравнений (6.32) и (6.33) следует, что для идеального газа e , h , c_v и c_p являются функциями только от температуры.

Идеальный газ с постоянными удельными теплоемкостями

Эмпирически было обнаружено, что с достаточной точностью удельные теплоемкости можно считать постоянными в широком интервале температур. Таким образом,

$$e = c_v T, \quad h = c_p T. \quad (6.37)$$

Поскольку разность между этими величинами равна p/ρ , отсюда следует уравнение состояния (6.32), в котором

$$c_p - c_v = \mathcal{R}.$$

Введя отношение удельных теплоемкостей $\gamma = c_p/c_v$, получим

$$\begin{aligned} c_p &= \gamma c_v, \quad \mathcal{R} = (\gamma - 1) c_v, \\ e &= \frac{1}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho}, \quad h = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho}, \quad T = \frac{p}{\rho \mathcal{R}}. \end{aligned} \quad (6.38)$$

В силу этих соотношений, выражение для энтропии (6.31) принимает вид

$$dS = \frac{de}{T} + \frac{p}{T} d\left(\frac{1}{\rho}\right) = c_v \left(\frac{dp}{p} - \gamma \frac{d\rho}{\rho} \right);$$

отсюда

$$S = c_v \ln \frac{p}{\rho^\gamma} + \text{const},$$

или

$$p = \kappa \rho^\gamma e^{S/c_v}, \quad (6.39)$$

где κ — постоянная.

Идеальный газ с постоянными удельными теплоемкостями иногда называют *политропным* газом.

Кинетическая теория

В кинетической теории некоторые из приведенных выше соотношений имеют простую заслуживающую внимания интерпретацию. Прежде всего температура T характеризует среднюю кинетическую энергию, приходящуюся на одну молекулу, в поступательном движении молекул. Она нормирована так, чтобы эта энергия равнялась $3/2 kT$, где k — постоянная Больцмана. Для идеального одноатомного газа это выражение определяет всю внутреннюю энергию, так что

$$e = \frac{3}{2} kTn,$$

где n — число молекул в единичной массе. Таким образом, выражение для e в виде линейной функции от T по существу является в этом случае исходным.

В равновесном состоянии выражение (6.17) для p_{ji} должно сводиться к $-p\delta_{ji}$. Следовательно, давление можно связать с молекулярным движением формулой

$$p = -\frac{1}{3} p_{ii} = \frac{1}{3} \int_{-\infty}^{\infty} mc_i^2 f dc.$$

Но энергия поступательного движения в (6.19) содержит половину такого же интеграла и равна $3/2 kTn\rho$; отсюда имеем

$$p = k\rho T. \quad (6.40)$$

Это уравнение состояния идеального газа с $\mathcal{R} = k\rho$. Число молекул в единичной массе равно числу Авогадро N , деленному на молекулярный вес газа. Поэтому используемая нами постоянная $\mathcal{R}$ равна универсальной газовой постоянной kN , деленной на молекулярный вес газа.

Если молекулы обладают другими формами внутренней энергии, такими, как колебательная или вращательная энергия, то, в силу основных принципов кинетической теории, в равновесном состоянии на каждую степень свободы приходится одинаковая энергия. Температура определяется так, что у каждой молекулы на одну степень свободы приходится энергия, равная $\frac{1}{2} kT$. Следовательно, для трех степеней свободы поступательного движения она составляет $\frac{3}{2} kT$. Если каждая молекула имеет α степеней свободы, то средняя энергия одной молекулы равна $\frac{1}{2} \alpha kT$. Поэтому средняя энергия единичной массы равна

$$e = \frac{1}{2} \alpha kTn. \quad (6.41)$$

Выражение для p не меняется, поскольку p связано с поступательной частью энергии. Объединяя эти три различных результата, получаем

$$e = \frac{1}{2} \alpha \mathcal{R}T, \quad h = \left(\frac{1}{2} \alpha + 1 \right) \mathcal{R}T, \quad p = \mathcal{R} \rho T, \quad (6.42)$$

откуда

$$c_v = \frac{1}{2} \alpha \mathcal{R}, \quad c_p = \left(\frac{1}{2} \alpha + 1 \right) \mathcal{R}, \quad \gamma = 1 + \frac{2}{\alpha}. \quad (6.43)$$

Эти результаты согласуются по форме с полученными ранее выражениями для идеального газа с постоянными удельными теплоемкостями, но отличаются тем, что, помимо всего прочего, включают формулы для c_p , c_v , γ .

Для одноатомного газа $\alpha = 3$, $\gamma = 5/3$. Для двухатомного газа, имеющего две вращательные степени свободы, $\alpha = 5$, $\gamma = 1,4$, что является хорошим приближением для воздуха.

6.5. Иные формы уравнений движения

Уравнения сохранения в форме (6.25) — (6.27) соответствуют законам в интегральной форме (6.2) — (6.4) и понадобятся при рассмотрении ударных волн. Но для других целей эти уравнения можно упростить. Удобно ввести оператор

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

для производной по времени от величин, связанных с индивидуальной частицей. Уравнение сохранения массы (6.25) можно переписать в виде

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0. \quad (6.44)$$

Исключая из уравнения (6.26) производные от ρ (для этого используем уравнение (6.25)), получаем

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho F_i. \quad (6.45)$$

Уравнение сохранения энергии (6.27) можно записать в различных формах. Прежде всего, используя два других уравнения, его можно привести к виду

$$\rho \frac{De}{Dt} + p \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0. \quad (6.46)$$

Далее, в силу (6.44), имеем другую эквивалентную форму

$$\frac{De}{Dt} - \frac{p}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt} = 0.$$

При помощи термодинамического соотношения (6.31) это уравнение приводится к виду

$$T \frac{DS}{Dt} = 0. \quad (6.47)$$

Иначе говоря, энтропия остается постоянной вдоль траектории частицы. Течения, удовлетворяющие уравнению (6.47), обычно называются *адиабатическими*.

Следует подчеркнуть, что рассуждения, которые привели нас к (6.47), являются чисто математическими преобразованиями уравнений сохранения. В принципе таким образом можно было бы ввести «интересную величину $S(p, \rho)$ » без какого-либо предварительного знакомства с термодинамикой. Полученный таким путем результат достаточно убедителен. Вывод равенства (6.31) в термодинамике связан с бесконечно медленными обратимыми изменениями, и может показаться, что мы необоснованно используем его вне этих условий. Однако, как только сделаны предположения, что $p_{ji} = -\rho \delta_{ji}$ и $e = e(p, \rho)$, все остальное сводится к простым математическим выкладкам и следствия, такие, как уравнения (6.47), получаются без каких-либо ограничений типа малой скорости течения в термодинамическом смысле.

Поскольку из выражения для S как функции от p и ρ можно в принципе найти $p = p(\rho, S)$, можно использовать уравнение

$$\rho \frac{Dp}{Dt} = a^2 \frac{D\rho}{Dt}, \quad a^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{S=\text{const}} \quad (6.48)$$

как эквивалентную форму уравнения (6.47). Величину a будем в дальнейшем называть скоростью звука.

За исключением случаев, когда уравнения в форме законов сохранения особенно удобны, обычно работают с уравнениями (6.44), (6.45) и либо (6.47), либо (6.48). Удобно собрать их вместе

для дальнейших ссылок:

$$\begin{aligned}\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial u_j}{\partial x_j} &= 0, \\ \rho \frac{Du_i}{Dt} + \frac{\partial p}{\partial x_i} &= \rho F_i, \\ \frac{DS}{Dt} &= 0 \quad \text{или} \quad \frac{Dp}{Dt} - a^2 \frac{D\rho}{Dt} = 0.\end{aligned}\tag{6.49}$$

Для политропного газа

$$e = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho}, \quad S = c_v \ln \frac{p}{\rho^\gamma}, \quad a^2 = \frac{\gamma p}{\rho}.\tag{6.50}$$

Уравнение энтропии означает, что энтропия остается постоянной вдоль траектории каждой частицы. В общем случае она может принимать различные значения на траекториях различных частиц. Однако если газ первоначально находился в покое с однородной энтропией S_0 , то $S = S_0$ на траектории каждой частицы, и, следовательно, энтропия остается при движении постоянной. Такие течения называются *изэнтропическими*. В этом случае p является функцией только от ρ и уравнения сводятся к первым двум из уравнений (6.49). Для политропного газа

$$p = \kappa \rho^\gamma.$$

Если появляются ударные волны или какие-либо другие разрывы, то эти рассуждения должны быть пересмотрены. Дифференциальные уравнения, в частности уравнение энтропии, справедливы только в областях, где функции дифференцируемы. При переходе через поверхность разрыва энтропия скачком изменяется, и в общем случае величина этого скачка зависит от времени и точки на перемещающейся поверхности разрыва. Таким образом, первоначально изэнтропический поток может уже не оставаться таковым после прохождения ударной волны. Это будет подробно обсуждаться в § 6.10.

6.6. Акустика

Первые сведения о распространении волн в газовой динамике даются акустикой, связанной с линеаризованной теорией малых возмущений стационарного состояния. Простейший случай имеет место тогда, когда массовыми силами пренебрегают, а стационарное состояние отвечает постоянным значениям $p = p_0$, $\rho = \rho_0$, $u = 0$. Если первоначальное возмущение имело однородную энтропию, то движение является изэнтропическим и можно считать

$p = p(\rho)$. Тогда для малых возмущений

$$p - p_0 = a_0^2 (\rho - \rho_0) \quad (6.51)$$

с точностью до членов выше первого порядка, причем

$$a_0^2 = p'(\rho_0). \quad (6.52)$$

Соотношение (6.51) можно рассматривать как решение линеаризованного третьего уравнения системы (6.49), так что обратимся к линеаризации первых двух уравнений.

С точностью до членов выше первого порядка от малых величин $(p - p_0)/p_0$, $(\rho - \rho_0)/\rho_0$, u/a_0 и их производных имеем

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0. \quad (6.53)$$

$$\rho_0 \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0. \quad (6.54)$$

(Когда невозмущенное состояние однородно, здесь и далее оставляются производные от исходных величин — чтобы не усложнять запись и не увеличивать количество индексов, — но при необходимости их можно перевести в производные от возмущений.)

Из (6.54) следует равенство

$$u_i = u_i^{(0)}(x) + \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{\rho_0} \int_0^t (p - p_0) dt,$$

где произвольные функции $u_i^{(0)}(x)$ появляются в процессе интегрирования. Обычно в акустике их можно положить равными нулю; например, это так, если $u_i = 0$ в начальный момент или если волны распространяются в область покоя. При этом вектор u является градиентом скаляра. Введя потенциал скорости φ , определяемый условием $u = \nabla \varphi$, получим

$$u_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \quad p - p_0 = -\rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad \rho - \rho_0 = -\frac{\rho_0}{a_0^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad (6.55)$$

и равенство (6.54) выполняется тождественно. Уравнение для φ получается подстановкой этих выражений в (6.53) и является волновым уравнением

$$\varphi_{tt} = a_0^2 \varphi_{x_i x_i}, \quad (6.56)$$

где a_0 — скорость распространения. Можно заметить, что все возмущения в (6.55) также удовлетворяют волновому уравнению.

Для одномерных волн уравнение (6.56) можно решить сразу, что дает

$$\varphi = f(x - a_0 t) + g(x + a_0 t),$$

где f и g — произвольные функции; соответствующие выражения для u и $p - p_0$ таковы:

$$\begin{aligned} u &= f'(x - a_0 t) + g'(x + a_0 t), \\ \frac{p - p_0}{\rho_0 a_0} &= f'(x - a_0 t) - g'(x + a_0 t). \end{aligned} \quad (6.57)$$

Функции f и g выбираются так, чтобы выполнялись начальные или граничные условия. Мы отложим рассмотрение конкретных примеров, поскольку для плоских волн поддаются решению полные нелинейные уравнения и некоторые линеаризованные результаты можно рассматривать как приближение этих точных решений. Двух- и трехмерные решения волнового уравнения будут рассматриваться в гл. 7.

Практически в любой задаче акустики действуют силы тяжести, и вследствие этого невозмущенное состояние неоднородно. В задачах о распространении акустических волн на большие расстояния в атмосфере или океане этот факт может оказаться решающим и привести к усилению и рефракции этих волн. Даже когда предыдущая теория справедлива, то это не столько потому, что весь гравитационный член ρg пренебрежимо мал, а скорее потому, что величина его *возмущения* мала по сравнению с другими возмущениями. Невозмущенные давление и плотность должны удовлетворять уравнению

$$\frac{dp_0}{dz} = -\rho_0 g, \quad (6.58)$$

где z — вертикальная координата. Поскольку изменения давления и ускорения в акустических волнах могут быть чрезвычайно малы, два члена из (6.58) могут оказаться наибольшими членами в уравнении сохранения вертикальной компоненты импульса. Но так как они уравновешивают друг друга, то их дальнейшим влиянием на уравнения для возмущений можно пренебречь. Рассмотрим подробнее распространение плоских волн в вертикальном направлении. Положим $p = p_0(z) + p_1$, $\rho = \rho_0(z) + \rho_1$, $u = (0, 0, w)$, подставим эти значения в (6.49) и отбросим квадратичные и другие члены высших порядков по p_1 , ρ_1 , w ; тогда мы получим

$$\begin{aligned} \rho_{1t} + w\rho'_0 + \rho_0 w_z &= 0, \\ \rho_0 w_t + p'_0 + p_{1z} &= -\rho_0 g - \rho_1 g, \\ p_{1t} + wp'_0 - a_0^2(\rho_{1t} + w\rho'_0) &= 0. \end{aligned} \quad (6.59)$$

В общем случае в равновесном состоянии энтропия распределена неоднородно, так что следует учитывать изменение энтропии и определять a^2 так, как указано в (6.48).

Из (6.58) следует, что для изменений равновесных величин характерны большие пространственные расстояния L порядка

a_0^2/g . Если $p_1 = O(\varepsilon p_0)$ и λ — характерная длина волны возмущения, то

$$p'_0 = O\left(\frac{p_0}{L}\right), \quad p_{1z} = O\left(\frac{\varepsilon p_0}{\lambda}\right).$$

В то время как λ/L может иметь порядок 10^{-4} , амплитуда ε легко может быть равной 10^{-4} или еще меньше, так что градиенты основного состояния p'_0 могут оказаться больше, чем градиенты p_{1z} , создаваемые акустическими волнами. Однако члены p'_0 и $-\rho_0 g$ в (6.59) взаимно уничтожаются и все оставшиеся члены пропорциональны ε . Члены $\rho_1 g$, $w p'_0$, $w \rho'_0$ имеют дополнительный множитель λ/L . Следовательно, за исключением случаев распространения на расстояния, сравнимые с L , эффекты неоднородности будут малы. Вместо того чтобы делать дальнейшие оценки, проще рассмотреть некоторые точные решения уравнений (6.59).

Исключая в (6.59) p_1 и ρ_1 и снова используя (6.58), получаем

$$w_{tt} = a_0^2 w_{zz} + \frac{(\rho_0 a_0^2)'}{\rho_0} w_z.$$

Это уравнение гиперболическое, и характеристические скорости равны $\pm a_0(z)$. В случае неоднородной атмосферы a_0 продолжает оставаться скоростью звука в этом точном смысле. Для политропного газа $a_0^2 = \gamma p_0 / \rho_0$, так что $(\rho_0 a_0^2)' = \gamma p'_0 = -\gamma \rho_0 g$ и уравнение сводится к

$$w_{tt} = a_0^2 w_{zz} - \gamma g w_z.$$

Изотермическое равновесное состояние

Для постоянной равновесной температуры a_0^2 постоянна и (6.58) дает экспоненциальную атмосферу

$$\rho_0(z) = \rho_0(0) e^{-z/H}, \quad H = \frac{\mathcal{R}T_0}{g} = \frac{a_0^2}{\gamma g}.$$

Уравнение для w имеет периодические решения

$$w = A e^{z/(2H)} \cos(kz - \omega t),$$

$$\omega^2 = a_0^2 k^2 + \frac{1}{4} \frac{a_0^2}{H^2}.$$

Изменение амплитуды мало, если $z \ll H$ и $\omega^2 \simeq a_0^2 k^2$ при $\lambda^2/H^2 \ll 1$. Это решение подтверждает предыдущие оценки.

Конвективное равновесное состояние

В конвективном равновесном состоянии энтропия постоянна и $p \propto \rho^\gamma$. Из (6.58) имеем

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{dp_0}{dz} = \frac{a_0^2}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz} = \frac{2}{\gamma-1} a_0 \frac{da_0}{dz} = -g,$$

откуда

$$a_0^2(z) = a_0^2(0) - (\gamma - 1)gz.$$

Конечно, это распределение имеет смысл только для высот, меньших $a_0^2(0)/(\gamma - 1)g$. Решения для w выражаются через бесселевы функции (Г. Лэмб, [1], стр. 685); можно сделать и аналогичные выводы об эффектах неоднородности.

Некоторые вопросы, касающиеся рефракции неплоских волн, будут рассмотрены в § 7.7, другие можно найти в книге Г. Лэмба [1], стр. 686—703.

6.7. Нелинейные плоские волны

Рассмотрим теперь точные нелинейные уравнения для одномерного течения в случае, когда массовыми силами можно пренебречь. Поскольку сейчас мы интересуемся большими изменениями давления, во многих приложениях можно полностью пренебречь влиянием силы тяжести.

Уравнения (6.49) принимают вид

$$\rho_t + u\rho_x + \rho u_x = 0, \quad (6.60)$$

$$\rho(u_t + uu_x) + p_x = 0, \quad (6.61)$$

$$S_t + uS_x = 0, \quad (6.62)$$

где $p(\rho, S)$ — известная функция. Последнее уравнение можно также записать в виде

$$\rho_t + u\rho_x - a^2(\rho_t + u\rho_x) = 0, \quad (6.63)$$

где

$$a^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{S=\text{const}}. \quad (6.64)$$

Для изучения нелинейных волн уравнения приводятся к характеристической форме при помощи процедуры, описанной в § 5.1. Вместо того чтобы пользоваться готовыми формулами, быстрее вывести характеристические уравнения непосредственно из (6.60) — (6.63). Заметим прежде всего, что уравнение (6.62) уже имеет характеристическую форму с характеристической скоростью u . Отсюда

$$\frac{dS}{dt} = 0 \quad \text{на характеристиках} \quad \frac{dx}{dt} = u. \quad (6.65)$$

Эти характеристики являются траекториями частиц, и S постоянна на каждой из них.

Два других семейства характеристик удобнее всего получить, используя уравнения (6.60), (6.61) и (6.63). Достаточно рассмотреть

следующие линейные комбинации: произведение l_1 на (6.60) плюс произведение l_2 на (6.61) и плюс (6.63). После преобразования такая комбинация принимает вид

$$p_t + (u + l_2) p_x + \rho l_2 (u_t + u u_x) + \\ + \rho l_1 u_x + (l_1 - a^2) (\rho_t + u \rho_x) = 0.$$

Случай $l_1 = l_2 = 0$ отвечает уже найденной характеристической форме (6.65). После того как этот случай исключен, из сравнения членов с p и ρ видно, что единственное возможное характеристическое уравнение с $l_2 \neq 0$ получается при отсутствии производных от ρ , откуда $l_1 = a^2$. Тогда, сравнивая производные от p и от u , получаем $l_2 = l_1/l_2$. Таким образом, $l_1 = a^2$, $l_2 = \pm a$ и искомые комбинации имеют вид

$$p_t + (u \pm a) p_x \pm \rho a \{u_t + (u \pm a) u_x\} = 0. \quad (6.66)$$

Полная система характеристических уравнений имеет вид

$$\frac{dp}{dt} + \rho a \frac{du}{dt} = 0 \quad \text{на } C_+: \frac{dx}{dt} = u + a, \quad (6.67)$$

$$\frac{dp}{dt} - \rho a \frac{du}{dt} = 0 \quad \text{на } C_-: \frac{dx}{dt} = u - a, \quad (6.68)$$

$$\frac{dS}{dt} = 0 \quad \text{на } P: \frac{dx}{dt} = u. \quad (6.69)$$

Характеристики C_+ и C_- описывают точки, движущиеся со скоростью $\pm a$ относительно газа, имеющего локальную скорость u . Это акустические волны, и величина a , определяемая равенством (6.64), отождествляется с нелинейной скоростью звука.

В линеаризованной теории эти уравнения аппроксимируются следующим образом:

$$\frac{dp}{dt} + \rho_0 a_0 \frac{du}{dt} = 0 \quad \text{на } C_+: \frac{dx}{dt} = a_0,$$

$$\frac{dp}{dt} - \rho_0 a_0 \frac{du}{dt} = 0 \quad \text{на } C_-: \frac{dx}{dt} = -a_0,$$

$$\frac{dS}{dt} = 0 \quad \text{на } P: \frac{dx}{dt} = 0$$

и немедленно интегрируются, давая

$$\begin{aligned} (p - p_0) + \rho_0 a_0 u &= F(x - a_0 t), \\ (p - p_0) - \rho_0 a_0 u &= G(x + a_0 t), \\ S - S_0 &= H(t). \end{aligned} \quad (6.70)$$

Если энтропия не изменяется, то эти равенства согласуются с решением (6.57).

В нелинейной теории соотношения, определяющие характеристики, зависят от решения, которое еще следует найти, и интегрирование так непосредственно не проводится.

Для изэнтропического течения $S = \text{const}$ всюду, так что уравнение (6.69) можно опустить. Кроме того, $p = p(\rho)$, $a^2 = p'(\rho)$, и поэтому первые два характеристические уравнения можно записать в виде

$$\int \frac{a(\rho) d\rho}{\rho} + u = \text{const} \quad \text{на } C_+: \frac{dx}{dt} = u + a,$$

$$\int \frac{a(\rho) d\rho}{\rho} - u = \text{const} \quad \text{на } C_-: \frac{dx}{dt} = u - a.$$

Это инварианты Римана. Для политропного газа

$$p = \kappa \rho^\gamma, \quad a^2 = \kappa \gamma \rho^{\gamma-1}$$

и инварианты Римана равны

$$\frac{2}{\gamma-1} a \pm u = \text{const} \quad \text{на } \frac{dx}{dt} = u \pm a. \quad (6.71)$$

6.8. Простые волны

Если один из инвариантов Римана для изэнтропического течения остается всюду постоянным, то решение чрезвычайно упрощается.

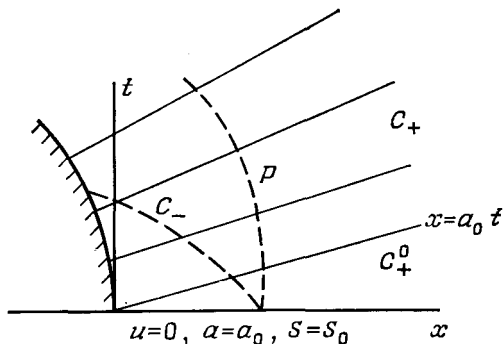


Рис. 6.1. Волна разрежения, возникающая при вытягивании поршня.

Это соответствует распространению волны только в одном направлении, и в линейной теории в равенствах (6.70) было бы либо $F = 0$, либо $G = 0$. В качестве основной модели, иллюстрирующей образование простой волны такого типа, рассмотрим волны, создаваемые заданным движением поршня на конце длинной трубы. На рис. 6.1 приведена соответствующая (x, t) -диаграмма. Если

не возникают разрывы, нарушающие выводы, следующие из дифференциальных уравнений, то можно утверждать, что течение должно описываться простой волной. Для простоты рассуждения проводятся для политропного газа, но распространение на более общий случай очевидно.

Предполагается, что в области $x \geq 0$ при $t = 0$ газ находится в состоянии покоя с $u = 0$, $a = a_0$, $S = S_0$, и, как уже говорилось, разрывы временно не допускаются. Поскольку поршень сам движется по траектории частицы, ясно, что траектории всех частиц начинаются на оси x в однородной области. В силу (6.69), S постоянна на траектории каждой частицы P и, следовательно, равна своему начальному значению S_0 . Но начальные значения одинаковы для траекторий всех частиц; следовательно,

$$S = S_0 \quad (6.72)$$

по всему течению. Так как течение изэнтропическое, то можно использовать теперь соотношение (6.71) для двух других семейств характеристик.

На характеристиках C_- величина dx/dt меньше, чем на траектории частицы, и, следовательно, все они начинаются на оси x в невозмущенной области (см. рис. 6.1). На каждой такой характеристике

$$\frac{2}{\gamma-1} a - u = \frac{2a_0}{\gamma-1}, \quad (6.73)$$

поскольку этот инвариант Римана постоянен на каждой из них и сохраняет первоначальное значение из области $u = 0$, $a = a_0$.

Поскольку начальное значение снова одно и то же для всех этих характеристик, инвариант Римана (6.73) всюду равен одной и той же постоянной. Из этих рассуждений следует, что решение является простой волной. Обратимся к другому характеристическому уравнению в (6.71) и определим оставшуюся часть решения.

Для тех характеристик C_+ , которые начинаются на оси x , справедливо равенство (6.73) с противоположным знаком. Отсюда в области, покрываемой такими характеристиками, $u = 0$, $a = a_0$. Таким образом, исходные однородные условия имеют место в области впереди характеристики C_+^0 , отделяющей характеристики C_+ , начинающиеся на оси x , от характеристик C_+ , начинающихся на поршне. Поскольку мы предполагаем, что течение непрерывно и не имеет разрывов, то $u = 0$, $a = a_0$ впереди C_+^0 и на самой этой характеристике. Таким образом, C_+^0 определяется равенством

$$x = a_0 t.$$

Для характеристик C_+ , начинающихся на поршне, используем равенство (6.71) со знаком плюс:

$$\frac{2a}{\gamma-1} + u = \text{const} \quad \text{на каждой } C_+: \quad \frac{dx}{dt} = u + a.$$

В силу равенства (6.73), справедливого всюду, это сводится к условию

$$u = \text{const} \quad \text{на каждой } C_+: \quad \frac{dx}{dt} = a_0 + \frac{\gamma+1}{2} u. \quad (6.74)$$

Значение u на каждой из этих характеристик различно и зависит от того, где данная характеристика пересекается с поршнем, но видно, что в общем случае семейство положительных характеристик представляет собой семейство прямых, каждая из которых имеет наклон $a_0 + \{(\gamma + 1)/2\} u$, соответствующий значению u на ней.

Граничные условия состоят в том, что на поршне скорость газа равна скорости поршня. Следовательно, если движение поршня описывается функцией $x = X(t)$, то граничное условие имеет вид

$$u = \dot{X}(t) \quad \text{при} \quad x = X(t). \quad (6.75)$$

На характеристике C_+ , пересекающейся с поршнем в момент времени τ , $u = \dot{X}(\tau)$, и тогда из (6.74) следует, что уравнение этой характеристики таково:

$$x = X(\tau) + \left\{ a_0 + \frac{\gamma+1}{2} \dot{X}(\tau) \right\} (t - \tau). \quad (6.76)$$

Поэтому решение имеет вид

$$u = \dot{X}(\tau), \quad a = a_0 + \frac{\gamma-1}{2} \dot{X}(\tau), \quad S = S_0, \quad (6.77)$$

где $\tau(x, t)$ неявно определяется равенством (6.76).

Поскольку характеристики C_+ являются прямыми с наклоном dx/dt , возрастающим с ростом u , ясно, что характеристики будут накладываться одна на другую, если u может возрасти на поверхности поршня, т. е. если $\ddot{X}(\tau) > 0$ для какого-либо значения τ . Это типичное нелинейное опрокидывание изображено на рис. 2.1, и оно показывает, что образуются ударные волны. Если u возрастает, то возрастают a , p и ρ , так что опрокидывание и ударные волны возникают в области сжатия возмущения. Для изучения ударных волн необходимо пересмотреть предположения, лежащие в основе равенств (6.72) и (6.73), а также обсудить соответствующие условия на разрыве.

Для волны разрежения решение, даваемое формулами (6.76) и (6.77), является полным. Особый интерес представляет предельный случай, когда поршень внезапно выдергивается со скоростью $-V$. Имеются однородная область, где

$$u = -V, \quad a = a_0 - \frac{\gamma-1}{2} V, \quad (6.78)$$

расположенная сразу за поршнем, и переходная область между ней и первоначальной невозмущенной областью, описываемая центрированным веером характеристик, как показано на рис. 6.2.

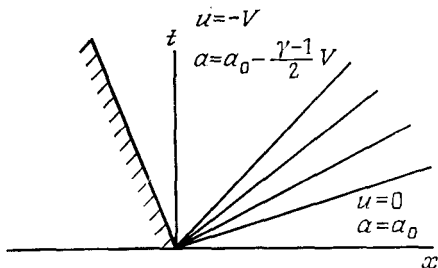


Рис. 6.2. Центрированный веер разрежения.

Поскольку все эти характеристики начинаются в точке $x = t = 0$, их уравнения имеют вид

$$x = \left(a_0 + \frac{\gamma+1}{2} u \right) t, \quad -V \leq u \leq 0.$$

Все значения u , лежащие в интервале от $-V$ до 0 , мгновенно достигаются в начале координат, но каждое значение определяет «свою» характеристику из веера. Разрешив это соотношение относительно u и добавив выражение для a из (6.73), получим систему

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{2a_0}{\gamma+1} \left(\frac{x}{a_0 t} - 1 \right), \\ a &= a_0 \left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1} \frac{x}{a_0 t} + \frac{2\gamma}{\gamma+1} \right), \end{aligned} \right\} 1 - \frac{\gamma+1}{2} \frac{V}{a_0} < \frac{x}{a_0 t} < 1. \quad (6.79)$$

Если поршень движется вперед со скоростью V , то веер выворачивается и образует многолистную область, которую можно рассматривать как складку в (x, t) -плоскости (ср. с рис. 2.3). Это, конечно, соответствует мгновенному опрокидыванию, которое следует заменить ударной волной.

Для других задач аналогичные рассуждения применимы, как правило, вблизи фронта произвольного возмущения, распространяющегося в однородную область. Существует область, в которой траектории частиц и одно семейство характеристик выходят из лежащей впереди однородной области, так что в этой области течение является изэнтропическим и один инвариант Римана всюду имеет одно и то же значение. Другое семейство характеристик «переносит» возмущение: на каждой из них параметры течения остаются постоянными, и каждая из них является прямой линией. Область простой волны простирается назад до первой траектории частицы, выходящей из неоднородной области. Рис. 6.1 остается

справедливым, но траектория поршня заменяется этой граничной характеристикой. Возникновение таких областей простой волны, прилежащих к однородным областям, хорошо иллюстрируется задачей Коши в § 6.12.

6.9. Простые волны и кинематические волны

В § 2.2 мы видели, что уравнение неразрывности

$$\rho_t + q_x = 0 \quad (6.80)$$

вместе с функциональным соотношением $q = Q(\rho)$ приводит к простейшим нелинейным волнам. Изучаемые сейчас простые волны имеют ту же природу. Хотя в газовой динамике имеются три основных уравнения для трех величин p , ρ , u , в частном случае простой волны существуют два интеграла

$$S = S_0, \quad \frac{2a}{\gamma-1} - u = \frac{2a_0}{\gamma-1}.$$

Это означает, что два из основных уравнений можно исключить и любые две из величин p , ρ и u можно представить как функции третьей. Таким образом, приходим к одному уравнению, которое можно взять в виде закона сохранения, связывающего поток и плотность.

Например, если мы захотим выразить все величины через ρ , то условие изэнтропичности течения дает соотношение

$$p = p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma,$$

а инвариант Римана — соотношение

$$u = V(\rho) = \frac{2a}{\gamma-1} - \frac{2a_0}{\gamma-1} = \frac{2a_0}{\gamma-1} \left\{ \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{(\gamma-1)/2} - 1 \right\}. \quad (6.81)$$

Затем можно использовать закон сохранения массы как замыкающее уравнение для определения ρ . Этот закон имеет вид (6.80) с $q = \rho u$. Следовательно, в кинематической формулировке следует взять уравнение (6.80) и уравнение

$$q = Q(\rho) = \rho V(\rho), \quad (6.82)$$

где $V(\rho)$ дается равенством (6.81). В этом случае функция $Q(\rho)$ получается из двух других дифференциальных уравнений, а не задается как часть исходной формулировки задачи. Однако дальнейший анализ можно проводить как в кинематической теории. Уравнение для ρ имеет вид

$$\rho_t + c(\rho) \rho_x = 0, \quad c(\rho) = Q'(\rho),$$

и можно проверить, что, в силу приведенных выше соотношений,

$$c(\rho) = Q'(\rho) = V(\rho) + \rho V'(\rho) = V(\rho) + a(\rho).$$

В соответствии с проведенными выше рассуждениями отсюда следует, что параметры течения постоянны на характеристиках и что характеристическая скорость равна $u + a$.

В этом по существу состоит подход, использованный Эрншоу [1] в одном из первых построений решения вида простой волны. Он рассматривал с самого начала изэнтропическое течение и записал уравнения в виде

$$\begin{aligned}\rho_t + u\rho_x + \rho u_x &= 0, \\ u_t + uu_x + \frac{a^2(\rho)}{\rho} \rho_x &= 0.\end{aligned}$$

Затем, основываясь на наблюдениях, что для линеаризованной акустической волны, движущейся вправо, $u = a_0(\rho - \rho_0)/\rho_0$, он рассмотрел возможность существования точных решений с $u = V(\rho)$. В этом случае уравнения принимают вид

$$\begin{aligned}\rho_t + (V + \rho V') \rho_x &= 0, \\ (\rho_t + V\rho_x) V' + \frac{a^2}{\rho} \rho_x &= 0.\end{aligned}$$

Эти уравнения согласуются, если

$$V' = \pm \frac{a}{\rho},$$

причем оба они принимают вид

$$\rho_t + (V \pm a) \rho_x = 0.$$

Выбирая верхний знак, получаем

$$V(\rho) = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{a(\rho)}{\rho} d\rho = \frac{2}{\gamma-1} \{a(\rho) - a_0\},$$

что согласуется с полученными выше результатами. Риман [1] дал более глубокое обоснование, которое мы приведем в следующем параграфе.

Выбор ρ в качестве основной переменной лучше согласуется с рассуждениями, проведенными в гл. 2, но формулы проще записываются через u . При помощи равенств (6.81) можно свободно переходить от одной переменной к другой. Исходное уравнение для u имеет вид

$$u_t + \left(a_0 + \frac{\gamma+1}{2}u\right) u_x = 0, \quad (6.83)$$

а равенства

$$a = a_0 + \frac{\gamma-1}{2} u, \quad S = S_0,$$

определяют p и ρ . Скорость распространения составляет

$$c(u) = a_0 + \frac{\gamma+1}{2} u.$$

Решение уравнения (6.83) строится так же, как и выше. В частности, для задачи с поршнем решение дается формулами (6.76) и (6.77).

Таким образом, по крайней мере в случае простой волны профиль волны становится многозначным, точно так же как в гл. 2, и для построения полного решения следует вводить разрывы.

6.10. Ударные волны

При опрокидывании волн реальные решения восстанавливаются введением разрывов, и мы проделаем это, основываясь на общей точке зрения, развитой в гл. 2. В области, где происходит опрокидывание, производные становятся большими и, строго говоря, предположения (6.22) — (6.24) неприменимы. Но реальное поведение обычно хорошо аппроксимируется введением разрывов, удовлетворяющих надлежащим условиям, и сохранением предположений (6.22) — (6.24) в области непрерывного течения. Впоследствии можно изучить детали структуры ударной волны, учтя эффекты вязкости и теплопередачи.

Как указано выше, при формировании ударных волн следует пересмотреть соображения, развитые для случая простой волны и приведшие к интегралам

$$S = S_0, \quad \frac{2a}{\gamma-1} - u = \frac{2a_0}{\gamma-1},$$

и необходимо вернуться к полной системе из трех уравнений.

Условия на разрыве устанавливаются при помощи рассуждений, проведенных в § 5.8. Здесь существенно то, что мы работаем с уравнениями вида законов сохранения и что именно эти три уравнения соответствуют физическим законам сохранения в интегральной форме. Для правильного выбора необходимо вернуться к их исходной интегральной записи (6.2) — (6.4). Ограничиваясь одним измерением и опуская массовые силы (хотя они не меняют

условия на разрыве), получаем

$$\frac{d}{dt} \int_{x_2}^{x_1} \rho dx + [\rho u]_{x_2}^{x_1} = 0, \quad (6.84)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{x_2}^{x_1} \rho u dx + [\rho u^2 - p_{11}]_{x_2}^{x_1} = 0, \quad (6.85)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{x_2}^{x_1} \left(\frac{1}{2} \rho u^2 + \rho e \right) dx + \left[\left(\frac{1}{2} \rho u^2 + \rho e \right) u - p_{11} u + q_1 \right]_{x_2}^{x_1} = 0. \quad (6.86)$$

Каждое из этих соотношений имеет вид (5.54), и соответствующее условие на разрыве имеет вид (5.56). После вывода условий на разрыве для непрерывного течения по обе стороны от разрыва снова принимаются значения $p_{11} = -p$, $q_1 = 0$, $e = e(p, \rho)$, и, следовательно, их можно подставить в условия на разрыве. Тогда эти условия принимают вид

$$-U[\rho] + [\rho u] = 0, \quad (6.87)$$

$$-U[\rho u] + [\rho u^2 + p] = 0, \quad (6.88)$$

$$-U \left[\frac{1}{2} \rho u^2 + \rho e \right] + \left[\left(\frac{1}{2} \rho u^2 + \rho e \right) u + p u \right] = 0. \quad (6.89)$$

Соответствующими дифференциальными уравнениями в виде законов сохранения являются

$$\begin{aligned} \rho_t + (\rho u)_x &= 0, \\ (\rho u)_t + (\rho u^2 + p)_x &= 0, \\ \left(\frac{1}{2} \rho u^2 + \rho e \right)_t + \left\{ \left(\frac{1}{2} \rho u^2 + \rho e \right) u + p u \right\}_x &= 0. \end{aligned} \quad (6.90)$$

Они эквивалентны системе (6.60) — (6.62).

Из этой системы можно получить еще один закон сохранения:

$$(\rho S)_t + (\rho u S)_x = 0, \quad (6.91)$$

немедленно следующий из (6.60) и (6.62). Но это уравнение уже неприменимо в более общей интегральной форме. Действительно, из (6.7) — (6.9) и (6.31) имеем

$$(\rho S)_t + (\rho u S)_x = \frac{(p_{11} + p) u_x - q_{1x}}{T}, \quad (6.92)$$

откуда

$$\frac{d}{dt} \int_{x_2}^{x_1} \rho S dx + [\rho u S]_{x_2}^{x_1} = \int_{x_2}^{x_1} \frac{(p_{11} + p) u_x - q_{1x}}{T} dx. \quad (6.93)$$

Член в правой части равенства (6.93) существенно отличается от члена типа источника h_t в (5.54), поскольку он содержит производ-

ные от параметров течения и нет способа их проинтегрировать. Следовательно, рассуждения, приводящие к (5.56), неприменимы. (Напомним, что предположения $p_{11} = -p$, $q_1 = 0$ вводятся только после перехода к соответствующим пределам.) Таким образом, нельзя вывести условие на разрыве, формально соответствующее уравнению (6.91). Действительно, ниже при помощи условий (6.87) — (6.89) мы покажем, что

$$-U [\rho S] + [\rho u S] \neq 0. \quad (6.94)$$

При изучении структуры ударной волны вклад правой части равенства (6.93) будет рассмотрен подробнее.

Интересно, что четыре уравнения, а именно уравнения (6.90) и (6.91), это все законы сохранения, которые можно вывести для системы (6.60) — (6.62). Для доказательства этого утверждения рассмотрим уравнение типа закона сохранения

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial x} + h = 0,$$

где f , g и h — функции от p , ρ и u . Если это уравнение расписать через производные от p , ρ и u и если для исключения производных по t использовать уравнения (6.60), (6.61) и (6.63), то получится

$$(g_\rho + u f_\rho) \rho_x + \left(g_p - u f_p - \frac{1}{\rho} f_u \right) \rho_x + \\ + (g_u - u f_u - \rho f_\rho - \rho a^2 f_p) u_x + h = 0.$$

Поскольку это соотношение должно выполняться тождественно, коэффициенты при производных должны обращаться в нуль по отдельности и, кроме того, h должна быть равной нулю. Три уравнения для f и g можно решить и показать, что наиболее общее решение для f представляет собой линейную комбинацию ρ , ρu , $\frac{1}{2} \rho u^2 + \rho e$, ρS . Таким образом, единственными независимыми уравнениями сохранения являются уже указанные выше уравнения. Любые три из этих четырех уравнений можно использовать для построения «слабого решения», но только система (6.90) с условиями на разрыве (6.87) — (6.89) соответствует реальной физической ситуации.

Полезные модификации условий на разрыве

Прежде всего удобно записать условия на разрыве (6.87) — (6.89) через относительную скорость $v = U - u$. Подставляя соответствующее выражение для u , получаем

$$[\rho v] = 0,$$

$$[p + \rho v^2 - \rho v U] = 0,$$

$$\left[\rho v \left(h + \frac{1}{2} v^2 \right) - (p + \rho v^2) U + \frac{1}{2} \rho v U^2 \right] = 0,$$

где h — энтальпия $e + p/\rho$. Беря линейные комбинации, эти соотношения можно привести к виду

$$[\rho v] = 0, \quad [p + \rho v^2] = 0, \quad \left[\rho v \left(h + \frac{1}{2} v^2 \right) \right] = 0.$$

Это условия на разрыве для стационарного течения в системе отсчета, в которой ударная волна неподвижна. Если $\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2 \neq 0$, то постоянный множитель ρv в третьем уравнении можно опустить, и тогда мы получим

$$\rho_2 v_2 = \rho_1 v_1, \quad (6.95)$$

$$p_2 + \rho_2 v_2^2 = p_1 + \rho_1 v_1^2, \quad (6.96)$$

$$h_2 + \frac{1}{2} v_2^2 = h_1 + \frac{1}{2} v_1^2. \quad (6.97)$$

Как правило, течение впереди ударной волны известно, и условия на разрыве используются либо для определения течения за ударной волной через скорость ударной волны, либо для определения скорости ударной волны и остальных параметров течения через один из параметров течения за ударной волной. Приведем в явном виде формулы для политропного газа. Будет полезно включить выражения для скорости звука, хотя они и вытекают из выражений для p и ρ . Для политропного газа

$$e = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho}, \quad h = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho}, \quad a^2 = \gamma \frac{p}{\rho}, \quad (6.98)$$

и искомые формулы получаются выкладками из равенств (6.95) — (6.97).

Когда параметры течения выражаются через U , то удобно использовать величину

$$M = \frac{U - u_1}{a_1}$$

— число Маха ударной волны относительно течения перед ударной волной. Тогда

$$\frac{u_2 - u_1}{a_1} = \frac{2(M^2 - 1)}{(\gamma + 1)M}, \quad (6.99)$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma + 1)M^2}{(\gamma - 1)M^2 + 2}, \quad (6.100)$$

$$\frac{p_2 - p_1}{p_1} = \frac{2\gamma(M^2 - 1)}{\gamma + 1}, \quad (6.101)$$

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{\{2\gamma M^2 - (\gamma - 1)\}^{1/2} \{(\gamma - 1)M^2 + 2\}^{1/2}}{(\gamma + 1)M}. \quad (6.102)$$

Если считается известным p_2 , то удобно ввести интенсивность ударной волны

$$z = \frac{p_2 - p_1}{p_1}$$

и выразить соотношения на разрыве в виде

$$M = \frac{U - u_1}{a_1} = \left(1 + \frac{\gamma+1}{2\gamma} z\right)^{1/2}, \quad (6.103)$$

$$\frac{u_2 - u_1}{a_1} = \frac{z}{\gamma \left(1 + \frac{\gamma+1}{2\gamma} z\right)^{1/2}}, \quad (6.104)$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{1 + \frac{\gamma+1}{2\gamma} z}{1 + \frac{\gamma-1}{2\gamma} z}, \quad (6.105)$$

$$\frac{a_2}{a_1} = \left\{ \frac{(1+z) \left(1 + \frac{\gamma-1}{2\gamma} z\right)}{1 + \frac{\gamma+1}{2\gamma} z} \right\}^{1/2}. \quad (6.106)$$

Свойства ударных волн

Некоторые важные свойства ударных волн будут выведены с помощью этих формул для политропных газов, но качественные результаты остаются справедливыми и в общем случае. Сначала проверим условие (6.94). Для политропного газа $S = c_v \ln(p/\rho^\gamma)$, откуда, в силу (6.105) и определения z , имеем

$$\frac{S_2 - S_1}{c_v} = \ln \frac{(1+z) \left(1 + \frac{\gamma-1}{2\gamma} z\right)^\gamma}{\left(1 + \frac{\gamma+1}{2\gamma} z\right)^\gamma}. \quad (6.107)$$

Это выражение отлично от нуля при $z \neq 0$, так что при переходе через ударную волну энтропия действительно изменяется скачком.

Согласно второму закону термодинамики, энтропия частицы может только возрастать. Следовательно, если частица переходит со стороны 1 на сторону 2, то обязательно $S_2 > S_1$. При помощи (6.107) можно показать, что $d(S_2 - S_1)/dz > 0$ при $\gamma > 1, z > -1$, что всегда выполняется. Поэтому если $S_2 - S_1 > 0$, то $z > 0$. Таким образом, ударная волна всегда является волной сжатия с $p_2 > p_1$, а тогда из остальных соотношений (6.103) — (6.106) следует, что

$$p_2 > p_1, \quad \rho_2 > \rho_1, \quad a_2 > a_1, \quad u_2 > u_1, \quad M > 1. \quad (6.108)$$

Другой подход к установлению знаков скачков состоит в выяснении вопроса, когда ударные волны вызываются опрокидыванием волн. Для простых волн § 6.8 скорость распространения равна $u + a$, так что условие формирования ударной волны из § 2.6 принимает вид

$$u_2 + a_2 > U > u_1 + a_1. \quad (6.109)$$

Таким образом, ударная волна является сверхзвуковой, если смотреть на нее спереди, и дозвуковой, если смотреть на нее сзади. Из (6.103) следует, что если $U > u_1 + a_1$, то $z > 0$, и тогда другое неравенство вытекает из (6.103), (6.104) и (6.106).

Скачок энтропии при переходе через ударную волну, согласно (6.107), зависит от интенсивности этой волны. Как следствие течение за ударной волной изменяющейся интенсивности не может быть изэнтропическим. Это имеет важное значение для приближения простой волны из § 6.8. В то же время мы должны рассмотреть возможность разрыва инварианта Римана

$$s = \frac{2a}{\gamma - 1} - u,$$

использованного в (6.73). Оказывается, что при переходе через ударную волну эта величина претерпевает разрыв. Все это означает, что решение в виде простой волны, строго говоря, не может реализоваться при возникновении ударной волны. Однако для ударной волны малой или даже умеренной интенсивности эти скачки удивительно малы.

Слабые ударные волны

Для слабых ударных волн все выражения в (6.103) — (6.107) можно разложить по степеням z . Первые несколько членов имеют вид

$$\frac{U - u_1}{a_1} = 1 + \frac{\gamma + 1}{4\gamma} z - \frac{(\gamma + 1)^2}{32\gamma^2} z^2 + O(z^3),$$

$$\frac{u_2 - u_1}{a_1} = \frac{z}{\gamma} - \frac{\gamma + 1}{4\gamma^2} z^2 + \frac{3(\gamma + 1)^2}{32\gamma^3} z^3 + O(z^4),$$

$$\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1} = \frac{z}{\gamma} - \frac{\gamma - 1}{2\gamma^2} z^2 + O(z^3),$$

$$\frac{a_2 - a_1}{a_1} = \frac{\gamma - 1}{2\gamma} z - \frac{\gamma^2 - 1}{8\gamma^2} z^2 + \frac{(\gamma - 1)(\gamma + 1)^2}{16\gamma^3} z^3 + O(z^4),$$

$$\frac{S_2 - S_1}{c_v} = \frac{\gamma^2 - 1}{12\gamma^2} z^3 + O(z^4),$$

$$\frac{s_2 - s_1}{a_1} = \frac{2}{\gamma - 1} \frac{a_2 - a_1}{a_1} - \frac{u_2 - u_1}{a_1} = \frac{1}{32} \frac{(\gamma + 1)^2}{\gamma^3} z^3 + O(z^4).$$

В общем случае скачки параметров течения пропорциональны z , но скачки S и s составляют лишь $O(z^3)$. Даже для умеренных ударных волн они удивительно малы; ниже (см. таблицу) приведены типичные значения для $\gamma = 1,4$. Для ударных волн малой или

умеренной интенсивности в разумном приближении можно пренебрегать изменениями энтропии и инварианта Римана. В этом

z	$\frac{s_2 - s_1}{c_v}$	$\frac{\gamma - 1}{2} \frac{s_2 - s_1}{a_1}$
0,5	0,003	0,001
1,0	0,013	0,005
2,0	0,052	0,019
5,0	0,215	0,085
10,0	0,478	0,209

приближении решение в виде простой волны из § 6.8 можно сохранить и использовать даже в тех случаях, когда имеются слабые ударные волны.

Сильные ударные волны

В другом экстремальном случае очень сильных ударных волн можно использовать асимптотическое поведение при $z \rightarrow \infty$. Наиболее удобное выражение получается из (6.99) — (6.101). Обычно в этом случае $U \gg u_1$, так что полагаем $M \sim U/a_1$ и $M \gg 1$. Тогда формулы (6.99) — (6.101) переходят в асимптотические равенства

$$u_2 \sim \frac{2}{\gamma+1} U, \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} \sim \frac{\gamma+1}{\gamma-1}, \quad \rho_2 \sim \frac{2}{\gamma+1} \rho_1 U^2, \quad (6.110)$$

где мы использовали соотношение $a_1^2 = \gamma p_1 / \rho_1$ для исключения как p_1 , так и a_1 . Эти выражения содержат только параметр ρ_1 течения перед ударной волной; u_1 , p_1 , a_1 теперь малы по сравнению с величинами за ударной волной, так что в данном приближении ими можно пренебречь. Интересно, что сжатие ρ_2/ρ_1 остается ограниченным при сколь угодно большой интенсивности ударной волны.

6.11. Слабые ударные волны в простых волнах

Как было отмечено ранее, только в случае, когда возникающие ударные волны имеют малую или умеренную интенсивность, для простой волны можно сохранить приближенные равенства

$$S = S_0, \quad a = a_0 + \frac{\gamma-1}{2} u. \quad (6.111)$$

Тогда, как это видно из (6.83), оставшееся уравнение можно записать в виде

$$u_t + c(u) u_x = 0, \quad c = a + u = a_0 + \frac{\gamma+1}{2} u. \quad (6.112)$$

Кроме того, что соотношения (6.111) исключают два уравнения, они приближенно удовлетворяют двум условиям на разрыве, и остается одно условие, соответствующее (6.112). Поскольку этот подход приближенный, существует много различных вариантов, отличающихся членами высшего порядка. Как мы видели в гл. 2, для уравнения вида (6.112) удобнее всего положить

$$U = \frac{c_1 + c_2}{2}; \quad (6.113)$$

в данном случае это сводится к

$$U = \frac{1}{2} (a_1 + u_1 + a_2 + u_2) = a_0 + \frac{\gamma+1}{4} (u_1 + u_2). \quad (6.114)$$

Согласно условиям на слабом скачке,

$$\begin{aligned} \frac{U - u_1}{a_1} - 1 &= \frac{\gamma+1}{4\gamma} z - \frac{(\gamma+1)^2}{32\gamma^2} z^2 + O(z^3), \\ \frac{1}{2} \left(\frac{a_2 - a_1}{a_1} + \frac{u_2 - u_1}{a_1} \right) &= \frac{\gamma+1}{4\gamma} z - \frac{(\gamma+1)^2}{16\gamma^2} z^2 + O(z^3), \end{aligned}$$

так что равенство (6.114) справедливо в первом порядке по z , но не во втором. Это приближение является менее точным, чем (6.111). Можно найти выражение, связывающее U с u_1 и u_2 , верное с точностью до членов третьего порядка по z , но это приведет к излишнему обычно неоправданному усложнению при введении разрыва.

Задача построения линии разрыва по существу та же, что и в гл. 2, и в случае (6.113) ее решение повторяет рассуждения § 2.8.

Можно было бы рассмотреть задачу Коши для (6.112), но эта задача является вырожденным частным случаем общей задачи Коши в газовой динамике, когда начальные условия удовлетворяют соотношениям (6.111) и течение является простой волной. Более естественно рассмотреть здесь снова задачу о поршне, где

$$u = g(t) = \dot{X}(t) \quad \text{при} \quad x = X(t),$$

и завершить рассуждения § 6.8 и 6.9 рассмотрением случая, когда образуются ударные волны¹⁾. Решение имеет вид

$$u = g(\tau), \quad (6.115)$$

$$x = X(\tau) + \left\{ a_0 + \frac{\gamma+1}{2} g(\tau) \right\} (t - \tau), \quad (6.116)$$

где параметр τ , выделяющий характеристику, выбирается так, что $t = \tau$ на траектории поршня. Ударные волны должны форми-

¹⁾ Решение дается в виде, охватывающем также и более общий случай, когда заданная функция $g(t)$ не совпадает с $\dot{X}(t)$.

роваться на характеристиках с $\dot{g}(\tau) > 0$. Эту задачу можно было бы связать с задачей Коши, продолжив характеристики назад до оси x , как показано на рис. 6.3, и положив

$$\xi = X(\tau) - \left\{ a_0 + \frac{\gamma+1}{2} g(\tau) \right\} \tau, \quad F(\xi) = a_0 + \frac{\gamma+1}{2} g(\tau).$$

Затем можно было бы применить результаты § 2.8. Однако, видимо, проще действовать непосредственно.

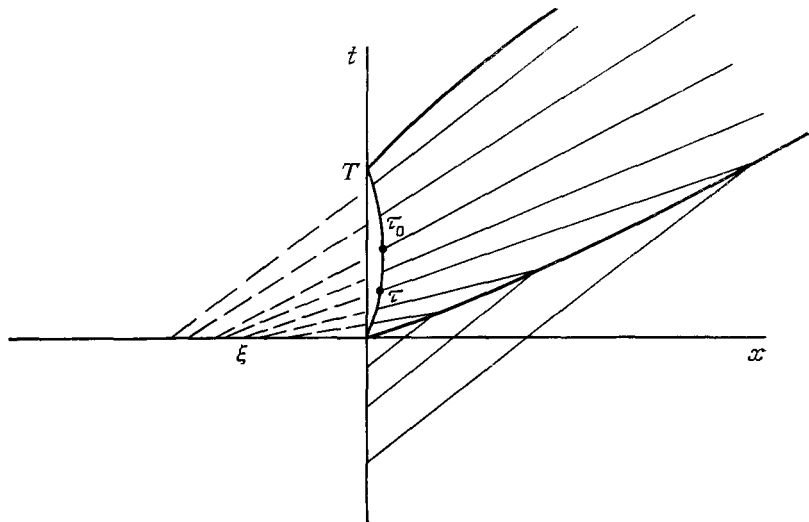


Рис. 6.3. Ударные волны, возникающие при движении поршня.

Рассмотрим движение передней ударной волны, распространяющейся в невозмущенную область с $u = 0$ (рис. 6.3). Если траекторией разрыва является $x = s(t)$, то условие на разрыве (6.114) дает

$$\frac{ds}{dt} = a_0 + \frac{\gamma+1}{4} g(\tau), \quad (6.117)$$

а характеристическое уравнение (6.116) дает

$$s(t) = X(\tau) + \left\{ a_0 + \frac{\gamma+1}{2} g(\tau) \right\} (t - \tau). \quad (6.118)$$

Решая эти два уравнения, находим s и t как функции параметра τ , определяя таким образом ударную волну. Поскольку $\dot{X}(\tau)/a_0 \ll 1$, $X(\tau)/a_0 \ll \tau$ и $t \gg \tau$ на ударной волне, то равенство (6.118) можно приближенно заменить следующим равенством:

$$s(t) = \left\{ a_0 + \frac{\gamma+1}{2} g(\tau) \right\} t - a_0 \tau. \quad (6.119)$$

Тогда имеем

$$\frac{ds}{dt} = a_0 + \frac{\gamma+1}{2} g(\tau) + \left\{ \frac{\gamma+1}{2} \dot{g}(\tau) t - a_0 \right\} \frac{d\tau}{dt}.$$

Сравнивая это выражение с (6.117), получаем

$$\frac{\gamma+1}{4a_0} g(\tau) + \frac{\gamma+1}{2a_0} \dot{g}(\tau) t \frac{d\tau}{dt} = \frac{d\tau}{dt}.$$

Интегрируя, получаем

$$\frac{\gamma+1}{4a_0} g^2(\tau) t = \int_0^\tau g(\tau') d\tau'. \quad (6.120)$$

Соотношения (6.119) и (6.120) определяют ударную волну.

Если $g(0) > 0$, то ударная волна возникает сразу в начале координат. Связь между τ и t имеет вид

$$\frac{\gamma+1}{4a_0} g(0) t \sim \tau,$$

так что

$$s \sim \left\{ a_0 + \frac{\gamma+1}{4} g(0) \right\} t.$$

Ударная волна начинает распространяться со скоростью $a_0 + \{(\gamma+1)/4\} g(0)$, что согласуется с (6.114).

Если поршень останавливается так, что $g(\tau) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow \tau_0$, то асимптотическое поведение описывается соотношениями

$$\frac{\gamma+1}{4a_0} g^2(\tau) t \sim \int_0^{\tau_0} g(\tau) d\tau,$$

$$s \sim a_0 t + \left\{ (\gamma+1) a_0 \int_0^{\tau_0} g(\tau) d\tau \right\}^{1/2} t^{1/2} - a_0 \tau_0,$$

$$u = g(\tau) \sim \left\{ \frac{4a_0}{\gamma+1} \int_0^{\tau_0} g(\tau) d\tau \right\}^{1/2} t^{-1/2}.$$

Траектория ударной волны в (x, t) -плоскости приближенно представляется параболой, а интенсивность ударной волны убывает как $t^{-1/2}$. Между ударной волной и предельной характеристикой $\tau = \tau_0$ имеем

$$x \sim \left\{ a_0 + \frac{\gamma+1}{2} g(\tau) \right\} t - a_0 \tau_0,$$

так что

$$u = g(\tau) \sim \frac{2}{\gamma+1} \frac{x - a_0(t - \tau_0)}{t}.$$

Другие ударные волны рассматриваются аналогичным образом. Если поршень возвращается в исходное состояние в момент времени $t = T$ и затем остается неподвижным, то асимптотическое поведение описывается уравновешенной N -волной со скачками в точках

$$x = a_0(t - \tau_0) \pm \left\{ (\gamma + 1) a_0 \int_0^{\tau_0} g(\tau) d\tau \right\}^{1/2} t^{1/2},$$

причем между ними

$$u \sim \frac{2}{\gamma + 1} \frac{x - a_0(t - \tau_0)}{t}.$$

Другие частные случаи и предельные выражения можно изучить, следуя рассуждениям, проведенным в § 2.8.

6.12. Задача Коши; взаимодействие волн

Простая волна — это возмущение, распространяющееся по одному из трех семейств характеристик. Для задачи Коши с начальными

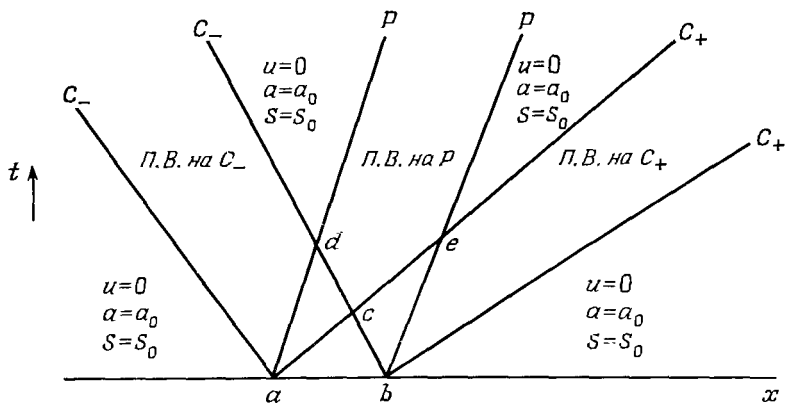


Рис. 6.4. Задача Коши в газовой динамике.

данными общего вида волны распространяются по всем трем семействам, если начальные условия сами не удовлетворяют соотношениям простой волны. Если начальные условия однородны с $u = 0$, $a = a_0$, $S = S_0$ всюду, за исключением отрезка $a \leq x \leq b$, то (x, t) -диаграмма имеет вид, изображенный на рис. 6.4. Имеется область взаимодействия $adceb$, но затем, если не возникают ударные волны, возмущение распадается на три простые волны, как пока-

зано на рисунке. Их существование можно установить, заметив, что в каждой из них две характеристики выходят из области с однородными начальными условиями.

В областях, расположенных между простыми волнами, все три характеристики выходят из той или другой области с однородными начальными условиями; следовательно, в них имеется однородное состояние с $u = 0$, $a = a_0$, $S = S_0$. Как только найдено решение в области взаимодействия, простые волны можно описать аналитически (как и в § 6.8) с граничными условиями, диктуемыми областью взаимодействия.

Если энтропия первоначально всюду одинакова, то течение является изэнтропическим. Тогда на рис. 6.4 P -волна отсутствует и область взаимодействия ограничивается треугольником abc .

На практике решение в области взаимодействия чаще всего находится численно. Однако в изэнтропическом случае можно сделать некоторые аналитические упрощения; соответствующая задача была полностью решена Риманом. Для изэнтропического течения вместо ρ можно использовать a и переписать уравнения в виде

$$\begin{aligned} a_t + ua_x + \frac{\gamma-1}{2} au_x &= 0, \\ u_t + uu_x + \frac{2}{\gamma-1} aa_x &= 0. \end{aligned} \quad (6.121)$$

Уравнения такого вида преобразуются в линейную систему уравнений, если зависимые и независимые переменные поменять ролями; это так называемое «преобразование годографа». При таком преобразовании

$$x_u = -\frac{a_t}{J}, \quad x_a = \frac{u_t}{J}, \quad t_u = \frac{a_x}{J}, \quad t_a = -\frac{u_x}{J},$$

где J — якобиан

$$J = u_t a_x - a_t u_x.$$

Поскольку уравнения (6.121) квазилинейны и однородны, якобиан сокращается и уравнения принимают вид

$$\begin{aligned} x_u + ut_u + \frac{\gamma-1}{2} at_a &= 0, \\ x_a - ut_a + \frac{2}{\gamma-1} at_u &= 0. \end{aligned}$$

Это линейные уравнения для $x(u, a)$ и $t(u, a)$. Заметим важность того обстоятельства, что якобиан J сокращается: в противном случае уравнения были бы существенно нелинейны.

Уравнение для $t(u, a)$ можно получить, исключив x перекрестным дифференцированием. Тогда

$$\left(\frac{\gamma-1}{2}\right)^2 t_{aa} + \frac{\gamma^2-1}{4} \frac{1}{a} t_a = t_{uu}.$$

Полагая $b = 2a/(\gamma - 1)$, $n = (\gamma + 1)/(2(\gamma - 1))$, перепишем это уравнение так:

$$t_{bb} + \frac{2n}{b} t_b = t_{uu}.$$

При $n = 1$ это — волновое уравнение в сферически симметричном случае, имеющее сравнительно простое общее решение. Действительно, если n — произвольное целое число, то можно проверить, что общее решение имеет вид

$$t = \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} - \frac{\partial^2}{\partial b^2} \right)^{n-1} \left\{ \frac{F(u+b) + G(u-b)}{b} \right\}, \quad (6.122)$$

где F и G — произвольные функции. К счастью, два практически интересных случая с $\gamma = 5/3$ и $\gamma = 7/5$ описываются приведенным решением с $n = 2$ и $n = 3$ соответственно. Инварианты Римана равны $u \pm b$, так что это выражение полностью определяет основную характеристическую структуру.

В линеаризованном приближении уравнения (6.121) имеют вид

$$a_t + \frac{\gamma-1}{2} a_0 u_x = 0, \quad u_t + \frac{2}{\gamma-1} a_0 a_x = 0,$$

и общим решением является

$$u = f(x - a_0 t) + g(x + a_0 t),$$

$$b - b_0 = \frac{2}{\gamma-1} (a - a_0) = f(x - a_0 t) - g(x + a_0 t).$$

Нелинейное решение записывается в форме, соответствующей обращению этих соотношений.

Для задачи Коши a и u — заданные функции

$$a = \mathcal{A}(x), \quad u = \mathcal{U}(x) \quad \text{при} \quad t = 0.$$

В принципе эти выражения определяют в параметрическом виде некоторую кривую $\mathcal{U}$ в (b, u) -плоскости, на которой заданы x и $t = 0$. Этих двух граничных условий достаточно для определения решения в соответствующем характеристическом треугольнике¹⁾. На практике, однако, как было указано выше, обычно используют численное решение в (x, t) -плоскости.

¹⁾ Решение задачи о распаде произвольного разрыва и обсуждение возникающих при этом вопросов об единственности решения содержится в книге Б. Л. Рождественского и Н. Н. Яненко «Системы квазилинейных уравнений», М., «Наука», 1968, стр. 247—260. — *Прим. ред.*

Для простых волн либо $u + b$, либо $u - b$ постоянно, так что отображение в (u, b) -плоскость вырожденное: вся область простой волны на (x, t) -плоскости отображается в кривую на (u, b) -плоскости. Тогда взаимодействие двух простых волн на (u, b) -плоскости можно описать решением с переменной t , заданной на характеристиках

$$u + b = b_1, \quad u - b = b_2.$$

Определение функций F и G в этом случае проще. Решение можно также найти и для произвольного значения γ ; подробности указаны в книге Куранта и Фридрихса [1]. Данный анализ ограничен течениями без ударных волн и, по-видимому, представляет в основном академический интерес; в силу этого, мы не приводим здесь детали.

6.13. Задача об ударной трубе

Рассмотрим один частный случай задачи Коши с разрывом в начальных данных, в котором можно найти точное решение. Этот случай важен также потому, что он связан с основным прибором для воспроизведения ударных волн в экспериментальных условиях. Ударная труба — это длинная труба, перегороденная у одного из концов тонкой диафрагмой. В секцию, расположенную за диафрагмой, накачивается газ под высоким давлением. В начальном состоянии имеются две однородные области с

$$u = 0, \quad p = p_1, \quad \rho = \rho_1 \quad \text{при} \quad x > 0$$

и

$$u = 0, \quad p = p_4 > p_1, \quad \rho = \rho_4 \quad \text{при} \quad x < 0.$$

Диафрагма, разделяющая две области исходных однородных состояний, разрывается. При этом возникает ударная волна, распространяющаяся по трубе. Если эффектами трения о стенки трубы можно пренебречь, то эту волну можно рассматривать как плоскую волну, и если ограничиться временем, когда волна еще не отразилась от концов трубы, то точное решение можно получить аналитически.

На рис. 6.5 изображена (x, t) -диаграмма. Поверхность, разделяющая два газа, движется по трубе; возникают ударная волна сжатия, распространяющаяся в сторону газа с низким давлением, и волна разрежения, распространяющаяся в сторону газа с высоким давлением. Поскольку начальные условия не выделяют характерной длины или интервала времени, а длины секций трубы не существенны на ранней стадии, когда возмущения еще не достигли концов, соображения размерности показывают, что решение должно быть постоянным на прямых $x/a_1 t = \text{const}$

в (x, t) -плоскости. Следовательно, скорости ударной волны и поверхности раздела должны быть постоянными, а волна разрежения должна описываться веером, центрированным в начале координат.

Как показано на рис. 6.5, существуют области однородного состояния 1, 2, 3, 4, причем в областях 1 и 4 состояния совпадают

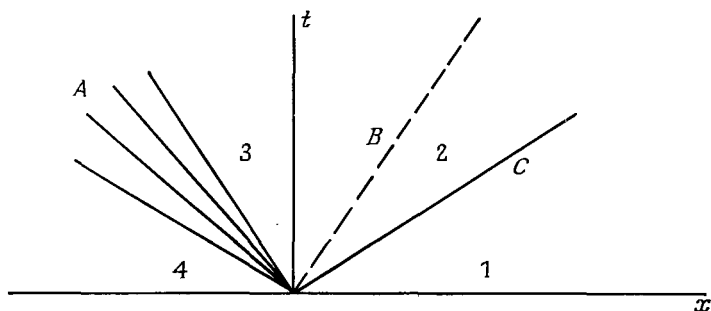


Рис. 6.5. (x, t) -диаграмма для ударной трубы.

A — центрированная простая волна, B — поверхность раздела, C — ударная волна.

с исходными однородными состояниями. Задачу можно, следовательно, рассматривать как комбинацию двух задач о поршне, интерпретируя движение поверхности раздела как движение поршня. Скорости течения по обе стороны поверхности раздела должны совпадать со скоростью самой этой поверхности, так что для течений с обеих сторон поверхность раздела подобна твердой стенке. Однако ее движение заранее не известно и должно быть определено в процессе решения задачи.

Если скорость поверхности раздела равна V , то можно использовать условия на разрыве (6.103)—(6.105) с $u_2 = V$, $u_1 = 0$ и выразить p_2 , ρ_2 и U через V . В частности, интенсивность ударной волны $z = (p_2 - p_1)/p_1$ определяется из (6.104):

$$\frac{V}{a_1} = \frac{z}{\gamma_1 \left(1 + \frac{\gamma_1 + 1}{2\gamma_1} z \right)^{1/2}}. \quad (6.123)$$

Газ по разным сторонам от диафрагмы может иметь различные значения γ . Мы используем обозначение γ_1 для области 1 и γ_4 для области 4. Волна разрежения между областями 3 и 4 является простой волной, для которой

$$S_3 = S_4, \quad \frac{2a_3}{\gamma_4 - 1} + V = \frac{2a_4}{\gamma_4 - 1}.$$

Для политропного газа $S = c_v \ln p/\rho^{\gamma_4}$, $a^2 = \gamma_4 p/\rho$, так что из этих соотношений можно найти также p_3 и ρ_3 . В частности, p_3 опре-

деляется из равенства

$$\frac{V}{a_1} = \frac{2}{\gamma_4 - 1} \frac{a_4}{a_1} \left\{ 1 - \left(\frac{p_3}{p_4} \right)^{(\gamma_4 - 1)/(2\gamma_4)} \right\}. \quad (6.124)$$

В случае необходимости можно определить детали течения в центрированной простой волне; решение аналогично (6.79), но с другим семейством характеристик.

На этой стадии решение полностью определено, если известна скорость V . Поскольку поверхность раздела не имеет массы и суммарная сила, действующая на нее, должна равняться нулю, имеется еще одно соотношение, а именно $p_2 = p_3$. Эти давления определяются из (6.123) и (6.124), и условие $p_2 = p_3$ дает уравнение для V . Более существенно, однако, найти выражение для интенсивности ударной волны z . Если в (6.124) положить $p_3 = p_2 = p_1(1 + z)$ и приравнять два выражения для V/a_1 , то будем иметь

$$\frac{z}{\gamma_1 \left(1 + \frac{\gamma_1 + 1}{2\gamma_1} z \right)^{1/2}} = \frac{2}{\gamma_4 - 1} \frac{a_4}{a_1} \left\{ 1 - \left[\frac{p_1}{p_4} (1 + z) \right]^{(\gamma_4 - 1)/(2\gamma_4)} \right\}.$$

Это уравнение определяет z через известные величины p_4/p_1 и a_4/a_1 .

6.14. Отражение ударной волны

Отражение ударной волны от концевой стенки также можно описать точно. Отражение по нормали плоской ударной волны от плоскости стенки можно проанализировать с помощью условий на разрыве. Пусть индексы 1 и 2 относятся к состояниям впереди падающей ударной волны и позади нее, а индекс 3 — к состоянию позади отраженной ударной волны. Если интенсивность падающей ударной волны равна $z_i = (p_2 - p_1)/p_1$, то состояние 2 определяется равенствами (6.104)–(6.106) с $z = z_i$. Впереди отраженной ударной волны газ находится в состоянии 2, а позади нее в состоянии 3, так что если интенсивность отраженной волны равна $z_r = (p_3 - p_2)/p_2$, то из (6.104) (с соответствующей заменой индексов и знаков скоростей, поскольку отраженная ударная волна распространяется в обратном направлении) имеем

$$\frac{u_2 - u_3}{a_2} = \frac{z_r}{\gamma \left(1 + \frac{\gamma + 1}{2\gamma} z_r \right)^{1/2}}.$$

Около стенки газ неподвижен, откуда $u_3 = 0$. Но нам также известны u_2 и a_2 как функции от z_i , так что получаем соотношение,

определяющее z_r через z_i :

$$\frac{z_i}{\gamma \left\{ (1+z_i) \left(1 + \frac{\gamma-1}{2\gamma} z_i \right) \right\}^{1/2}} = \frac{z_r}{\gamma \left(1 + \frac{\gamma+1}{2\gamma} \right)^{1/2}}.$$

Это равенство дает квадратное уравнение для z_r , и подходящее решение имеет вид

$$z_r = \frac{z_i}{1 + \frac{\gamma-1}{2\gamma} z_i}. \quad (6.125)$$

Для слабых ударных волн $z_i \rightarrow 0$ и из (6.125) имеем $z_r \sim z_i$; следовательно,

$$p_3 - p_1 \sim 2(p_2 - p_1),$$

и при отражении давление у стенки возрастает примерно в два раза. Для сильных ударных волн $z_i \rightarrow \infty$ и

$$z_r \sim \frac{2\gamma}{\gamma-1}, \quad \frac{p_3}{p_2} \sim \frac{3\gamma-1}{\gamma-1} = 8 \quad \text{для } \gamma = 1,4.$$

6.15. Структура ударной волны

В соответствии с общей точкой зрения, развитой в гл. 2, ударная волна интерпретируется как узкая область, в которой происходит резкое изменение параметров течения. На некотором уровне описания ударная волна соответствует разрыву, и этот разрыв заменяется узкой областью при более точном описании. Решающей здесь является проверка правильности выбора сохраняющихся величин, а также — в случае необходимости — оценка толщины ударного слоя в частном случае ударного перехода из одного однородного состояния в другое. Эту задачу о структуре разрыва мы здесь и рассмотрим.

Для одномерного течения уравнения сохранения массы, импульса и энергии имеют вид

$$\begin{aligned} \rho_t + (\rho u)_x &= 0, \\ (\rho u)_t + (\rho u^2 - p_{11})_x &= 0, \\ \left(\frac{1}{2} \rho u^2 + \rho e \right)_t + \left\{ \left(\frac{1}{2} u^2 + e \right) \rho u - p_{11} u + q_1 \right\}_x &= 0. \end{aligned} \quad (6.126)$$

Для уточнения этого использовавшегося до сих пор описания примем соотношения Навье — Стокса для напряжения p_{11} и теплового потока q_1 , сохранив, однако, предположение о локальном термодинамическом равновесии. Эти соотношения сводятся к тому, что p_{11} линейно зависит от градиента скорости, а q_1 линейно зависит от градиента температуры. В общем виде они приведены выше

(уравнения (6.28) и (6.29)), а для одномерного течения сводятся к следующим:

$$p_{11} = -p + \frac{4}{3} \mu u_x, \quad q_1 = -\lambda T_x. \quad (6.127)$$

Термодинамические соотношения

$$e = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho}, \quad p = \mathcal{R} \rho T \quad (6.128)$$

замыкают систему в случае политропного газа.

При описании структуры ударной волны течение считается стационарным относительно ударной волны. Поэтому все параметры течения зависят только от $X = x - Ut$. Для таких функций

$$\frac{\partial}{\partial t} = -U \frac{d}{dX}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{d}{dX}$$

и уравнения (6.126), имеющие форму законов сохранения, интегрируются и принимают вид

$$\begin{aligned} -U\rho + \rho u &= A, \\ -U(\rho u) + \left(\rho u^2 + p - \frac{4}{3}\mu u_x\right) &= B, \\ -U\left(\frac{1}{2}\rho u^2 + \rho e\right) + \left\{\left(\frac{1}{2}u^2 + e\right)\rho u + p u - \right. \\ &\quad \left. - \frac{4}{3}\mu u u_x - \lambda T_x\right\} = C, \end{aligned} \quad (6.129)$$

где A , B и C — постоянные интегрирования. При $X \rightarrow +\infty$ течение стремится к однородному состоянию, обозначаемому индексом 1. Постоянные A , B и C при этом находятся по U , u_1 , ρ_1 , p_1 . Если, кроме того, течение стремится к однородному состоянию u_2 , ρ_2 , p_2 при $X \rightarrow -\infty$, то ясно, что состояния на $\pm\infty$ связаны условиями на разрыве (6.87)–(6.89).

Соотношения (6.127) можно также использовать для дальнейшего исследования уравнений, описывающих изменение энтропии. Уравнение (6.92) можно теперь переписать в следующем явном виде:

$$\frac{d}{dX} \{\rho(U-u)S\} = -\frac{4/3\mu u_x^2 + (\lambda T_x)_x}{T},$$

или — еще лучше — в виде

$$\frac{d}{dX} \left\{ \rho(U-u)S + \frac{\lambda T_x}{T} \right\} = -\frac{4/3\mu u_x^2 + \lambda T_x^2}{T}.$$

Отсюда

$$[\rho(U-u)S]_1^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{4/3\mu u_x^2 + \lambda T_x^2}{T} dX > 0.$$

Теперь ясно, что изменение энтропии при переходе через ударную волну является следствием диссипации энергии за счет вязкости и теплопередачи, и это изменение автоматически записывается с нужным знаком.

Детали профиля ударной волны между предельными значениями на $\pm\infty$ определяются обыкновенными дифференциальными уравнениями (6.129). Положив $v = U - u$ и введя новые постоянные, связанные с A , B и C , эти уравнения можно переписать так:

$$\begin{aligned}\rho v &= Q, \\ \rho v^2 + p + \frac{4}{3} \mu v_x &= P, \\ \left(h + \frac{1}{2} v^2\right) \rho v + \frac{4}{3} \mu v v_x + \lambda T_x &= E.\end{aligned}$$

Это уравнения стационарного течения в системе координат, движущейся вместе с ударной волной, причем положительное направление v соответствует отрицательному X -направлению. Условия на разрыве, связывающие однородные состояния на $\pm\infty$, имеют теперь вид, соответствующий (6.95)–(6.97).

Уравнение неразрывности $\rho v = Q$ и соотношения (6.128) можно использовать для сведения системы к двум уравнениям для v и T . Для политропного газа

$$h = \frac{\gamma}{\gamma-1} \mathcal{R}T = c_p T$$

и несколько удобнее работать с v и h . Уравнения имеют вид

$$\frac{4}{3} \mu v_x = P - Q \left(v + \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{h}{v} \right), \quad (6.130)$$

$$\frac{\lambda}{c_p} h_x + \frac{4}{3} \mu v v_x = E - Q \left(h + \frac{1}{2} v^2 \right). \quad (6.131)$$

Качественное исследование показывает, что решение требуемого вида существует. В частном случае $\lambda/c_p = \frac{4}{3} \mu$, что является хорошим приближением для воздуха, существует первый интеграл и решение находится в явном виде. (Величина $\mu c_p / \lambda$ представляет собой число Прандтля и равняется 0,71 для воздуха при обычных температурах.) Для такого значения λ/c_p уравнение (6.131) можно переписать так:

$$\frac{4}{3} \mu \left(h + \frac{1}{2} v^2 \right)_x = E - Q \left(h + \frac{1}{2} v^2 \right).$$

Правая часть стремится к нулю при $X \rightarrow \infty$, так что $h_1 + \frac{1}{2} v_1^2 = E/Q$. Следовательно, единственное решение, ограниченное при $X \rightarrow -\infty$, это

$$h + \frac{1}{2} v^2 = \frac{E}{Q}$$

всюду. В этом случае величина $h + \frac{1}{2} v^2$ не только одинакова по обе стороны от ударной волны, но остается постоянной по всей ударной волне. Уравнение (6.130) тогда принимает вид

$$\frac{4}{3} \mu v_x = P - Q \left(\frac{\gamma+1}{2\gamma} v + \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{E}{Q} \frac{1}{v} \right).$$

Поскольку постоянные *должны* быть такими, чтобы правая часть обращалась в нуль как при $v = v_1$, так и при $v = v_2$, это уравнение можно переписать иначе:

$$\frac{4}{3} \mu v_x = \frac{\gamma+1}{2\gamma} Q \frac{(v_1-v)(v-v_2)}{v}.$$

Это уравнение легко интегрируется, что дает

$$\frac{3Q}{4\mu} \frac{\gamma+1}{2\gamma} X = \frac{v_2}{v_1-v_2} \ln(v-v_2) - \frac{v_1}{v_1-v_2} \ln(v_1-v).$$

В нашем случае $Q = \rho_1 v_1$, так что толщина ударного слоя пропорциональна

$$\frac{4\mu}{3\rho_1} \frac{2\gamma}{\gamma+1} \frac{1}{v_1-v_2}.$$

Как и ожидалось, она становится меньше, если μ убывает при фиксированной интенсивности волны, а также если интенсивность волны возрастает при фиксированном μ .

6.16. Автомодельные решения

Решение вида простой волны связано с плоской волной, распространяющейся в однородную область. Задачи с цилиндрической или сферической симметрией и задачи о плоских волнах, распространяющихся в неоднородную область, являются более сложными. Можно построить довольно общую приближенную теорию слабых волн (это будет сделано в гл. 9), но имеются также некоторые точные решения специального вида, более близкие к содержанию данной главы.

Рассмотрим сначала цилиндрическое или сферическое волновое движение. Уравнения (6.49) сводятся к следующим:

$$\rho_t + u\rho_r + \rho \left(u_r + \frac{ju}{r} \right) = 0, \quad (6.132)$$

$$u_t + uu_r + \frac{1}{\rho} p_r = 0, \quad (6.133)$$

$$p_t + up_r - a^2(\rho_t + u\rho_r) = 0, \quad (6.134)$$

где r — расстояние от центра, а $j = 1, 2$ для цилиндрических и сферических волн соответственно.

Характеристические уравнения почти такие же, как и § 6.7; дополнительный член $j\rho u/r$ не содержит производных и, следовательно, не влияет на выбор подходящих линейных комбинаций. Теперь эти характеристические уравнения принимают вид

$$\frac{dp}{dt} \pm \rho a \frac{du}{dt} + j \frac{\rho a^2 u}{r} = 0 \quad \text{на} \quad \frac{dr}{dt} = u \pm a, \quad (6.135)$$

$$\frac{dp}{dt} - a^2 \frac{d\rho}{dt} = 0 \quad \text{на} \quad \frac{dr}{dt} = u. \quad (6.136)$$

Безобидный на вид дополнительный член в уравнении (6.135) не позволяет получить решение типа простой волны. Для изэнтропического течения уравнение на характеристике C_- имеет вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{2}{\gamma-1} a - u \right) + j \frac{au}{r} = 0, \quad \frac{dr}{dt} = u - a. \quad (6.137)$$

Его уже нельзя раз и навсегда проинтегрировать и получить простое соотношение между a и u . Вследствие этого не существует точных решений, соответствующих простым волнам плоского течения. Можно использовать некоторые приближенные методы и получить аналогичные решения, но они ограничены слабыми возмущениями. Такая приближенная теория и будет построена в гл. 9.

Однако, используя другой подход, можно найти класс точных решений, которые оказываются удивительно полезными. Система уравнений (6.132)—(6.134) имеет специальные автомодельные решения, для которых все параметры течения имеют вид $t^m f(r/t^n)$. В силу этих свойств течения, уравнения в частных производных сводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям с независимой переменной r/t^n .

Задача о сильном взрыве

Одно из наиболее известных автомодельных решений описывает взрывную волну, вызванную сильным взрывом. Оно было найдено Седовым, а также независимо Тейлором и фон Нейманом в связи с исследованиями взрыва атомной бомбы. Вид этого решения можно найти на основе анализа размерностей. Во-первых, предполагается, что взрыв можно идеализировать как внезапное высвобождение некоторого количества энергии E , сосредоточенной в точке, и что это единственный размерный параметр, вводимый взрывом. Во-вторых, результирующее возмущение считается настолько сильным, что начальное давление и скорость звука для окружающего воздуха пренебрежимо малы по сравнению с давлениями и скоростями возмущенного течения. Тогда единственным размерным параметром, связанным с окружающим газом, оказывается плотность ρ_0 . В частности, применимы соотношения (6.110)

для сильной ударной волны, так что за ударной волной, распространяющейся со скоростью U ,

$$u = \frac{2}{\gamma+1} U, \quad \rho = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \rho_0, \quad p = \frac{2}{\gamma+1} \rho_0 U^2. \quad (6.138)$$

Анализ размерностей основан на том факте, что параметрами задачи являются только энергия E с размерностью ML^2T^{-2} и плотность ρ_0 с размерностью ML^{-3} . Единственный параметр, связанный с размерностями длины и времени, — это E/ρ_0 с размерностью L^5T^{-2} или некоторая функция от него. Рассмотрим теперь различные величины, встречающиеся в процессе решения. Течение опережается ударной волной при $r = R(t)$. Поскольку функция $R(t)$ имеет размерность длины, то единственно возможная форма ее зависимости от t такова:

$$R(t) = k \left(\frac{E}{\rho_0} \right)^{1/5} t^{2/5}, \quad (6.139)$$

где k — некоторое безразмерное число. Затем из условий на разрыве (6.138) следует, что давление и скорость сразу за ударной волной равны

$$p = \frac{8}{25} \frac{k^2 \rho_0}{\gamma+1} \left(\frac{E}{\rho_0} \right)^{2/5} t^{-6/5}, \quad u = \frac{4}{5} \frac{k}{\gamma+1} \left(\frac{E}{\rho_0} \right)^{1/5} t^{-3/5},$$

или, что то же самое,

$$p = \frac{8}{25} \frac{k^5}{\gamma+1} ER^{-3}, \quad u = \frac{4}{5} \frac{k^{5/2}}{\gamma+1} \left(\frac{E}{\rho_0} \right)^{1/2} R^{-3/2}. \quad (6.140)$$

Как обычно, приходится удивляться, что, исходя из простого анализа размерностей, можно получить столь ценную информацию.

Можно продолжить анализ размерностей и установить функциональный вид u , ρ и p во всем поле течения. Поскольку не существует независимых масштабов длины и времени, связанных с параметрами задачи, а комбинация E/ρ_0 имеет размерность L^5T^{-2} , любые безразмерные функции от r и t могут зависеть только от комбинации $\xi = Et^2/(\rho_0 r^5)$. Мы будем использовать величину

$$\xi = \frac{r}{R(t)},$$

в силу (6.139), пропорциональную $\xi^{-1/5}$. Тогда, например, величины ut/R , ρ/ρ_0 , $pt^2/(\rho_0 R^2)$ являются безразмерными и должны зависеть только от ξ . Следуя Тейлору [4], положим

$$u = \frac{2}{5} \frac{R}{t} \Phi(\xi), \quad \rho = \rho_0 \Psi(\xi), \quad p = \left(\frac{2}{5} \frac{R}{t} \right)^2 \frac{\rho_0}{\gamma} f(\xi), \quad (6.141)$$

где множитель $2/5$ включен потому, что отношение $2R/(5t)$ представляет собой скорость ударной волны. Существуют другие

эквивалентные формы, и выбор

$$u = \frac{2}{5} \frac{r}{t} V(\xi), \quad \rho = \rho_0 \Omega(\xi), \quad p = \left(\frac{2}{5} \frac{r}{t} \right)^2 \rho_0 P(\xi)$$

удовлетворяет рассматриваемой общей схеме. Очевидна связь

$$\varphi = \xi V, \quad \psi = \Omega, \quad f = \gamma \xi^2 P.$$

Ударная волна находится в точке $\xi = 1$ и имеет скорость U , равную $\dot{R} = 2R/(5t)$, так что условия на разрыве имеют вид

$$\varphi(1) = \frac{2}{\gamma+1}, \quad \psi(1) = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}, \quad f(1) = \frac{2\gamma}{\gamma+1}. \quad (6.142)$$

При подстановке выражений (6.141) в уравнения движения получаются три обыкновенных дифференциальных уравнения первого порядка для функций $\varphi(\xi)$, $\psi(\xi)$, $f(\xi)$. Их следует проинтегри-

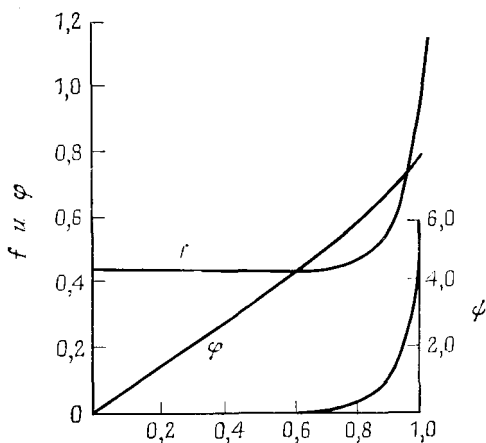


Рис. 6.6. Нормированные скорость φ , плотность ψ и давление f для сильного взрыва (по Тейлору).

ровать в пределах от $\xi = 1$ до $\xi = 0$ с начальными условиями (6.142). Параметр k не входит в уравнения. Он связан с определением E как полной энергии течения. Таким образом, мы полагаем

$$E = \int_0^{R(t)} \left(\frac{p}{\gamma-1} + \frac{1}{2} \rho u^2 \right) 4\pi r^2 dr,$$

что дает

$$1 = 4\pi k^5 \left(\frac{2}{5} \right)^2 \int_0^1 \left\{ \frac{f}{\gamma(\gamma-1)} + \frac{1}{2} \psi \varphi^2 \right\} \xi^2 d\xi.$$

Функции φ , ψ , f , графики которых приведены на рис. 6.6, получены Тейлором численным интегрированием уравнений для случая $\gamma = 1,4$. Используя другие переменные, Седов показал, что эти уравнения можно решить аналитически; см. гл. 4 книги Седова [1].

Автомодельные уравнения

Автомодельное решение, описывающее сильный взрыв, принадлежит семейству решений, для которых

$$\begin{aligned} u &= n \frac{r}{t} V(\xi), \quad p = n^2 \rho_0 \frac{r^2}{t^2} P(\xi), \\ \rho &= \rho_0 \Omega(\xi), \quad \xi = \frac{r}{(ct)^n}. \end{aligned} \quad (6.143)$$

Если эти выражения подставить в уравнения (6.132)–(6.134) и учесть, что частные производные функции $f(\xi)$ можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} f(\xi) &= \xi_t f'(\xi) = -n \frac{r}{t} f'(\xi), \\ \frac{\partial}{\partial r} f(\xi) &= \xi_r f'(\xi) = \frac{\xi}{r} f'(\xi), \end{aligned}$$

то множители, зависящие от r и t , сократятся и получатся обыкновенные дифференциальные уравнения по одной переменной ξ . Удобнее всего они записываются для V , $A = (\gamma P / \Omega)^{1/2}$ и Ω ; при этом скорость звука равна

$$a = n \frac{r}{t} A(\xi).$$

Эти уравнения таковы:

$$\begin{aligned} \{(V-1)^2 - A^2\} \xi \frac{dV}{d\xi} &= \\ &= \left\{ (j+1)V - \frac{2(1-n)}{n\gamma} \right\} A^2 - V(V-1) \left(V - \frac{1}{n} \right), \end{aligned} \quad (6.144)$$

$$\begin{aligned} \{(V-1)^2 - A^2\} \frac{\xi}{A} \frac{dA}{d\xi} &= \\ &= \left\{ 1 - \frac{1-n}{\gamma n} (V-1)^{-1} \right\} A^2 + \frac{\gamma-1}{2} V \left(V - \frac{1}{n} \right) - \\ &\quad - \frac{\gamma-1}{2} (j+1) V (V-1) - (V-1) \left(V - \frac{1}{n} \right), \end{aligned} \quad (6.145)$$

$$\begin{aligned} \{(V-1)^2 - A^2\} \frac{\xi}{\Omega} \frac{d\Omega}{d\xi} &= \\ &= 2 \left\{ (j+1)U - \frac{1-n}{n\gamma} \right\} (V-1)^{-1} A^2 - \\ &\quad - V \left(V - \frac{1}{n} \right) - (j+1) V (V-1). \end{aligned} \quad (6.146)$$

¹ Решение этой задачи было впервые опубликовано Л. И. Седовым в статье «Движение воздуха при сильном взрыве», ДАН, 52 (1946), № 1, 17–20.— Прим. ред.

Решение может иметь особенность там, где

$$(V - 1)^2 - A^2 = 0. \quad (6.147)$$

Из вида уравнений следует, что эти особенности лежат на кривой $\xi = \text{const}$. Исходные уравнения являлись гиперболическими, и, как мы знаем, особенности решения лежат на характеристиках

$$\frac{dr}{dt} = u \pm a = \frac{nr}{t} (V \pm A). \quad (6.148)$$

На кривой $\xi = \text{const}$ мы имеем

$$\frac{dr}{dt} = \frac{nr}{t}.$$

Следовательно, на кривой $\xi = \text{const}$, являющейся характеристикой, должно выполняться равенство $V \pm A = 1$. Это согласуется с (6.147). Иначе говоря, особенность может возникнуть лишь на характеристике, проходящей через начало координат, и эта предельная характеристика принадлежит семейству $\xi = \text{const}$.

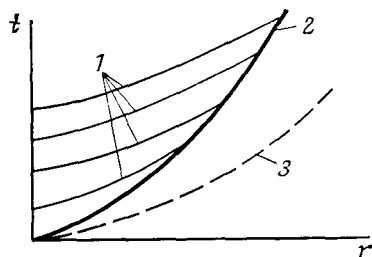


Рис. 6.7. (r, t) -диаграмма для сильного взрыва.

1 — характеристики, 2 — ударная волна, 3 — предельная характеристика.

В задаче о сильном взрыве $n = 2/5$ и предельная характеристика не может оказаться за ударной волной. Она может быть расположена лишь в области перед ударной волной, как показано на рис. 6.7, но течение там является однородным с $V = A = 0$ и особенности отсутствуют. Предельная характеристика представляет собой край складки в (r, t) -плоскости для многозначного решения, которое заменяется ударной волной.

Задача Гудерля о сходящейся ударной волне

Предельная характеристика играет решающую роль в задаче о сходящейся сферической или цилиндрической волне, схлопывающейся к центру. В этом случае отсутствуют соображения размерности, позволяющие установить автомодельность решения.

Однако Гудерлей [1] предложил искать решение задачи в виде (6.143) с некоторым показателем степени n , который следует определить. За нулевой момент времени t выбирается момент, когда ударная волна достигает центра, так что в равенствах (6.143) $t \leq 0$ и $C < 0$. В пользу автомоделного решения говорит то, что особенность в центре связана с ударной волной, которая

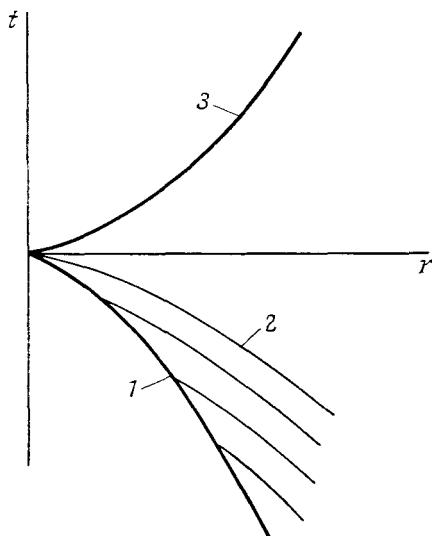


Рис. 6.8. (r, t) -диаграмма для сходящейся ударной волны.

1 — исходная ударная волна, 2 — предельная характеристика, 3 — отраженная ударная волна.

входит по некоторой кривой в (r, t) -плоскости и отражается вдоль некоторой другой кривой. Это наводит на мысль, что решение связано с некоторым семейством кривых, входящих в начало координат, а самым простым является семейство вида $r/(-t)^n = \text{const}$, которое и следует попробовать. Во всяком случае, решение этого типа существует! Уравнения тогда те же, что и выведенные выше уравнения (6.144)—(6.146) с некоторым n , которое следует определить. Сходящуюся ударную волну можно нормировать так, чтобы она находилась на кривой

$$\xi = \frac{r}{(ct)^n} = 1,$$

поскольку параметр C можно взять каким угодно.

В рассматриваемом случае геометрия характеристик на (r, t) -плоскости показывает (это ясно из схемы, приведенной на рис. 6.8), что предельная характеристика, проходящая через начало коор-

динат, находится в области течения. Поэтому вопрос об особенностях на ней становится решающим. При интегрировании уравнений (6.144)—(6.146) для $V(\xi)$, $P(\xi)$, $\Omega(\xi)$ с начальными значениями при $\xi=1$ мы выходим на кривую $(V-1)^2 - A^2 = 0$. При этом у решения возникает особенность, если правые части равенств (6.144)—(6.146) не обращаются также в нуль. Заметим, что искомое решение не имеет особенностей и что показатель степени n еще не выбран. Гудерлей учел эти два обстоятельства и предложил выбрать n так, чтобы правые части равенств (6.144)—(6.146) обращались в нуль на кривой (6.147) и решение гладко продолжалось за предельную характеристику.

Численное интегрирование было проведено с большой точностью Батлером [1], и найденные значения n представлены в табл. 6.1. Давление в ударной волне и ее скорость имеют вид

$$p \propto r^{-2(1-n)/n}, \quad U \propto r^{-(1-n)/n},$$

показатель степени $(1-n)/n$ также приведен в таблице.

Таблица 6.1

γ	Цилиндрическая волна, $j=1$		Сферическая волна, $j=2$	
	n	$(1-n)/n$	n	$(1-n)/n$
5/3	0,815625	0,226054	0,688377	0,452692
7/5	0,835217	0,197294	0,717173	0,394364
6/5	0,861163	0,161220	0,757142	0,320756

Любопытно, что показатель степени $(1-n)/n$ для $j=2$ приблизительно вдвое превосходит свое значение для $j=1$. Хотелось бы привести доказательство справедливости точного соотношения. Приближенная теория, которая будет изложена ниже (см. гл. 8), дает этот результат автоматически, но тем не менее результат в *точном* виде кажется неверным.

Гудерлей показал также, что отраженная ударная волна может быть описана тем же автомодельным решением. Наиболее интересно возрастание ее интенсивности при отражении. В этой идеализированной модели и исходная, и отраженная волны имеют в центре бесконечную интенсивность и скорость, но отношение интенсивностей остается конечным. Гудерлей показал, что при $\gamma=7/5$ отношение давления за отраженной ударной волной к давлению за исходной ударной волной составляет примерно 26 для сферических волн ($j=2$) и примерно 17 для цилиндрических волн ($j=1$). Для плоских волн это отношение равно 8 (см. § 6.14).

Бесконечные значения в центре можно устранить учетом, скажем, эффектов вязкости, но более важный вопрос связан с устой-

чивостью. Ниже будет показано, что приближенная теория предсказывает, что малые несимметричные отклонения формы ударной волны будут расти и ударная волна не будет сходиться точно в центр. Однако неустойчивость влияет на поведение только в малой окрестности центра, и, по-видимому, решение Гудерля применимо для большей части течения.

Другие автомодельные решения

На основе анализа размерностей можно утверждать, что течение, создаваемое равномерно расширяющейся сферой, должно описываться автомодельным решением с u , p , ρ , зависящими только от r/Ct , где C — скорость сферы. Уравнения имеют вид (6.143) — (6.146) с $n = 1$, и в этом случае автомодельность решения не связана с сильными ударными волнами. Эта задача была поставлена и решена Тейлором [3].

В некоторых отношениях задачи о плоских волнах, распространяющихся в неоднородной среде с плотностью $\rho_0(x)$, аналогичны задачам о сферических или цилиндрических волнах. Оказывается, что они имеют соответствующие автомодельные решения. Сакураи [1] рассмотрел случаи, для которых $\rho_0(x) \propto x^m$, и обнаружил, что их можно исследовать так же, как задачу о сходящейся ударной волне. В частности, показатель степени в автомодельной переменной был выбран так, чтобы устранить возможную особенность на предельной характеристике, проходящей через точку $x = 0$ (см. § 8.2).

Другие случаи, включая экспоненциальную стратификацию плотности, были изучены Седовым [1, гл. 4], Зельдовичем и Райзером [1] и Хейзом [1].

6.17. Стационарное сверхзвуковое течение

Задачу о стационарном сверхзвуковом течении также можно решать методами, развитыми для нестационарных волн. Действительно, между задачами из этих двух областей существует тесная аналогия. Двумерное стационарное течение соответствует нестационарным плоским волнам, осесимметричное стационарное течение — цилиндрическим волнам.

Если пренебречь массовыми силами, то стационарное течение можно описать уравнениями

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{q}) = 0, \quad (6.149)$$

$$\nabla \left(\frac{1}{2} \mathbf{q}^2 \right) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q} = -\frac{1}{\rho} \nabla p, \quad (6.150)$$

$$\mathbf{q} \cdot \nabla S = 0. \quad (6.151)$$

Эти уравнения получены из (6.49) небольшими изменениями. Удобно использовать векторные обозначения, обозначив вектор скорости через $\mathbf{q}$ (поскольку позднее для двумерного течения компоненты скорости будут обозначаться u и v) и заменив первоначальное выражение $(\mathbf{q} \cdot \nabla) \mathbf{q}$ в левой части уравнения (6.150) на указанное эквивалентное выражение, где $\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{q}$ — завихренность.

Здесь можно записать термодинамическое соотношение (6.31) в виде

$$T dS = dh - \frac{1}{\rho} dp$$

и, учитывая (6.150) и (6.151), вывести уравнения

$$\nabla \left(\frac{1}{2} \mathbf{q}^2 + h \right) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q} = T \nabla S, \quad (6.152)$$

$$\mathbf{q} \cdot \nabla \left(\frac{1}{2} \mathbf{q}^2 + h \right) = 0. \quad (6.153)$$

Следовательно, в силу (6.151) и (6.153), энтропия S и «полная энтальпия» $h + \frac{1}{2} q^2$ остаются постоянными вдоль линий тока в любой непрерывной части течения. Если непрерывное течение выходит из однородного состояния с $S = S_0$, $h = h_0$, $q = U$ на бесконечности, то имеем

$$h + \frac{1}{2} q^2 = h_0 + \frac{1}{2} U^2, \quad (6.154)$$

$$S = S_0 \quad (6.155)$$

по всему течению. Если возникает ударная волна, то эти соотношения следует пересмотреть, поскольку параметры течения могут меняться скачком, когда линии тока пересекают ударную волну, и величина скачка может быть разной для разных линий тока. Но пока будем считать, что эти соотношения выполняются. Тогда уравнение (6.152) сводится к

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q} = 0. \quad (6.156)$$

Нас интересуют только плоские или осесимметричные течения, для которых $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{q}$ ортогональны, так что $\boldsymbol{\omega} = 0$, т. е. течение является *безвихревым*. В трехмерном случае существуют особые течения, так называемые течения Бельтрами, удовлетворяющие равенству (6.156) с $\boldsymbol{\omega} \neq 0$.

Для политропного газа $h = a^2/(\gamma - 1)$ и уравнение Бернулли (6.154) можно записать в виде

$$a^2 = a_0^2 - \frac{\gamma - 1}{2} (q^2 - U^2), \quad (6.157)$$

выразив a через q . Если течение к тому же изэнтропическое, то p и ρ можно выразить через a и, следовательно, через q .

Рассмотрим теперь непрерывное двумерное течение с однородными условиями вверх по течению. Течение ищется на (x, y) -плоскости, и $\mathbf{q} = (u, v)$. Поскольку все термодинамические величины, в силу (6.155) и (6.157), являются известными функциями от q , необходимы два уравнения для u и v . Можно использовать (6.149) и условие отсутствия вихрей $\omega = 0$. Остальные уравнения будут удовлетворяться автоматически, в силу тех или других интегралов движения. Имеем

$$(\rho u)_x + (\rho v)_y = 0,$$

$$v_x - u_y = 0,$$

где ρ выражено через u и v с помощью (6.157). Связь между a и ρ имеет вид $a^2 \propto \rho^{\gamma-1}$, откуда

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{1}{\gamma-1} \frac{d(a^2)}{a^2} = -\frac{u du + v dv}{a^2}.$$

Следовательно, уравнения можно преобразовать к виду

$$(u^2 - a^2) u_x + 2uvu_y + (v^2 - a^2) v_y = 0, \quad (6.158)$$

$$v_x - u_y = 0, \quad (6.159)$$

где a^2 дается равенством (6.157).

Характеристические уравнения

Согласно процедуре, описанной в гл. 5, следующий шаг состоит в исследовании характеристической формы. Выкладки, хотя и элементарные, довольно сложны, и приходится использовать некие ухищрения, чтобы сделать их как можно короче. Мы начнем с непосредственных вычислений и рассмотрим линейную комбинацию

$$(u^2 - a^2) u_x + (2uv - l) u_y + lv_x + (v^2 - a^2) v_y = 0.$$

Это уравнение имеет характеристическую форму

$$(u^2 - a^2) (u_x + tu_y) + l (v_x + tv_y) = 0,$$

если

$$(u^2 - a^2) t = 2uv - l \quad \text{и} \quad lt = v^2 - a^2.$$

Величина t должна удовлетворять уравнению

$$(u^2 - a^2) t^2 - 2uvt + (v^2 - a^2) = 0. \quad (6.160)$$

Это уравнение имеет два вещественных корня, если $u^2 + v^2 > a^2$. Следовательно, система является гиперболической в тех областях, где течение сверхзвуковое. Соответствующие характеристические уравнения имеют вид

$$(u^2 - a^2) t \frac{du}{dx} + (v^2 - a^2) \frac{dv}{dx} = 0 \quad \text{при} \quad \frac{dy}{dx} = t. \quad (6.161)$$

Поскольку имеются только две переменные, дифференциальная форма

$$(u^2 - a^2) m du + (v^2 - a^2) dv \quad (6.162)$$

интегрируема при любом выборе m и можно получить две римановы переменные. Процедура ясна, но в этом месте (зная заранее ответ!) можно воспользоваться маленькой хитростью. При этом следует руководствоваться симметрией.

Поскольку m — наклон характеристики, то (6.160) можно представить как соотношение между дифференциалами dx и dy на характеристике и переписать в виде

$$(u^2 - a^2) dy^2 - 2uv dx dy + (v^2 - a^2) dx^2 = 0,$$

или лучше

$$(u dy - v dx)^2 = a^2 (dx^2 + dy^2).$$

Если χ — угол между характеристикой и осью x , а θ — угол между линией тока и осью x , то

$$\begin{aligned} dx &= \cos \chi ds, & dy &= \sin \chi ds, \\ u &= q \cos \theta, & v &= q \sin \theta. \end{aligned}$$

Тогда дифференциальное соотношение принимает вид

$$q^2 \sin^2 (\chi - \theta) = a^2. \quad (6.163)$$

Но a есть функция от q , так что если ввести переменную μ , определяемую условиями

$$\sin \mu = \frac{a}{q}, \quad 0 < \mu < \frac{\pi}{2}, \quad (6.164)$$

то соотношение (6.163) перейдет в равенство

$$\chi = \theta \pm \mu. \quad (6.165)$$

Характеристики образуют углы $\pm \mu$ с направлением линий тока. Величина μ называется *углом Маха* и связана с q соотношениями (6.164) и (6.157). Ввиду их важной роли мы будем далее работать с двумя независимыми переменными μ и θ вместо q и θ или u и v .

Осталось перейти к новым переменным в дифференциальном выражении (6.162) для римановых переменных. На характеристике выражение (6.162) обращается в нуль; следовательно, (6.160) также можно использовать для нахождения связи между du и dv . Эта связь имеет вид

$$(v dv + u du)^2 = a^2 (du^2 + dv^2).$$

Используя q и θ , получаем

$$q^2 dq^2 = a^2 (dq^2 + q^2 d\theta^2),$$

или

$$d\theta \pm \left(\frac{q^2}{a^2} - 1 \right)^{1/2} \frac{dq}{q} = 0.$$

Следовательно, римановы переменные равны

$$\theta \pm P(\mu),$$

где

$$\begin{aligned} P(\mu) &= \int \left(\frac{q^2}{a^2} - 1 \right)^{1/2} \frac{dq}{q} = \int \frac{\cos^2 \mu}{\sin^2 \mu + (\gamma - 1)/2} d\mu = \\ &= \sqrt{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}} \arctg \left(\sqrt{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}} \operatorname{tg} \mu \right) - \mu. \end{aligned} \quad (6.166)$$

Таким образом, характеристические уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \theta + P(\mu) &= \text{const} \quad \text{на} \quad C_+: \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\theta + \mu), \\ \theta - P(\mu) &= \text{const} \quad \text{на} \quad C_-: \quad \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\theta - \mu). \end{aligned} \quad (6.167)$$

Простые волны

Частное решение, для которого одна из римановых переменных постоянна во всей области течения, будем по-прежнему называть простой волной. Такое решение получается при изучении

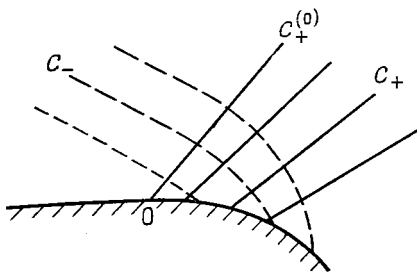


Рис. 6.9. Сверхзвуковое течение разрежения.

обтекания закругленного угла, изображенного на рис. 6.9. Вверх по течению относительно угла течение однородное, скажем с $\mu = \mu_0$, $\theta = 0$. Характеристики C_- все начинаются в этой однородной области; следовательно, на каждой из них

$$P(\mu) - \theta = P(\mu_0). \quad (6.168)$$

Как следствие эта риманова переменная постоянна во всей области течения. Тогда из уравнений для C_+ следует, что μ и θ должны принимать постоянные значения на каждой характеристике C_+ и каждая характеристика C_+ представляет собой прямую с накло-

ном $\operatorname{tg}(\theta + \mu)$. Поскольку граничные значения $\theta = \theta_w$ определяются профилем угла $y = Y_w(x)$, решение можно записать в виде

$$\begin{aligned}\theta &= \theta_w(\xi), \quad P(\mu_w) = P(\mu_0) + \theta_w, \\ y &= Y_w(\xi) + (x - \xi) \operatorname{tg}(\theta_w + \mu_w).\end{aligned}\quad (6.169)$$

Имеется близкая аналогия с задачей о поршне, как в формулах для решения (ср. (6.76) — (6.77)), так и в выводе формул. При этом

$$y \leftrightarrow x, \quad x \leftrightarrow t, \quad \xi \leftrightarrow \tau.$$

Все представляющие интерес величины можно вычислить по найденным значениям μ и θ . Особый интерес представляет

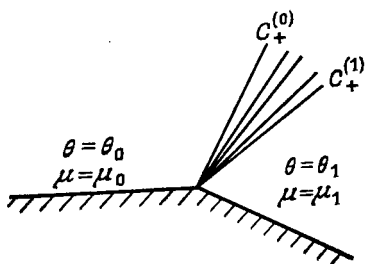


Рис. 6.10. Центрированный веер Прандтля — Мейера для сверхзвукового обтекания угла.

давление у стенки, и для его нахождения требуется только инвариант Римана (6.168); значение μ_w определяется по θ_w , а давление связано с μ соотношением

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{a}{a_0}\right)^{2\gamma/(\gamma-1)} = \left\{ \frac{1 + (\gamma-1)/(2 \sin^2 \mu_0)}{1 + (\gamma-1)/(2 \sin^2 \mu)} \right\}^{\gamma/(\gamma-1)}. \quad (6.170)$$

В предельном случае, соответствующем углу, изображенному на рис. 6.10, простая волна переходит в веер характеристик (веер Прандтля — Мейера) и решение в области веера дается равенствами

$$\begin{aligned}P(\mu) - \theta &= P(\mu_0), \\ \operatorname{tg}(\theta + \mu) &= \frac{y}{x}.\end{aligned}\quad (6.171)$$

Когда наличие угла приводит к сжатию, образуются области многозначности, связанные с пересечениями характеристик (как показано на рис. 6.11), и возникает разрыв (ударная волна). Предельный случай профиля с угловой точкой изображен на рис. 6.12. Если появляется ударная волна, то различные первые интегралы вдоль линий тока и вдоль C_- , вообще говоря, уже

не обязаны сохраняться, поскольку параметры потока меняются скачком при переходе через разрыв (ударную волну). Однако эта ситуация очень похожа на ситуацию для соответствующих нестационарных задач, рассмотренных выше. Для слабых ударных волн эти первые интегралы сохраняются с точностью до членов

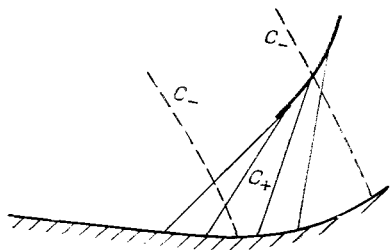


Рис. 6.11. Образование ударной волны в сверхзвуковом течении.

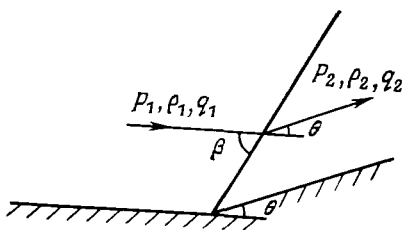


Рис. 6.12. Образование ударной волны при сверхзвуковом обтекании клина.

первого порядка и решение типа простой волны справедливо в первом порядке по величине возмущения. Для полного описания следует только ввести соответствующие разрывы.

Соотношения для косо́й ударной волны

Нам потребуются условия на разрыве для косо́й ударной волны, изображенной на рис. 6.12. Их легко получить из соответствующих соотношений (6.95) — (6.97) для ударной волны, фронт которой ортогонален направлению движения. Если течение на рис. 6.12 рассматривается наблюдателем, движущимся со скоростью $q_1 \cos \beta$ вдоль ударной волны, то течение со стороны 1 будет представляться направленным по нормали к ударной волне. Тогда равенства (6.95) — (6.97) дают соотношения для прямой ударной волны с $v_1 = q_1 \sin \beta$, $v_2 = q_2 \sin (\beta - \theta)$. Кроме того, в этой движущейся системе координат течение одномерно и, следовательно, со стороны 2 тоже направлено по нормальям к ударной волне. Отсюда $q_1 \cos \beta = q_2 \cos (\beta - \theta)$. Полную систему условий на разрыве можно записать (в несколько более общей форме, учитывающей угол наклона θ_1 скорости в области до разрыва относительно некоторого фиксированного направления) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \rho_2 q_2 \sin (\beta - \theta_2) &= \rho_1 q_1 \sin (\beta - \theta_1), \\ p_2 + \rho_2 q_2^2 \sin^2 (\beta - \theta_2) &= p_1 + \rho_1 q_1^2 \sin^2 (\beta - \theta_1), \\ q_2 \cos (\beta - \theta_2) &= q_1 \cos (\beta - \theta_1), \\ h_2 + \frac{1}{2} q_2^2 \sin^2 (\beta - \theta_2) &= h_1 + \frac{1}{2} q_1^2 \sin^2 (\beta - \theta_1). \end{aligned} \quad (6.172)$$

Условия на разрыве можно вывести и непосредственно из уравнений для стационарного течения в форме законов сохранения. В этом случае они связаны с законами сохранения массы, нормального импульса, касательного импульса и энергии соответственно. Можно отметить, что $h + \frac{1}{2}q^2$ на самом деле непрерывна, так что рассуждения, приводящие к равенству (6.154), остаются справедливыми. Однако энтропия и инвариант Римана претерпевают разрыв.

Условия на разрыве определяют p_2 , ρ_2 , q_2 , β по p_1 , ρ_1 , q_1 , θ , и их можно использовать для точного решения задачи, изображенной на рис. 6.12. Если профиль имеет угловую точку как, например, крыло сверхзвукового самолета, то простую волну можно использовать в качестве приближенного решения, когда все значения θ малы. Три из условий на разрыве удовлетворяются с точностью до членов первого порядка соотношениями для простой волны, оставшееся используется для построения линии разрыва. При помощи равенств (6.172) можно показать, что

$$\beta = \mu_1 + \frac{\mu_2 - \mu_1 + \theta}{2} + O(\theta^2).$$

Следовательно, с точностью до членов второго порядка по θ и $\mu_2 - \mu_1$ ударная волна делит угол между характеристиками пополам. Это соответствует равенству (6.113), и введение разрыва почти повторяет аналогичные шаги для нестационарного случая. Такая процедура будет проведена ниже при рассмотрении более интересного случая ударной волны, возникающей на носике осесимметричного тела.

Отражение косой волны

Последнее замечание (оно будет использовано в дальнейшем) касается отражения косой ударной волны от плоской стенки.

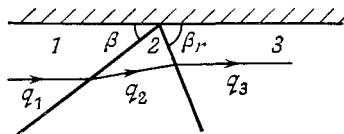


Рис. 6.13. Регулярное отражение ударной волны.

Возможная картина течения изображена на рис. 6.13. Если известны исходное однородное состояние и угол β , то, используя условия на разрыве для областей 1 и 2, можно определить все параметры течения в области 2. Тогда в области 3 известна величина θ , поскольку поток там направлен вдоль стенки, так что условий на разрыве для областей 2 и 3 достаточно для определения остальных параметров течения в области 3 и угла отражения β_r .

Важный результат этого анализа состоит в том, что предложенное решение годится только для определенного класса случаев. Если ударная волна достаточно слаба или падает под достаточно малым скольльзящим углом, то решения не существует. Оказывается, что любая отраженная ударная волна, которая сопрягается с областью 2, не в состоянии повернуть течение в области 3

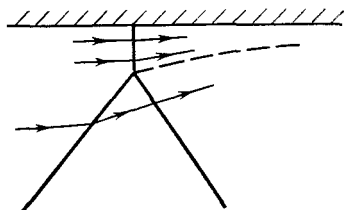


Рис. 6.14. Отражение Маха.

параллельно стенке. Стенка как бы отталкивает всю эту структуру линий разрыва, и образуется картина с тремя ударными волнами, показанная на рис. 6.14. Такое отражение называется «отражением Маха» в честь Эрнста Маха, который впервые наблюдал его экспериментально. Анализ этого явления еще не завершен, причем некоторые теоретические результаты явно не согласуются с наблюдениями.

Глава 7

ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ

Уравнение

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \varphi, \quad c = \text{const}, \quad (7.1)$$

известно как волновое уравнение, хотя бóльшая часть волн не связана с этим уравнением. Однако уравнение (7.1) встречается во многих задачах и является простейшим уравнением, с которого можно начать обсуждение двух- и трехмерных волн. Построение более или менее полной теории явно выходит за рамки наших возможностей и, следуя главной теме книги, мы ограничимся обсуждением основных результатов, помогающих понять природу волн и существенных для обобщений на нелинейную теорию. Мы не пытаемся дать хотя бы введение в огромное количество специальных и сложных методов, созданных для решения различных граничных задач теории дифракции. Элементарные вопросы теории интерференции и дифракции хорошо изложены во многих книгах, а более развитая теория все более и более становится полем искусного применения «математического аппарата» и мало что дает для более глубокого понимания природы волн.

С другой стороны, приближенная теория геометрической оптики содержит ценные общие идеи, которые допускают обобщение на другие — как линейные, так и нелинейные — задачи. Теория развивается здесь на примере волнового уравнения, но указаны также обобщения на неоднородную среду и анизотропные волны. Эти обобщения хотя и выходят за рамки обсуждения уравнения (7.1), но естественно с ним связаны. Другие вопросы геометрической оптики и развитие аналогичных идей в нелинейной теории будут рассматриваться в следующих главах.

7.1. Области приложений волнового уравнения

Волновое уравнение (7.1) является основным уравнением в акустике, теории упругости и электромагнетизме.

Акустика

Уравнения акустики были получены в § 6.6. Здесь они приводятся для удобства ссылок. Уравнения газовой динамики линеаризуются для малых возмущений однородного состояния, для которого

$$u = 0, \quad \rho = \rho_0, \quad p = p_0 = p(\rho_0).$$

Скоростью распространения возмущений является

$$a_0^2 = p'(\rho_0), \quad (7.2)$$

а сами возмущения выражаются через потенциал φ :

$$u = \nabla \varphi, \quad (7.3)$$

$$p - p_0 = -\rho_0 \varphi_t, \quad (7.4)$$

$$\rho - \rho_0 = -\frac{\rho_0}{a_0^2} \varphi_t. \quad (7.5)$$

Подстановка в линеаризованное уравнение неразрывности приводит к уравнению для φ :

$$\varphi_{tt} = a_0^2 \nabla^2 \varphi. \quad (7.6)$$

Линеаризованное сверхзвуковое течение

Формализм акустики можно использовать, когда возмущение вызвано движущимся твердым телом. Для того чтобы возмущение оставалось малым, или перемещения тела должны быть малыми (например, колебания мембраны громкоговорителя), или тело должно быть очень тонким. Первое типично для источника акустических волн, и необходимо решать уравнение с соответствующими граничными условиями.

Случай тонкого тела, движущегося с произвольной постоянной скоростью, связывает акустику с аэродинамикой. Если тело движется с постоянной скоростью, то, очевидно, удобно перейти к движущейся системе координат, связанной с телом. Пусть координаты (x_1, x_2, x_3) относятся к исходной системе, в которой движение газа мало и описывается уравнениями (7.3)–(7.6). Если тело движется со скоростью U в отрицательном направлении оси x_1 и координаты (x, y, z) относятся к системе, неподвижной относительно тела, то координаты преобразуются по формулам

$$x = x_1 + Ut, \quad y = x_2, \quad z = x_3.$$

Компоненты скорости в новой системе равны $(U + u_1, u_2, u_3)$, где $u_i = \partial \varphi / \partial x_i$. Далее, в новой системе координат течение является стационарным, так что

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, t) = \Phi(x, y, z) = \Phi(x_1 + Ut, x_2, x_3).$$

Таким образом, уравнение (7.6) принимает вид

$$(M^2 - 1) \Phi_{xx} = \Phi_{yy} + \Phi_{zz}, \quad M = \frac{U}{a_0}, \quad (7.7)$$

а вместо (7.4) получаем

$$p - p_0 = -\rho_0 U \Phi_x. \quad (7.8)$$

Компоненты скорости газа относительно тела равны

$$(U + \Phi_x, \Phi_y, \Phi_z). \quad (7.9)$$

Для сверхзвукового течения $M > 1$ и определяющее уравнение снова является волновым, но с меньшим числом переменных, причем x играет роль времени. Эта аналогия уже была отмечена в § 6.16.

Теория упругости

Будем считать, что вывод волнового уравнения при элементарном исследовании поперечных колебаний струны и мембраны, а также продольных и крутильных волн в стержнях хорошо известен. Здесь мы рассмотрим вывод волнового уравнения в полной трехмерной теории.

Движение упругого твердого тела можно описать в терминах смещения $\xi(\mathbf{x}, t)$ точки из положения $\mathbf{x}$ в недеформированном состоянии. Удобно также ввести $\mathbf{X}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x} + \xi(\mathbf{x}, t)$ — новое положение в момент времени t . Силы, действующие на поверхности деформированного тела, можно описать так же, как и в случае жидкости (см. § 6.1), посредством тензора напряжений p_{ji} . Если мы временно будем считать напряжение в деформированном состоянии функцией текущей переменной $\mathbf{X}$, то напряжения вызовут результирующую силу на единицу объема, равную $\partial p_{ji} / \partial X_j$. Это следует из теоремы о дивергенции точно так же, как и в случае жидкости. Однако предыдущее «лагранжево» описание смещений (обычно более удобное в упругости) связывает все величины с исходным недеформированным состоянием. При этом результирующая сила на единицу объема недеформированного состояния равна

$$J \frac{\partial x_k}{\partial X_j} \frac{\partial p_{ji}}{\partial x_k}, \quad (7.10)$$

где J — якобиан

$$J = \frac{\partial (X_1, X_2, X_3)}{\partial (x_1, x_2, x_3)}. \quad (7.11)$$

Далее, производная $\partial x_k / \partial X_j$ равна J_{jk} / J , где J_{jk} — алгебраическое дополнение элемента $\partial X_j / \partial x_k$ в определителе (7.11). Результирующая сила на единицу объема недеформированного состояния (7.10) равна, таким образом,

$$J_{jk} \frac{\partial p_{ji}}{\partial x_k},$$

и уравнения движения имеют вид

$$\rho_0 \frac{\partial^2 X_i}{\partial t^2} = J_{jk} \frac{\partial p_{ji}}{\partial x_k}. \quad (7.12)$$

Удлинение произвольного линейного элемента при переходе из недеформированного состояния в деформированное определяется равенством

$$\begin{aligned} dX_i^2 - dx_j^2 &= \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \frac{\partial X_i}{\partial x_h} dx_j dx_h - dx_j^2 = \\ &= 2\varepsilon_{jh} dx_j dx_h, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_{jh} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_j} \frac{\partial X_i}{\partial x_h} - \delta_{jh} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi_h}{\partial x_j} + \frac{\partial \xi_j}{\partial x_h} + \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_h} \right). \end{aligned} \quad (7.13)$$

В общем случае напряжения p_{ji} зависят от деформаций ε_{jh} и от температуры.

В линейной теории упругости для малых смещений ξ из недеформированных состояний уравнения линеаризуются следующим образом. Поскольку $J_{jh} = \delta_{jh} + O(\nabla \xi)$, при линеаризации уравнение (7.12) принимает вид

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial t^2} = \frac{\partial p_{ji}}{\partial x_j}, \quad (7.14)$$

а выражения для деформаций (7.13) записываются так:

$$\varepsilon_{jh} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi_h}{\partial x_j} + \frac{\partial \xi_j}{\partial x_h} \right). \quad (7.15)$$

Формула, связывающая напряжения с деформациями, имеет вид

$$p_{ji} = 2\mu \varepsilon_{ji} + \lambda \varepsilon_{hk} \delta_{ji}, \quad (7.16)$$

где λ и μ — постоянные Ламе. Строго говоря, постоянные λ и μ зависят от характера движения, например от того, является оно изэнтропическим или изотермическим, но для большинства материалов эта разница мала. (Хорошее элементарное изложение термодинамики имеется в книге Ландау и Лифшица [3], стр. 18.)

В силу равенств (7.14)–(7.16), три уравнения для смещений ξ_i имеют вид

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial t^2} = \mu \nabla^2 \xi_i + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} (\nabla \cdot \xi). \quad (7.17)$$

Взяв дивергенцию и ротор от (7.17), получим

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (\nabla \cdot \xi) = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0} \nabla^2 (\nabla \cdot \xi), \quad (7.18)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (\nabla \times \xi) = \frac{\mu}{\rho_0} \nabla^2 (\nabla \times \xi) \quad (7.19)$$

соответственно. Таким образом, существуют две моды, удовлетворяющие волновому уравнению. Уравнение (7.18) описывает про-

дольные волны (волны сжатия), распространяющиеся со скоростью $\{(\lambda + 2\mu)/\rho_0\}^{1/2}$, в то время как уравнение (7.19) описывает поперечные волны (волны сдвига), имеющие скорость $\{\mu/\rho_0\}^{1/2}$. Эти две моды связаны посредством граничных и начальных условий, накладываемых на ξ_i или на p_{ji} , и полное решение задачи требует гораздо большего, чем просто решения волнового уравнения.

Электромагнитные волны

Уравнения Максвелла для непроводящей среды с магнитной проницаемостью μ и диэлектрической проницаемостью ε записываются так:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} &= 0, & \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{B}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, & \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0,\end{aligned}$$

где $\mathbf{B}$ — магнитная индукция, а $\mathbf{E}$ — напряженность электрического поля. Следовательно,

$$\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = -\frac{1}{\varepsilon\mu} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \frac{1}{\varepsilon\mu} \nabla^2 \mathbf{B};$$

аналогичному уравнению удовлетворяет и $\mathbf{E}$. Все компоненты векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ удовлетворяют волновому уравнению со скоростью распространения $c = (\varepsilon\mu)^{-1/2}$. Однако компоненты связаны друг с другом условиями $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$, $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, и, кроме того, дополнительные связи накладывают краевые и начальные условия. Поэтому решение задачи снова не сводится только к решению скалярного волнового уравнения.

7.2. Плоские волны

В случае одной пространственной переменной x волновое уравнение имеет вид

$$\varphi_{tt} = c^2 \varphi_{xx}.$$

Если ввести характеристические координаты $\alpha = x - ct$, $\beta = x + ct$, то оно сведется к

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha \partial \beta} = 0,$$

и общим решением явится

$$\varphi = f(\alpha) + g(\beta) = f(x - ct) + g(x + ct),$$

где f и g — произвольные функции. Эти произвольные функции легко определяются по заданным начальным или граничным

условиям. Для задачи о распространении сигнала с условием ¹⁾

$$\varphi_x = Q(t) \quad \text{при} \quad x = 0$$

решение имеет вид

$$\varphi = -cQ_1\left(t - \frac{x}{c}\right), \quad (7.20)$$

где $Q_1(t)$ — первообразная функции $Q(t)$. Для задачи с начальными условиями

$$\varphi = \varphi_0(x), \quad \varphi_t = \varphi_1(x), \quad t = 0, \quad -\infty < x < \infty,$$

решение имеет вид

$$\varphi = \frac{1}{2} \{ \varphi_0(x-ct) + \varphi_0(x+ct) \} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \varphi_1(\xi) d\xi. \quad (7.21)$$

7.3. Сферические волны

Для волн, симметричных относительно начала координат, имеем $\varphi = \varphi(R, t)$, где R — расстояние от центра (начала координат). Волновое уравнение сводится к следующему:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial R}.$$

Любопытно, что это уравнение также можно записать в виде

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 (R\varphi)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 (R\varphi)}{\partial R^2},$$

что совпадает с одномерным волновым уравнением. Общее решение имеет следующий простой вид:

$$\varphi = \frac{f(R-ct)}{R} + \frac{g(R+ct)}{R}. \quad (7.22)$$

Для источника, генерирующего только уходящие волны, решение принимает вид

$$\varphi = \frac{f(R-ct)}{R},$$

где f определяется свойствами источника. Обычно их удобно задавать в виде

$$Q(t) = \lim_{R \rightarrow 0} 4\pi R^2 \frac{\partial \varphi}{\partial R}. \quad (7.23)$$

Это дает

$$Q(t) = -4\pi f(-ct)$$

¹⁾ Условие берется с заданной функцией φ_x , а не φ для удобства сравнения с функциями источника для сферических и цилиндрических волн.

и

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi} \frac{Q(t-R/c)}{R}. \quad (7.24)$$

В акустике $\partial\varphi/\partial R$ — радиальная скорость, а $Q(t)$ — объемный расход жидкости.

Для задачи Коши, хотя она и состоит всего лишь в определении функций f и g в выражении (7.22), решение оказывается более интересным, чем можно было бы ожидать. Рассмотрим в акустическом приближении «задачу о взрыве шара»: пусть давление внутри шара радиуса R_0 равно $p_0 + P$, тогда как давление снаружи равно p_0 . Газ первоначально покоится, и оболочка шара взрывается в момент времени $t = 0$. Согласно (7.3) и (7.4), начальные условия можно записать в виде

$$\varphi = 0, \quad \varphi_t = \begin{cases} -\frac{P}{\rho_0}, & R < R_0, \\ 0, & R > R_0. \end{cases}$$

Следовательно, решение

$$\varphi = \frac{f(R-a_0t)}{R} + \frac{g(R+a_0t)}{R} \quad (7.25)$$

должно удовлетворять условиям

$$\begin{aligned} f(R) + g(R) &= 0, \quad 0 < R < \infty, \\ f'(R) - g'(R) &= \begin{cases} \frac{P}{\rho_0 a_0} R, & 0 < R < R_0, \\ 0, & R_0 < R < \infty. \end{cases} \end{aligned} \quad (7.26)$$

Эти условия определяют f и g для положительных значений их аргументов. Однако в решение (7.25) входят значения f и для отрицательных значений аргумента. Недостающее условие связано с поведением решения в начале координат. Поскольку в начале координат источник отсутствует, мы имеем

$$\lim_{R \rightarrow 0} R^2 \frac{\partial \varphi}{\partial R} = 0,$$

откуда

$$f(-a_0t) + g(a_0t) = 0, \quad 0 < t < \infty. \quad (7.27)$$

Это условие определяет f для отрицательных значений аргумента по известным значениям g для положительных значений аргумента.

Решая уравнения (7.26) и (7.27), получаем

$$\begin{aligned} f(\xi) &= \begin{cases} \frac{1}{4} \frac{P}{\rho_0 a_0} (\xi^2 - R_0^2), & -R_0 < \xi < R_0, \\ 0, & R_0 < |\xi|, \end{cases} \\ g(\xi) &= \begin{cases} -\frac{1}{4} \frac{P}{\rho_0 a_0} (\xi^2 - R_0^2), & 0 < \xi < R_0, \\ 0, & R_0 < \xi. \end{cases} \end{aligned}$$

Итак, формула для возмущения давления имеет вид

$$p - p_0 = \frac{P}{2R} \{ (R - a_0 t) F + (R + a_0 t) G \},$$

где

$$F = \begin{cases} 1, & \text{если } -R_0 < R - a_0 t < R_0, \\ 0 & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$G = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 < R + a_0 t < R_0, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Изменение давления со временем изображено на рис. 7.1. Для точки $R > R_0$ давление скачком возрастает на $PR_0/(2R)$

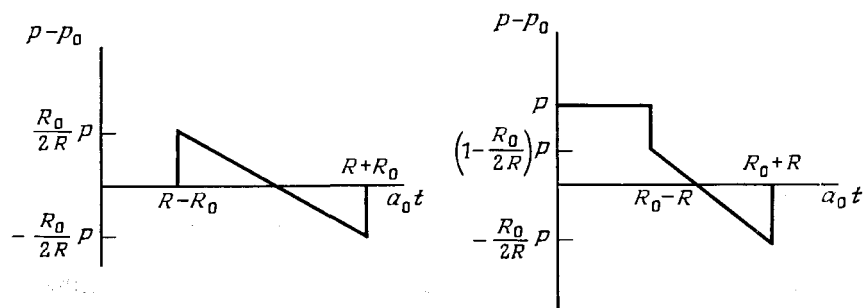


Рис. 7.1. Картина давления в задаче о взрыве шара.

в момент времени $t = (R - R_0)/a_0$, затем избыточное давление линейно убывает со временем, достигая величины $-PR_0/(2R)$ в момент времени $t = (R + R_0)/a_0$, а потом скачком возвращается к нулю. Даже при $R = R_0$ скачок на фронте волны равен только $P/2$, остальная часть $P/2$ от полного скачка P поглощается идущей к центру волной разрежения.

Для внутренних точек $R < R_0$ скачкообразное изменение давления, уменьшающее исходное значение P до $P(1 - R_0/(2R))$, происходит в момент времени $t = (R_0 - R)/a_0$, затем избыточное давление линейно убывает со временем, достигая величины $-PR_0/(2R)$ в момент времени $t = (R_0 + R)/a_0$, а потом скачком возвращается к нулю. Заметим, что в центре $R = 0$ изменения бесконечно велики, но весь процесс занимает бесконечно малый интервал времени!

Интересно, что всюду неотрицательное возмущение давления приводит к уходящей волне с равными положительной и отрицательной фазами. В действительности такой профиль в виде N -волны типичен для двух- и трехмерных волн. Причины этого можно выяснить следующими рассуждениями. В уходящей волне

давление и радиальная скорость выражаются формулами

$$p - p_0 = \frac{\rho_0 a_0 f' (R - a_0 t)}{R},$$

$$u = \frac{f' (R - a_0 t)}{R} - \frac{f (R - a_0 t)}{R^2}.$$

Во-первых, следует отметить, что для любой волны, у которой *как* $p - p_0$, *так и* u обращаются в нуль после прохождения волны, *как* f' , *так и* f должны обращаться в нуль. Поэтому f' должна принимать как положительные, так и отрицательные значения, чтобы интеграл от нее, равный f , обращался в нуль. Во-вторых, рассмотрим объемный расход через сферу большого радиуса R . Для больших значений R этот расход составляет

$$4\pi R^2 u \sim 4\pi R f' (R - a_0 t).$$

Величина расхода растет с увеличением R . Если бы f' , которая пропорциональна давлению, была бы всегда положительной, это привело бы к бесконечно большому оттоку жидкости при $R \rightarrow \infty$. Однако для N -волны за большим уходящим потоком немедленно следует уравнивающий большой входящий поток, так что суммарный расход конечен.

Для плоских волн ни один из этих эффектов не возникает и положительное возмущение приводит к волнам с положительными $p - p_0$ и u .

7.4. Цилиндрические волны

В своих классических исследованиях волнового уравнения Адамар указал, что общий характер решения различен для четного и нечетного числа пространственных измерений. Точные утверждения будут приведены ниже, но можно грубо сформулировать результат, сказав, что иметь дело с нечетным числом измерений проще, чем с четным. Поэтому трехмерный случай сферической симметрии был рассмотрен первым, и цилиндрическое волновое решение будет выведено из сферического волнового решения. Здесь мы получим решение только для уходящих волн.

Мы начнем с решения (7.24) для точечного источника. Предположим, что такие источники распределены равномерно вдоль оси z с плотностью $q(t)$ на единицу длины (см. рис. 7.2). Полное возмущение, создаваемое этим распределением, является, очевидно, функцией только от расстояния r до оси z и от времени t ; это и есть цилиндрическая волна, генерируемая линейным источ-

ником. Полное возмущение равно

$$\varphi(r, t) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q(t-R/c) dz}{R} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{q(t-R/c) dz}{R},$$

где $R = \sqrt{r^2 + z^2}$.

Решение можно записать в различных формах. Подставив в интеграл $z = r \operatorname{sh} \xi$, $R = r \operatorname{ch} \xi$, получим

$$\varphi(r, t) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} q\left(t - \frac{r}{c} \operatorname{ch} \xi\right) d\xi. \quad (7.28)$$

С другой стороны, положив

$$t - \frac{R}{c} = \eta, \quad z = c \sqrt{(t-\eta)^2 - r^2/c^2},$$

получим

$$\varphi(r, t) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{t-r/c} \frac{q(\eta) d\eta}{\sqrt{(t-\eta)^2 - r^2/c^2}}. \quad (7.29)$$

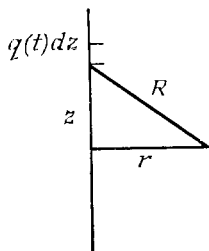


Рис. 7.2. Детали построения для линейного источника.

Формула (7.28) удобнее для вычисления производных φ и, следовательно, для непосредственной проверки справедливости волнового уравнения. Легко показать, что

$$\begin{aligned} c^2 \left(\varphi_{rr} + \frac{1}{r} \varphi_r \right) - \varphi_{tt} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{d}{d\xi} \left\{ \frac{c}{r} \operatorname{sh} \xi q' \left(t - \frac{r}{c} \operatorname{ch} \xi \right) \right\} d\xi = \\ &= \lim_{\xi \rightarrow \infty} \left\{ \frac{c}{2\pi r} \operatorname{sh} \xi q' \left(t - \frac{r}{c} \operatorname{ch} \xi \right) \right\}. \end{aligned}$$

Если $q'(t) \rightarrow 0$ достаточно быстро при $t \rightarrow -\infty$, например, если q тождественно равно нулю при $t < 0$, то этот предел равен нулю.

Для периодического источника $q(t) = e^{-i\omega t}$, чтобы удовлетворить условию $q(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow -\infty$, будем считать, что ω имеет малую положительную мнимую часть, незначительно изменяющую решение за конечные интервалы времени. Согласно (7.28), решение для периодического источника имеет вид

$$\varphi = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{i(\omega r/c) \operatorname{ch} \xi} d\xi e^{-i\omega t},$$

или

$$\varphi = -H_0^{(1)} \left(\frac{\omega r}{c} \right) e^{-i\omega t},$$

поскольку интеграл совпадает с одним из представлений функции Ганкеля. Это решение можно было бы получить проще, решив

волновое уравнение методом разделения переменных. Интеграл Фурье от таких элементарных решений дает другой вывод формулы (7.28).

Первые производные φ описывают важные физические величины (давление и скорость в акустике). Делая в (7.28) подстановку $\text{ch } \zeta = c(t - \eta)/r$, получаем

$$\begin{aligned}\varphi_t &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty q' \left(t - \frac{r}{c} \text{ch } \zeta \right) d\zeta = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{t-r/c} \frac{q'(\eta) d\eta}{V(t-\eta)^2 - r^2/c^2}, \\ \varphi_r &= \frac{1}{2\pi c} \int_0^\infty \text{ch } \zeta q' \left(t - \frac{r}{c} \text{ch } \zeta \right) d\zeta = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{t-r/c} \frac{t-\eta}{r} \frac{q'(\eta) d\eta}{V(t-\eta)^2 - r^2/c^2}.\end{aligned}\quad (7.30)$$

Эти формулы можно также вывести непосредственно из (7.29), используя разумное интегрирование по частям, чтобы избежать расходящихся интегралов, или понятие «конечной части» интеграла по Адамару. Последнее включается в подход, использующий теорию обобщенных функций.

Поведение вблизи начала координат

Из последней формулы (7.30) следует, что

$$\varphi_r \sim \frac{1}{2\pi r} \int_{-\infty}^t q'(\eta) d\eta = \frac{1}{2\pi r} q(t) \quad \text{при } r \rightarrow 0.$$

Отсюда расход на единицу длины линейного источника равен

$$\lim_{r \rightarrow 0} 2\pi r \varphi_r = q(t),$$

что подтверждает наше определение $q(t)$. Имеем также

$$\varphi \sim \frac{q(t)}{2\pi} \ln r,$$

но часто требуется следующий член разложения. Интегрируя выражение (7.29) по частям, получаем

$$\varphi = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{t-r/c} q'(\eta) \ln \left\{ \frac{(t-\eta) + V(t-\eta)^2 - r^2/c^2}{r/c} \right\} d\eta.$$

Если теперь это выражение при малых r заменить на

$$\varphi \sim -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^t q'(\eta) \ln \frac{2c(t-\eta)}{r} d\eta, \quad \frac{r}{ct} \rightarrow 0, \quad (7.31)$$

то аккуратными оценками можно показать, что ошибки пропорциональны r . Выражение для φ_t получается из (7.31) заменой $q'(\eta)$ на $q''(\eta)$.

Поведение вблизи волнового фронта и на больших расстояниях

Если $q(t) = 0$ при $t < 0$, то нижний предел в интеграле (7.29) можно положить равным нулю и решение отлично от нуля лишь при $t - r/c > 0$. Первый сигнал прибывает с волновым фронтом $t - r/c = 0$. Введем переменную

$$\tau = t - \frac{r}{c},$$

измеряющую время, прошедшее после прибытия волнового фронта; тогда (7.29) можно переписать так:

$$\varphi = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\tau} \frac{q(\eta) d\eta}{V(\tau-\eta)(\tau-\eta+2r/c)}, \quad \tau = t - \frac{r}{c} > 0.$$

Поскольку η меняется от 0 до τ , при $c\tau/r \ll 1$ второй множитель под знаком корня можно приближенно заменить на $2r/c$. Отсюда

$$\varphi \sim -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\tau} \frac{q(\eta) d\eta}{V\tau-\eta} \left(\frac{c}{2r}\right)^{1/2}, \quad \frac{c\tau}{r} \ll 1.$$

Таким образом, имеем

$$\varphi \sim -\left(\frac{c}{2r}\right)^{1/2} Q(t-r/c), \quad \frac{ct-r}{r} \ll 1, \quad (7.32)$$

где

$$Q(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\tau} \frac{q(\eta) d\eta}{V\tau-\eta}. \quad (7.33)$$

Выражение (7.32) можно сравнить с выражениями (7.20) и (7.24). Во всех трех случаях амплитуда убывает как $r^{-(n-1)/2}$, где n — размерность пространства. В данном случае, однако, соответствующая формула не подходит и Q не является просто интенсивностью источника. Простая интерпретация указанной зависимости амплитуды будет приведена в § 7.7 (уравнение (7.70)).

Разложение (7.32) можно продолжить, заметив, что

$$\begin{aligned}\varphi &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\tau} \frac{q(\eta)}{(\tau-\eta)^{1/2}} \left(\frac{c}{2r}\right)^{1/2} \left\{1 + c \frac{(\tau-\eta)}{2r}\right\}^{-1/2} d\eta = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\tau} \frac{q(\eta)}{(\tau-\eta)^{1/2}} \left(\frac{c}{2r}\right)^{1/2} \sum_{m=0}^{\infty} \binom{-1/2}{m} \left\{\frac{c(\tau-\eta)}{2r}\right\}^m d\eta = \\ &= -\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m-1/2)!}{(-m-1/2)!} \frac{Q_m(\tau)}{m!} \left(\frac{c}{2r}\right)^{m+1/2}, \quad \frac{c\tau}{2r} < 1, \quad (7.34)\end{aligned}$$

где

$$Q_m(\tau) = \frac{(-1/2)!}{(m-1/2)!} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\tau} q(\eta) (\tau-\eta)^{m-1/2} d\eta. \quad (7.35)$$

Интересно, что если $q(+0) > 0$, так что источник при включении имел конечную интенсивность, то

$$Q_m(\tau) \propto \tau^{m+1/2}, \quad \tau \rightarrow 0. \quad (7.36)$$

Таким образом, разложение по времени после прохождения волнового фронта происходит по полужелым степеням.

Хвост цилиндрической волны

Одним из важных различий между нечетным и четным числом измерений, замеченных Адамаром, является поведение решения для источника, действующего в течение конечного интервала времени. Предположим, что $q(t)$ равна нулю вне интервала времени $0 < t < T$. Для плоских или сферических волн из (7.20)¹⁾ и (7.24) видно, что возмущение ограничено интервалами

$$\frac{x}{c} < t < \frac{x}{c} + T \quad \text{и} \quad \frac{R}{c} < t < \frac{R}{c} + T$$

соответственно. Первый сигнал прибывает с волновым фронтом, покинувшим источник при $t = 0$; это должно быть верно независимо от размерности. Интересно то, что возмущение прекращается вместе с сигналом, покинувшим источник в последний момент времени $t = T$. Для цилиндрической волны выражение (7.29) содержит интеграл от интенсивности источника $q(t)$ и возмущение

¹⁾ Для (7.20) задается φ_x , так что под «возмущением» мы понимаем величины φ_x и φ_t ; то обстоятельство, что φ может быть отличной от нуля постоянной при $t > x/c + T$, не считается возмущением.

продолжается после $t = r/c + T$. Имеем

$$\Phi = -\frac{1}{2\pi} \int_0^T \frac{q(\eta) d\eta}{V(t-\eta)^2 - r^2/c^2}, \quad t > \frac{r}{c} + T.$$

Для фиксированного r

$$\Phi \sim -\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^T q(\eta) d\eta \right\} \frac{1}{t}, \quad t \rightarrow \infty. \quad (7.37)$$

Возмущение стремится к нулю только асимптотически при $t \rightarrow \infty$.

7.5. Сверхзвуковое обтекание тела вращения

Наиболее интересное приложение найденного цилиндрического волнового решения связано, по-видимому, со сверхзвуковой аэродинамикой. Согласно уравнению (7.7), возмущение потенциала скорости удовлетворяет двумерному волновому уравнению, причем

$$x \leftrightarrow t, \quad M^2 - 1 \leftrightarrow 1/c^2.$$

Для тела вращения уравнение (7.7) принимает вид

$$B^2 \Phi_{xx} = \Phi_{rr} + \frac{1}{r} \Phi_r, \quad B = \sqrt{M^2 - 1},$$

где r — расстояние от оси вращения, а x — расстояние от носика тела. Решение, равное нулю при $x < Br$, ищется в виде

$$\Phi = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{x-Br} \frac{q(\eta) d\eta}{V(x-\eta)^2 - B^2 r^2}, \quad x > Br. \quad (7.38)$$

Интенсивность источника $q(\eta)$ связана с формой тела. Граничные условия на поверхности тела состоят в том, что на ней нормальная составляющая скорости равна нулю. Поэтому, если тело имеет форму $r = R(x)$, то

$$\Phi_r = R'(x) (U + \Phi_x) \quad \text{при} \quad r = R(x).$$

Для линеаризации уравнений тело должно быть тонким, т. е. $R'(x)$ мало и Φ_x и Φ_r также малы. В силу этого, граничные условия линеаризуются, а именно

$$\Phi_r = UR'(x) \quad \text{при} \quad r = R(x). \quad (7.39)$$

Но $\Phi_r \sim q(x)/(2\pi r)$ при $r \rightarrow 0$, так что (7.39) дает

$$q(x) = 2\pi UR(x) R'(x) = US'(x),$$

где $S(x) = \pi R^2(x)$ — площадь поперечного сечения тела на расстоянии x от переднего конца. Интуитивно чувствуется, что $US'(\infty)$ — скорость, с которой возрастающая площадь поперечного сечения отталкивает жидкость, а это и есть интенсивность источника. Итак, для заданного тела решение имеет вид

$$\Phi = -\frac{U}{2\pi} \int_0^{x-Br} \frac{S'(\eta) d\eta}{\sqrt{(x-\eta)^2 - B^2 r^2}}, \quad x - Br > 0. \quad (7.40)$$

Компоненты возмущения скорости получаются надлежащим изменением равенств (7.30):

$$\Phi_x = -\frac{U}{2\pi} \int_0^{x-Br} \frac{S''(\eta) d\eta}{\sqrt{(x-\eta)^2 - B^2 r^2}}, \quad (7.41)$$

$$\Phi_r = \frac{U}{2\pi r} \int_0^{x-Br} \frac{(x-\eta) S''(\eta) d\eta}{\sqrt{(x-\eta)^2 - B^2 r^2}}. \quad (7.42)$$

В линейной теории давление определяется по формуле (7.8). Однако возникает интересный вопрос о применимости линейной теории, в особенности по отношению к давлению. Точное выражение для давления в потенциальном течении задается уравнением Бернулли (см. (6.157))

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{a}{a_0}\right)^{2\gamma/(\gamma-1)} = \left\{1 - \frac{\gamma-1}{a_0^2} \left(U\Phi_x + \frac{1}{2}\Phi_x^2 + \frac{1}{2}\Phi_r^2\right)\right\}^{\gamma/(\gamma-1)}.$$

Следовательно, поскольку $a_0^2 = \gamma p_0 / \rho_0$,

$$\frac{p-p_0}{p_0} = -\left(U\Phi_x + \frac{1}{2}\Phi_x^2 + \frac{1}{2}\Phi_r^2\right) + \dots$$

Если r не мало по сравнению с длиной тела, то Φ_x и Φ_r являются относительно малыми величинами порядка δ^2 , где δ — относительная толщина тела (определяемая как максимальный диаметр, деленный на длину). Тогда линеаризация, при которой пренебрегают величинами Φ_x^2 и Φ_r^2 , корректна. Однако на поверхности тела $r = R(x) = O(\delta)$, и для малых r

$$\Phi_r \sim \frac{US'(x)}{2\pi r}, \quad \Phi_x \sim \frac{US''(x)}{2\pi} \ln r.$$

Следовательно, на поверхности тела

$$\Phi_r = O(\delta), \quad \Phi_x = O\left(\delta^2 \ln \frac{1}{\delta}\right).$$

Отвлекаясь от члена $\ln(1/\delta)$, который в практических ситуациях не слишком велик, видим, что член $\frac{1}{2}\Phi_r^2$ так же важен, как и член Φ_x . Поэтому для получения хорошего приближения для

давления, видимо, следует взять формулу

$$\frac{p-p_0}{\rho_0} = -U\Phi_x - \frac{1}{2}\Phi_r^2, \quad (7.43)$$

а не формулу (7.8). Лайтхилл [1] и Бродерик [1], тщательно исследовав приближения высших порядков, показали, что (7.43) верно с ошибкой $O(\delta^4 \ln^2(1/\delta))$. В то же время следует выяснить вопрос о корректности линейной теории, поскольку граничные условия накладываются в области, где Φ_x и Φ_r имеют различный порядок. В цитированных работах показано, что (7.41) и (7.42) действительно являются главными членами в разложении по степеням малого параметра и что единственное существенное изменение состоит в введении нелинейного соотношения (7.43).

Сопротивление

Сопротивление, вызванное возмущением давления, выражается формулой

$$D = \int_0^l (p - p_0) S'(x) dx,$$

где интегрирование проводится по длине тела l . Вблизи тела имеем

$$\Phi \sim -\frac{U}{2\pi} \int_0^x S''(\eta) \ln \frac{2(x-\eta)}{Br} d\eta$$

(см. (7.34)), а давление дается равенством (7.43). Отсюда для сопротивления имеем

$$\begin{aligned} \frac{2\pi D}{\rho_0 U^2} = & \int_0^l S'(x) \left\{ -S''(x) \ln R(x) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^x S''(\eta) \ln \frac{2(x-\eta)}{B} d\eta - \frac{1}{4\pi} \frac{S'^2(x)}{R^2(x)} \right\} dx. \end{aligned}$$

Поскольку $S' = 2\pi R R'$, первый и третий члены объединяются в

$$- \int_0^l \left\{ S'(x) S''(x) \ln R(x) + \frac{S'^2(x)}{2R(x)} R'(x) \right\} dx,$$

и это дает

$$- \int_0^l \frac{d}{dx} \left\{ \frac{1}{2} S'^2(x) \ln R(x) \right\} dx = 0$$

для тела с $S'(0) = S'(l) = 0$. После интегрирования по частям второй член дает

$$\begin{aligned} D &= \frac{\rho_0 U^2}{2\pi} \int_0^l S''(x) \int_0^x S''(\eta) \ln \frac{1}{(x-\eta)} d\eta dx = \\ &= \frac{\rho_0 U^2}{4\pi} \int_0^l \int_0^l S''(x) S''(\eta) \ln \frac{1}{|x-\eta|} dx d\eta. \end{aligned} \quad (7.44)$$

(Член с $\ln(2/B)$ при интегрировании дает нуль.) Эта знаменитая формула для сверхзвукового сопротивления впервые получена Карманом и Муром [1] в 1932 г.

Поведение вблизи конуса Маха и на больших расстояниях

Волновой фронт определяется уравнением $x - Br = 0$; это конус Маха, образующие которого составляют угол $\arcsin(1/M)$ с осью x . Когда $(x - Br)/(Br) \ll 1$, из равенств (7.32) и (7.33), должным образом преобразованных для сверхзвукового течения, имеем

$$\Phi \sim -\frac{U}{2\pi \sqrt{2Br}} \int_0^{\xi} \frac{S'(\eta)}{\sqrt{\xi-\eta}} d\eta, \quad \xi = x - Br.$$

Для компонент скорости получаем, следовательно,

$$\Phi_x \sim -\frac{UF(x-Br)}{\sqrt{2Br}}, \quad \Phi_r \sim UB \frac{F(x-Br)}{\sqrt{2Br}}, \quad \frac{x-Br}{Br} \ll 1, \quad (7.45)$$

где

$$F(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\xi} \frac{S''(\eta)}{\sqrt{\xi-\eta}} d\eta. \quad (7.46)$$

Итак, функции Φ_x и Φ_r имеют одинаковый порядок и для давления с точностью до членов второго порядка имеем

$$\frac{p-p_0}{\rho_0 U^2} \sim \frac{F(x-Br)}{\sqrt{2Br}}. \quad (7.47)$$

Опять следует отметить, что поведение вблизи волнового фронта и на больших расстояниях можно описывать одной общей формулой.

Если тело имеет острый носик с $R'(0) = \varepsilon$, то $S(x) \sim \pi \varepsilon^2 x^2$ для малых x и тогда

$$F(\xi) \sim 2\varepsilon^2 \xi^{1/2} \quad \text{при} \quad \xi \rightarrow 0. \quad (7.48)$$

На рис. 7.3 изображена типичная кривая $F(\xi)$. Появление отрицательной фазы типично даже для тела, имеющего форму снаряда, для которого интенсивность источника $US'(x)$ не меняет знака. Действительно, легко показать, что

$$\int_0^{\infty} F(\xi) d\xi = 0,$$

и физическое объяснение в терминах потока массы аналогично объяснению для сферических волн, приведенному в конце § 7.3.

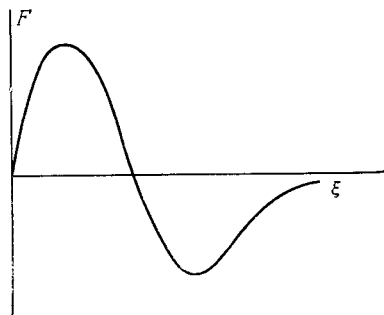


Рис. 7.3. Типичная кривая $F(\xi)$ для сверхзвукового обтекания осесимметричного тела.

Можно заметить, что, согласно этой линейной теории, компоненты скорости и давление непрерывны на конусе Маха. На самом же деле возникает ударная волна, и мы встречаемся с важным явлением звукового удара. Этот эффект упущен, поскольку он нелинеен. Теория звукового удара будет подробно изучаться в гл.9.

7.6. Задача Коши в двух и трех измерениях

Один из многочисленных «интегралов Пуассона», встречающихся в теории уравнений в частных производных, дает решение волнового уравнения с начальными условиями

$$\varphi = \varphi_0(\mathbf{x}), \quad \varphi_t = \varphi_1(\mathbf{x}), \quad t = 0.$$

Согласно идеям Адамара, трехмерная задача проще, чем двумерная, и мы начнем с нее.

Как было показано при исследовании решения в виде сферической волны в § 7.3, функция

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \frac{f(|\mathbf{x} - \xi| - ct)}{|\mathbf{x} - \xi|}$$

является решением для произвольной точки ξ . Исходя из интуитивных соображений, можно утверждать, что начальное возмущение, заданное в произвольной точке ξ , создает такую сферическую волну, и предположить, что решение должно быть суперпозицией всех таких сферических волн. Итак, рассмотрим

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\xi) \frac{f(|\mathbf{x} - \xi| - ct)}{|\mathbf{x} - \xi|} d\xi. \quad (7.49)$$

Под знак интеграла внесена произвольная функция $\Psi(\xi)$, поскольку в зависимости от начальных условий сферические волны, выходящие из различных точек ξ , соответствуют источникам разной интенсивности. В выражении (7.49) удобно ввести сферические координаты (R, θ, λ) с полюсом в точке $\mathbf{x}$. Тогда получаем

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \int_0^{\infty} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \Psi(\mathbf{x} + R\mathbf{l}) f(R - ct) R \sin \theta dR d\theta d\lambda,$$

где $\mathbf{l}$ — единичный вектор, который направлен из $\mathbf{x}$ в ξ и который в декартовых координатах записывается так:

$$\mathbf{l} = (\sin \theta \cos \lambda, \sin \theta \sin \lambda, \cos \theta).$$

Предполагая, что исходный источник, определяющий f , действует мгновенно, положим в этой формуле $f(R - ct) = \delta(R - ct)$. Тогда

$$\psi(\mathbf{x}, t) = ct \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \Psi(\mathbf{x} + ct\mathbf{l}) \sin \theta d\theta d\lambda. \quad (7.50)$$

Формально это выражение является решением для любой функции Ψ . Его можно также записать в виде интеграла по поверхности

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{ct} \int_{S(t)} \Psi dS,$$

где $S(t)$ — сфера радиуса ct с центром в точке $\mathbf{x}$. Для непрерывно дифференцируемой функции Ψ , в силу (7.50), имеем

$$\psi \rightarrow 0, \quad \psi_t \rightarrow 4\pi\Psi(\mathbf{x}) \quad \text{при} \quad t \rightarrow 0. \quad (7.51)$$

Выбрав $\Psi(\mathbf{x}) = \varphi_1(\mathbf{x})/(4\pi)$, мы решим задачу с начальными условиями частного вида

$$\psi \rightarrow 0, \quad \psi_t \rightarrow \varphi_1(\mathbf{x}) \quad \text{при} \quad t \rightarrow 0. \quad (7.52)$$

Решение имеет вид

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi ct} \int_{S(t)} \varphi_1 dS. \quad (7.53)$$

Оно дает полный вклад мгновенных источников, присылающих сферические волны в точку x в момент времени t ; все они находятся на расстоянии ct , и их вклады, перемещаясь со скоростью c , достигают точки x в момент времени t (см. рис. 7.4). Заметим, что все точки, лежащие внутри сферы $S(t)$, в принципе могли бы еще

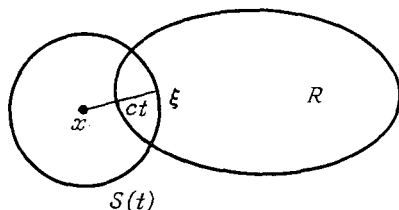


Рис. 7.4. Детали построения решения Пуассона задачи Коши; R — область начального возмущения.

давать вклад. Но у сферических волн нет «хвоста», источники действуют мгновенно, и вклад каждого длится лишь мгновение. Для двух измерений это уже не так. Во всяком случае, выражение (7.53) формально является решением задачи с начальными условиями (7.52). Его можно также переписать в виде

$$\psi(x, t) = ct M[\varphi_1],$$

где

$$M[\varphi_1] = \frac{1}{4\pi c^2 t^2} \int_{S(t)} \varphi_1 dS$$

означает среднее значение функции φ_1 по сфере $S(t)$.

Для того чтобы удовлетворить второй половине начальных условий, можно положить функцию f в (7.49) равной δ' и далее действовать так же, как и выше. Однако лучше использовать прием, который часто оказывается полезным. Если ψ — решение уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами, то решением будет и производная от ψ по t или по x . В данном случае заметим, что

$$\chi(x, t) = \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t}$$

является решением волнового уравнения, если $\psi(x, t)$ выражается формулой (7.50). Далее при $t \rightarrow 0$, согласно (7.51), имеем

$$\begin{aligned} \chi &= \psi_t \rightarrow 4\pi \Psi(x), \\ \chi_t &= \psi_{tt} = c^2 \nabla^2 \psi \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Для того чтобы $\chi \rightarrow \varphi_0(\mathbf{x})$, $\chi_t \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$, следует положить $\Psi(\mathbf{x}) = \varphi_0(\mathbf{x})/(4\pi)$ и взять

$$\chi(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{4\pi ct} \int_{S(t)} \varphi_0 dS \right\}.$$

Полное решение для произвольных начальных условий, таким образом, имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{x}, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{4\pi ct} \int_{S(t)} \varphi_0 dS \right\} + \frac{1}{4\pi ct} \int_{S(t)} \varphi_1 dS = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \{ ctM[\varphi_0] \} + ctM[\varphi_1]. \end{aligned} \quad (7.54)$$

Проверка решения

Осталось проверить непосредственными вычислениями, что выражение (7.50) удовлетворяет волновому уравнению. Сразу получаем, что

$$\psi_{x_i x_i} = ct \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 \Psi(\xi)}{\partial \xi_i^2} \sin \theta d\theta d\lambda = \frac{1}{ct} \int_{S(t)} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi_i^2} dS,$$

где $\xi = \mathbf{x} + ct\mathbf{l}$. Вычисление производных по t требует несколько более сложных выкладок. Имеем

$$\begin{aligned} \psi_t &= \frac{\psi}{t} + c^2 t \int_0^\pi \int_0^{2\pi} l_i \frac{\partial \Psi}{\partial \xi_i} \sin \theta d\theta d\lambda = \frac{\psi}{t} + \frac{1}{t} \int_{S(t)} l_i \frac{\partial \Psi}{\partial \xi_i} dS = \\ &= \frac{\psi}{t} + \frac{1}{t} \int_{V(t)} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi_i^2} dV, \end{aligned}$$

где $V(t)$ — объем, ограниченный сферой $S(t)$. Поэтому

$$\psi_{tt} = -\frac{\psi}{t^2} + \frac{\psi_t}{t} - \frac{1}{t^2} \int_{V(t)} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi_i^2} dV + \frac{c}{t} \int_{S(t)} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi_i^2} dS,$$

что сводится к

$$\psi_{tt} = \frac{c}{t} \int_{S(t)} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi_i^2} dS,$$

в силу выражения для ψ_t . Таким образом,

$$\psi_{tt} = c^2 \psi_{x_i x_i},$$

что и требовалось.

В этих рассуждениях предполагают, что Ψ дважды непрерывно дифференцируема. Для того чтобы выражение (7.54) было осмысленным, необходимо только, чтобы функции φ_0 и φ_1 были интегри-

руемы. Можно расширить понятие решения так, чтобы включить все случаи, для которых выражение (7.54) имеет смысл. В частности, если функции φ_0 и φ_1 являются кусочно гладкими, то (7.54) определено и $\varphi \rightarrow \varphi_0(x)$, $\varphi_t \rightarrow \varphi_1(x)$ во всех точках гладкости.

Для задачи о взрыве шара из § 7.3 $\varphi_0 = 0$, $\varphi_1 = -P/\rho_0$ в исходной сфере. Это пример кусочно гладких начальных данных. Было бы интересно при помощи интеграла Пуассона построить решение не только для сферически симметричного случая, но и для произвольной области начального давления. Это предоставляется читателю.

Волновой фронт

Если ненулевые значения $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ сосредоточены в ограниченной области R , как показано на рис. 7.4, то решение в произвольной точке вне R равно нулю до тех пор, пока $S(t)$ впервые не пересечется с областью R . Ясно, что это произойдет в тот момент,

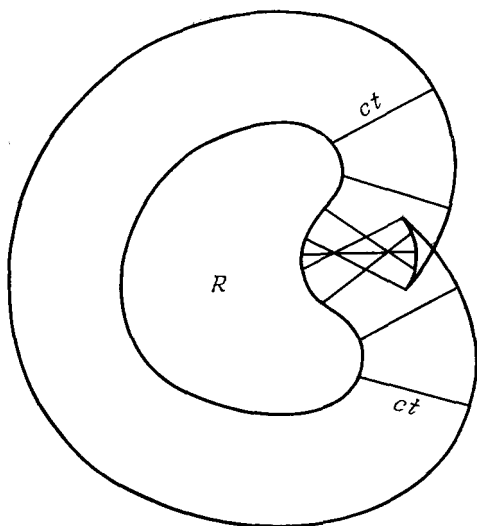


Рис. 7.5. Построение волнового фронта для возмущения, первоначально сосредоточенного в области R .

когда ct станет равным кратчайшему расстоянию от x до границы R . Это кратчайшее расстояние откладывается по нормали к граничной поверхности области R .

Обратив проведенные выше рассуждения, можно определить волновой фронт в момент времени t . Построим все нормали к граничной поверхности области R и отложим расстояние ct вдоль каждой нормали. Поверхность, образованная полученными точ-

ками, будет волновым фронтом. Заметим, что там, где поверхность R вогнута, волновой фронт через некоторое время образует складку (см. рис. 7.5). Это построение будет изучено ниже, когда речь пойдет о геометрической оптике.

Возмущение в произвольной точке x вне R исчезает, когда сфера $S(t)$ становится настолько большой, что R целиком лежит внутри ее. Таким образом, в трехмерном пространстве первоначальное возмущение конечных размеров приводит к возмущению, которое длится только в течение конечного интервала времени. «Хвост» отсутствует.

Двумерная задача

Решение для двумерного распределения начальных значений можно рассматривать как частный случай, когда $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ не зависят от x_3 . Предположим, что ненулевые значения $\varphi_0(x_1, x_2)$, $\varphi_1(x_1, x_2)$ сосредоточены в ограниченной области $R_0(x_1, x_2)$ -плоскости. С трехмерной точки зрения они заполняют цилиндр R с образующими, параллельными оси x_3 , и поперечным сечением R_0 . Исходное возмущение уже не будет иметь конечные размеры. Для точки x вне цилиндра R волновой фронт строится так же, как и раньше, но сферы $S(t)$ с центрами в точке x будут пересекать R для всех моментов времени после первого пересечения. Это приводит к «хвосту» у двумерных волн и наглядно демонстрирует разницу между двумя и тремя измерениями.

В решении (7.54) значение $\varphi(x, t)$ не должно зависеть от x_3 . Это можно проверить непосредственным вычислением после указанного ниже преобразования интегралов. Рассмотрим величину

$$M[\varphi_0] = \frac{1}{4\pi c^2 t^2} \int_{S(t)} \varphi_0 dS$$

в точке $(x_1, x_2, 0)$.

В точке (ξ_1, ξ_2, ξ_3) сферы $S(t)$ (см. рис. 7.6) функция φ_0 принимает значение $\varphi_0(\xi_1, \xi_2)$. Внешняя нормаль образует с осью x_3 угол, косинус l_3 которого равен

$$\frac{\xi_3}{ct} = \pm \frac{\sqrt{c^2 t^2 - (x_1 - \xi_1)^2 - (x_2 - \xi_2)^2}}{ct}.$$

Элемент поверхности dS равен $d\xi_1 d\xi_2 / |l_3|$, где $d\xi_1 d\xi_2$ — его проекция на (x_1, x_2) -плоскость. Следовательно, учитывая два равных вклада от верхнего и нижнего полупространств, можно записать

$$M[\varphi_0] = \frac{1}{2\pi c t} \iint_{\sigma(t)} \frac{\varphi_0(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2}{\sqrt{c^2 t^2 - (x_1 - \xi_1)^2 - (x_2 - \xi_2)^2}},$$

где $\sigma(t)$ — проекция сферы $S(t)$ на (x_1, x_2) -плоскость (см. рис. 7.6), т. е.

$$\sigma(t): (x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 \leq c^2 t^2.$$

Полное решение сводится к

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, x_2, t) = & \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2\pi} \iint_{\sigma(t)} \frac{\varphi_0(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2}{\sqrt{c^2 t^2 - (x_1 - \xi_1)^2 - (x_2 - \xi_2)^2}} + \\ & + \frac{1}{2\pi} \iint_{\sigma(t)} \frac{\varphi_1(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2}{\sqrt{c^2 t^2 - (x_1 - \xi_1)^2 - (x_2 - \xi_2)^2}}. \end{aligned} \quad (7.55)$$

Можно заметить сходство с выражением (7.29).

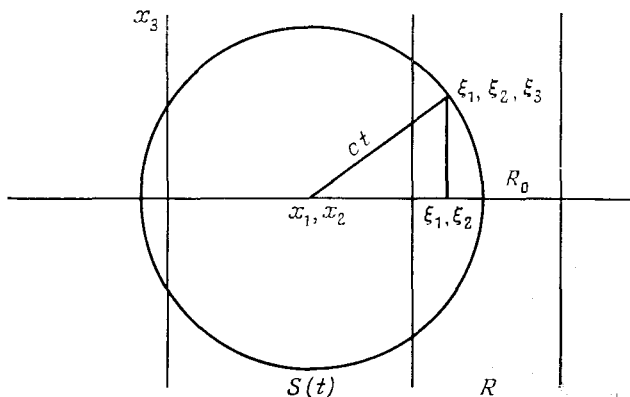


Рис. 7.6. Построение, связанное с переходом из трехмерного пространства на плоскость в задаче Коши.

Поскольку здесь интегрирование проводится по всему кругу $(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 \leq c^2 t^2$, а не только по окружности, возмущение продолжается и после того, как исходная область R_0 окажется полностью внутри этой окружности.

7.7. Геометрическая оптика

При обсуждении одномерных задач в § 5.5 и 5.6 была выяснена роль характеристик как носителей разрывов. Было также показано, что изменение величины разрыва можно определить непосредственно из уравнений, не находя полного решения. Это же верно и для большего числа измерений, и теория разрывов для линейных уравнений есть одно из приложений геометрической оптики. Второе приложение касается периодических волн в высокочастотном

приближении. Оба случая тесно связаны, поскольку фурье-анализ разрывных функций связывает особенности с высокочастотным поведением. Оказывается, что оба аспекта геометрической оптики можно объединить одним общим построением.

Геометрическая оптика особенно важна, когда точное решение невозможно найти в явном виде или оно чрезвычайно сложно. Даже для более простых задач часто легче найти поведение волнового фронта таким образом, чем выделять его из общего решения. Мы разовьем идеи геометрической оптики на примере волнового уравнения, а затем покажем, как их применять к волнам в неоднородной среде (для которых точные решения могут оказаться недоступными) и к анизотропным волнам (которые имеют сложный вид). В следующей главе с помощью идей геометрической оптики будет развита приближенная теория распространения ударных волн. Из-за нелинейности и многомерности такие задачи чрезвычайно трудно исследовать каким-либо другим способом.

Теория разрывов в основном применяется для определения поведения волнового фронта, распространяющегося в невозмущенную область. Предположим, что волновой фронт описывается уравнением $S(x, t) = 0$ и что решение φ тождественно равно нулю при $S(x, t) < 0$. Следует определить поверхность $S = 0$ и поведение разрыва функции φ или ее производных. Если разрывы на волновом фронте появляются у производных функции φ , начиная с m -го порядка, то предположим, что φ можно представить в виде

$$\varphi = \begin{cases} \Phi_0(x) \frac{S^m}{m!} + \Phi_1(x) \frac{S^{m+1}}{(m+1)!} + \dots, & S > 0, \\ 0, & S < 0. \end{cases}$$

При этом коэффициент $\Phi_0(x)$ определяет изменение величины разрыва. Как мы видели в случае цилиндрических волн, особенность на волновом фронте может содержать дробные степени, так что мы допускаем нецелые значения m . Идея состоит в том, чтобы подставить это разложение в уравнение для φ , приравнять коэффициенты при соответствующих степенях S к нулю и таким образом получить уравнения для S и Φ_n . Однако при этом оказывается, что нам требуется только, чтобы φ имела вид

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(x) f_n(S), \quad (7.56)$$

где $f_n(S)$ обладают свойством

$$f'_n(S) = f_{n-1}(S). \quad (7.57)$$

При вычислении производных функции φ появляются производные функций f_n , но при помощи равенств (7.57) их можно выра-

зять через предыдущие члены этой последовательности. Тогда уравнению можно удовлетворить, последовательно приравняв коэффициенты при f_n к нулю. Эта общая схема включает в себя ряд важных частных случаев, например предыдущий случай, поскольку выражения

$$f_n(S) = \begin{cases} \frac{S^{n+m}}{(n+m)!}, & S > 0, \\ 0, & S < 0, \end{cases} \quad (7.58)$$

удовлетворяют равенствам (7.57).

Мы проведем подстановку в форму (7.56), рассматривая ее пока как краткую запись (7.58). Формулы нам понадобятся позднее при исследовании обобщений. Для начала будем считать также, что $m > 2$. Строго говоря, понятие «решение» надо уточнять, если входящие в уравнение производные разрывны. Для волнового уравнения требуется существование непрерывных вторых производных и $m > 2$. Как мы убедимся, в этом есть смысл, а не только сверхпредосторожность!

При подстановке появляются первые и вторые производные функций $f_n(S)$, но, согласно (7.57), они заменяются на

$$f'_n(S) = f_{n-1}(S), \quad f''_n(S) = f_{n-2}(S).$$

Для $n = 0, 1$ это приведет к $f_{-1}(S)$ и $f_{-2}(S)$, которых нет в исходной последовательности. В случае (7.58) с $m > 2$ они определяются по той же формуле; в других случаях их определение следует включить в определение $f_n(S)$. После подстановки в волновое уравнение мы имеем

$$[S_{x_i}^2 - c^{-2}S_t^2] \Phi_0 f_{-2} + \{[S_{x_i}^2 - c^{-2}S_t^2] \Phi_1 + 2S_{x_i} \Phi_0 x_i + (S_{x_i x_i} - c^{-2}S_{tt}) \Phi_0\} f_{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} E_n f_n(S) = 0. \quad (7.59)$$

Явное выражение для E_n нам не потребуется, однако следует отметить, что оно содержит главный член

$$[S_{x_i}^2 - c^{-2}S_t^2] \Phi_{n+2}$$

и другие члены с $\Phi_{n+1}, \dots, \Phi_0$ и производными от S .

Волновое уравнение удовлетворяется, если все коэффициенты при $f_{-2}, f_{-1}, \dots$, равны нулю. Это дает

$$S_{x_i}^2 - c^{-2}S_t^2 = 0, \quad (7.60)$$

$$2S_{x_i} \frac{\partial \Phi_0}{\partial x_i} + (S_{x_i x_i} - c^{-2}S_{tt}) \Phi_0 = 0 \quad (7.61)$$

и дальнейшие уравнения для последовательного определения $\Phi_1, \Phi_2, \dots$. Основной интерес представляют уравнения для S и Φ_0 . Прежде чем исследовать их решения, вернемся к вопросу о расширении области приложений за счет выбора функций f_n .

Разрывы функции φ и ее первых производных

Если в равенстве (7.58) $m < 2$, то встает вопрос об определении f_{-2} и f_{-1} , и это связано с расширением понятия решения. Для $m = 2$, т. е. для разрывов вторых производных, формула (7.58) еще определяет f_{-2} и f_{-1} , и расширенное понятие решения состоит просто в том, что уравнение удовлетворяется по обе стороны от волнового фронта $S = 0$.

Если разрыв имеет сама функция φ , то $m = 0$ и разложение за волновым фронтом имеет вид

$$\varphi = \Phi_0(x) + \Phi_1(x)S + \frac{1}{2}\Phi_2(x)S^2 + \dots$$

Если это выражение подставить в волновое уравнение, то первые два члена в (7.59) будут отсутствовать и уравнения (7.60) и (7.61) будут утеряны. Однако если положить

$$\varphi = \Phi_0(x)H(S) + \Phi_1(x)H_1(S) + \dots,$$

где $H(S)$ — функция Хевисайда

$$H(S) = \begin{cases} 1, & S > 0, \\ 0, & S < 0, \end{cases}$$

и $H_n(S)$ — интегралы от нее, равные

$$H_n(S) = \begin{cases} \frac{1}{n!} S^n, & S > 0, \\ 0, & S < 0, \end{cases}$$

и, кроме того, при вычислении производных использовать обобщенные функции, то будем иметь

$$\varphi_t = \Phi_0 S_t \delta(S) + \Phi_1 S_t H(S) + \dots,$$

$$\varphi_{tt} = \Phi_0 S_t^2 \delta'(S) + (\Phi_1 S_t^2 + \Phi_0 S_{tt}) \delta(S) + \dots$$

и т. д. Получаем снова соотношение (7.59), полагая

$$f_0 = H(S), \quad f_{-1} = \delta(S), \quad f_{-2} = \delta'(S),$$

и информация о S и Φ_0 не будет утеряна. В случае $m \geq 2$ этих затруднений не возникает. Объяснение состоит в том, что для $m < 2$ мы на самом деле переводим рассмотрение в область «слабых решений» и расширенное определение решения включает в себя информацию о возможных разрывах, не зависящую от конкретного способа введения этих разрывов. Для линейных задач необходимое расширение получится немедленно, если допустить обобщенные функции, такие, как дельта-функция, и интерпретировать производные в соответствующем смысле. Это эквивалентно методу, указанному в § 2.7.

Если φ непрерывна, но первые производные имеют разрывы, то подходящее разложение будет иметь вид

$$\varphi = \Phi_0(\mathbf{x}) H_1(S) + \Phi_1(\mathbf{x}) H_2(S) + \dots$$

и в этом случае

$$f_0(S) = H_1(S), \quad f_{-1}(S) = H(S), \quad f_{-2}(S) = \delta(S).$$

Разложение вблизи волнового фронта и поведение на больших расстояниях

Если разложение (7.56) рассматривать как приближение к решению вблизи волнового фронта, а не просто как способ изучения разрывов производных, то можно расширить область его применения, допустив функции $f_n(S)$ еще более общего вида, чем степенные или ступенчатые функции. Например, для цилиндрических волн разложение вблизи волнового фронта (7.34) принимает вид (7.56), если положить

$$f_n(S) = \frac{(-1/2)!}{(n-1/2)!} \frac{1}{2\pi} \int_0^S q(\eta) (S-\eta)^{n-1/2} d\eta, \quad S = t - \frac{r}{c},$$

$$\Phi_n(r) = \frac{(n-1/2)!}{n!(-n-1/2)!} \left(\frac{c}{2r}\right)^{n+1/2}.$$

Это разложение оказалось справедливым при

$$\frac{cS}{2r} < 1.$$

Таким образом, S не обязательно должно быть малым при условии, что r достаточно велико. Функции $f_n(S)$ удовлетворяют определяющим соотношениям (7.57), и это разложение включается в развиваемую здесь общую схему.

Вообще говоря, следует ожидать, что разложение (7.56) с подходящими $f_n(S)$ будет описывать поведение в некоторой довольно широкой области за волновым фронтом. Однако точный вид этих специальных функций $f_n(S)$ можно найти только из более полных решений; они не определяются подстановкой (7.56) в уравнение. Но определение S и Φ_0 из (7.60) и (7.61) все же дает ценную информацию. В типичных случаях это разложение описывает поведение на больших расстояниях, т. е. когда $cS/|x|$ мало. В первом приближении $f_0(S)$ описывает профиль волны, а $\Phi_0(\mathbf{x})$ — затухание амплитуды при $\mathbf{x} \rightarrow \infty$.

Высокие частоты

В задаче о распространении волн часто интересуются периодическими по времени решениями с заданной частотой ω . Если

теперь для φ взять уравнение более общего вида

$$L\varphi = \frac{1}{c^2} \varphi_{tt},$$

где L — некоторый линейный оператор, не зависящий от t , то периодические решения можно записать в виде

$$\varphi = \Phi(\mathbf{x}) e^{-i\omega t},$$

где Φ удовлетворяет уравнению

$$L\Phi + \frac{\omega^2}{c^2} \Phi = 0.$$

Для больших значений ω/c (нормированных характерной длиной задачи, возможно, масштабом самой переменной x) в стандартном методе нахождения асимптотических решений полагают

$$\Phi \sim e^{i\omega\sigma(\mathbf{x})} \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(\mathbf{x}) (-i\omega)^{-n},$$

где функции $\sigma(\mathbf{x})$ и $\Phi_n(\mathbf{x})$ еще нужно определить. Для φ это разложение имеет вид

$$\varphi \sim e^{-i\omega(t-\sigma(\mathbf{x}))} \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(\mathbf{x}) (-i\omega)^{-n}. \quad (7.62)$$

Его можно записать в виде

$$\varphi \sim \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(\mathbf{x}) f_n(S),$$

где

$$S = t - \sigma(\mathbf{x}), \quad f_n(S) = \frac{e^{-i\omega S}}{(-i\omega)^n}.$$

Заметим, что так определенные функции $f_n(S)$ удовлетворяют равенствам (7.57). Следовательно, уравнения для S и Φ_n в точности такие же, как и в разложении вблизи волнового фронта, и нет необходимости их переписывать; видно также, почему получаются те же самые результаты.

В данном контексте поверхности $S = \text{const}$ являются поверхностями равной фазы (например, пучностей и узлов), тогда как $\Phi_0(\mathbf{x})$ определяет амплитуду колебаний в точке $\mathbf{x}$.

Определение S и Φ_0

Продолжим теперь исследование уравнений для S и Φ_0 в случае волнового уравнения. Описание будем проводить применительно к распространению волнового фронта, но высокочастотная интерпретация очевидна.

Уравнение (7.60) для S часто называют *уравнением эйконала*. Оно описывает движение поверхности $S = 0$ в $\mathbf{x}$ -пространстве. Нормаль к поверхности задается единичным вектором $\mathbf{l}$ с компонентами

$$l_i = \frac{-S_{x_i}}{|\nabla S|}.$$

Нормальную скорость распространения фронта можно вычислить, заметив, что близкие точки $(\mathbf{x}_0, t_0)$ и $(\mathbf{x}_0 + \mathbf{l}\delta s, t_0 + \delta t)$ лежат на поверхности при условии, что

$$S(\mathbf{x}_0, t_0) = 0, \quad S(\mathbf{x}_0 + \mathbf{l}\delta s, t_0 + \delta t) = 0.$$

Отсюда с точностью до второго порядка по δs и δt

$$l_i S_{x_i} \delta s + S_t \delta t = 0,$$

и нормальная скорость равна

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta s}{\delta t} = \frac{-S_t}{l_i S_{x_i}} = \frac{S_t}{|\nabla S|}. \quad (7.63)$$

Таким образом уравнение эйконала утверждает просто, что волновой фронт имеет нормальную скорость, равную $\pm c$.

Для дальнейшего построения решения удобно искать волновой фронт в виде

$$S(\mathbf{x}, t) \equiv t - \sigma(\mathbf{x}) = 0. \quad (7.64)$$

Семейство поверхностей $\sigma(\mathbf{x}) = \text{const}$ определяет последовательные положения волнового фронта в $\mathbf{x}$ -пространстве. Уравнения (7.60) и (7.61) принимают вид

$$\sigma_{x_i}^2 = \frac{1}{c^2}, \quad (7.65)$$

$$2\sigma_{x_i} \frac{\partial \Phi_0}{\partial x_i} + \sigma_{x_i x_i} \Phi_0 = 0. \quad (7.66)$$

Нелинейное уравнение для σ можно решить методом § 2.13, интегрируя вдоль характеристик. Если ввести $p_i = \sigma_{x_i}$ и записать это уравнение в виде

$$H \equiv \frac{1}{2} c p_i^2 - \frac{1}{2} c^{-1} = 0,$$

то характеристики, определяемые уравнениями (2.86), будут кривыми в $\mathbf{x}$ -пространстве с направлением

$$\frac{dx_i}{ds} = c p_i.$$

Нормированный таким образом параметр s является расстоянием вдоль характеристики, поскольку из уравнения (7.65) следует, что $c^2 p_i^2 = 1$. Полная система характеристических уравнений

(2.86)—(2.88) имеет вид

$$\frac{dx_i}{ds} = c p_i, \quad \frac{dp_i}{ds} = 0, \quad \frac{d\sigma}{ds} = \frac{1}{c}. \quad (7.67)$$

Эти уравнения можно вывести непосредственно из (7.65), учитывая, что

$$\frac{d}{ds} = c p_j \frac{\partial}{\partial x_j} = c \sigma_{x_j} \frac{\partial}{\partial x_j},$$

и не ссылаясь на общие формулы. Поскольку вектор $p_i = \sigma_{x_i}$ ортогонален волновому фронту $\sigma = \text{const}$, первое из уравнений (7.67) показывает, что лучи также ортогональны; они образуют траектории, ортогональные семейству волновых фронтов $\sigma = \text{const}$. Второе уравнение показывает, что вектор $\mathbf{p}$ постоянен вдоль луча; следовательно, постоянно и направление луча $c\mathbf{p}$, а сами лучи являются прямыми линиями. Тогда лучи можно построить, начертив семейство прямых, ортогональных исходному волновому фронту. Третье уравнение в (7.67) при интегрировании дает

$$\sigma = \frac{s}{c},$$

где s — расстояние от исходного волнового фронта. В произвольный момент времени $t > 0$ волновой фронт $t = \sigma = s/c$ находится на расстоянии ct вдоль лучей. Это в точности совпадает с построением для точного решения Пуассона, представленным на рис. 7.5. Если $\mathbf{x}_0$ — точка на исходном волновом фронте, а $\mathbf{l}(\mathbf{x}_0)$ — вектор единичной нормали в этой точке, то формально решение системы (7.67) таково:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{l}(\mathbf{x}_0) s, \quad \mathbf{p} = c^{-1} \mathbf{l}(\mathbf{x}_0), \quad \sigma = \frac{s}{c}.$$

Это неявное выражение для $\sigma(\mathbf{x})$: по заданному $\mathbf{x}$ исходная точка $\mathbf{x}_0$ и расстояние s в принципе определяются из первого уравнения; тогда $\sigma = s/c$.

Данные результаты присущи волновому уравнению. В общем случае лучи, определяемые как характеристики уравнения эйконала, не являются ни прямыми (неоднородная среда), ни ортогональными к волновому фронту (анизотропная среда).

Уравнение (7.66) представляет собой линейное уравнение для Φ_0 , и его характеристиками служат те же самые лучи, уже введенные для уравнения эйконала. Его можно переписать в следующей характеристической форме:

$$\frac{1}{\Phi_0} \frac{d\Phi_0}{ds} = -\frac{1}{2} c \sigma_{x_i} x_i, \quad (7.68)$$

и в принципе оно элементарно интегрируется, как только определена $\sigma(\mathbf{x})$. Ясно, что функцию Φ_0 следует находить интегрирова-

нием вдоль лучей и что ее изменение как-то связано с расхождением лучей, измеряемым $\sigma_{x_i} x_i$. Но учитывая неявную формулу для $\sigma(\mathbf{x})$, лучше поступить несколько иначе.

Заметим сначала, что уравнение (7.66) можно записать в дивергентной форме

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\sigma_{x_i} \Phi_0^2) = 0, \quad (7.69)$$

а это подсказывает, что нечто сохраняется, и наводит на мысль о возможности использовать теорему о дивергенции. Рассмотрим трубку, образованную лучами, лежащими между исходным волновым фронтом $\mathcal{S}_0$: $\sigma = 0$ и волновым фронтом $\mathcal{S}$: $\sigma = t$

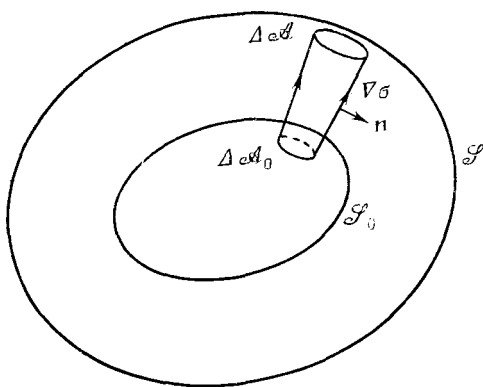


Рис. 7.7. Волновые фронты и трубка лучей в геометрической оптике.

в момент времени t , как показано на рис. 7.7. Проинтегрируем (7.69) по объему этой трубки лучей и используем теорему о дивергенции; тогда мы получим

$$\int n_i \sigma_{x_i} \Phi_0^2 dS = 0,$$

где $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль, а интеграл по поверхности берется по боковой поверхности Σ и основаниям $\mathcal{S}_0$, $\mathcal{S}$ трубки лучей. В данном случае лучи ортогональны волновым фронтам $\sigma = \text{const}$; следовательно,

$$n_i \sigma_{x_i} = 0 \quad \text{на } \Sigma$$

и этот вклад выпадает. На $\mathcal{S}$ векторы $\mathbf{n}$ и $\nabla \sigma$ имеют одинаковые направления, так что

$$n_i \sigma_{x_i} = |\nabla \sigma| \quad \text{на } \mathcal{S}$$

и из уравнения эйконала (7.65) $|\nabla\sigma| = c^{-1}$. На $\mathcal{S}_0$ векторы $\mathbf{n}$ и $\nabla\sigma$ имеют противоположные направления, так что

$$n_i \sigma_{x_i} = -|\nabla\sigma| = -c^{-1} \quad \text{на } \mathcal{S}_0.$$

В данном случае c постоянно и мы имеем

$$\int_{\mathcal{S}} \Phi_0^2 dS = \int_{\mathcal{S}_0} \Phi_0^2 dS.$$

Если трубка лучей берется очень тонкой и имеет малые площади поперечного сечения $\Delta\mathcal{A}_0$ на $\mathcal{S}_0$ и $\Delta\mathcal{A}$ на $\mathcal{S}$, то с точностью до второго порядка это можно переписать как

$$\Phi_0^2(\mathbf{x}) \Delta\mathcal{A} = \Phi_0^2(\mathbf{x}_0) \Delta\mathcal{A}_0$$

или — в пределе при $\Delta\mathcal{A}_0, \Delta\mathcal{A} \rightarrow 0$ — как

$$\frac{\Phi_0(\mathbf{x})}{\Phi_0(\mathbf{x}_0)} = \left(\frac{d\mathcal{A}}{d\mathcal{A}_0} \right)^{-1/2}. \quad (7.70)$$

Обычно равенство (7.70) интерпретируют в терминах потока энергии вдоль трубки лучей, особенно в контексте высокочастотного приближения вида (7.62). Через каждое поперечное сечение трубки лучей имеется осредненный поток энергии, и без подробных вычислений ясно, что этот поток пропорционален $\Phi_0^2 \Delta\mathcal{A}$. Таким образом, уравнение (7.70) эквивалентно «закону» постоянства потока энергии вдоль трубки лучей. Для неоднородной среды (как будет показано ниже) у $\Phi_0^2 \Delta\mathcal{A}$ появляются дополнительные множители, зависящие от среды, но закон постоянства потока энергии остается справедливым.

Это на самом деле общий результат геометрической оптики для недиспергирующих волн, и он часто используется непосредственно для определения изменения амплитуды без проведения каждый раз подробных выкладок. Недавние исследования по диспергирующим волнам позволили высказать общие соображения по данному кругу вопросов; в то же время они привели к изменению точки зрения. Появились более общие понятие «волнового действия» (которое в простейших линейных случаях представляет собой поток энергии, деленный на подходящую частоту) и закон сохранения этого действия. В нашем случае частота постоянна, так что оба закона совпадают. Эти общие вопросы будут обсуждаться в ч. II.

Для плоских, цилиндрических и сферических волн трубки лучей являются прямыми полосами, клиньями и конусами соответственно. Следовательно, для этих случаев

$$\frac{d\mathcal{A}}{d\mathcal{A}_0} = 1, \quad \Phi_0 = \text{const},$$

$$\frac{d\mathcal{A}}{d\mathcal{A}_0} = r, \quad \Phi_0 \propto r^{-1/2},$$

$$\frac{d\mathcal{A}}{d\mathcal{A}_0} = R^2, \quad \Phi_0 \propto R^{-1}.$$

Это совпадает с данными о поведении вблизи волнового фронта Эли на больших расстояниях, полученными ранее из точных решений. В случае двух измерений при отсутствии цилиндрической симметрии мы имеем

$$\Delta \mathcal{A}_0 = R_1 \Delta \theta, \quad \Delta \mathcal{A} = (R_1 + s) \Delta \theta,$$

где R_1 — радиус кривизны исходного волнового фронта, а $\Delta \theta$ — стягивающий угол с вершиной в центре кривизны (см. рис. 7.8).

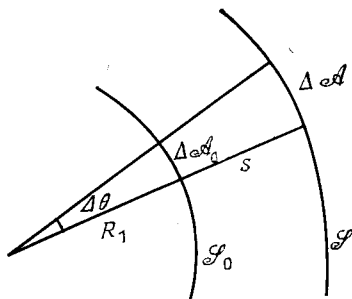


Рис. 7.8. Геометрия волновых фронтов и лучей.

(Геометрия лучей показывает, что радиус кривизны волнового фронта на расстоянии s вдоль луча равен $(R_1 + s)$ и стягивающий угол остается равным $\Delta \theta$.) Поэтому

$$\frac{\Phi_0(\mathbf{x})}{\Phi_0(\mathbf{x}_0)} = \left(\frac{R_1}{R_1 + s} \right)^{1/2}.$$

В случае трех измерений из дифференциальной геометрии следует, что элемент площади волнового фронта пропорционален гауссовой кривизне

$$\Delta \mathcal{A}_0 \propto R_1 R_2, \quad \Delta \mathcal{A} \propto (R_1 + s)(R_2 + s),$$

где R_1 и R_2 — главные радиусы кривизны исходного волнового фронта. Следовательно,

$$\frac{\Phi_0(\mathbf{x})}{\Phi_0(\mathbf{x}_0)} = \left\{ \frac{R_1 R_2}{(R_1 + s)(R_2 + s)} \right\}^{1/2}.$$

Каустики

В точках, где исходный волновой фронт является вогнутым, лучи образуют огибающую, как показано на рис. 7.9. Она обычно имеет заостренную форму, и область между двумя дугами трижды покрывается лучами, что напоминает складку на листе. Эта огибающая называется *каустикой*. На каустике (поскольку на ней соседние лучи касаются друг друга) $d\mathcal{A}/d\mathcal{A}_0 \rightarrow 0$. В силу уравнения (7.70), это означает, что на каустике $\Phi_0 \rightarrow \infty$.

Для задачи о волновом фронте этот результат корректен и его можно вывести из точного решения волнового уравнения. Но остается ли применимым само волновое уравнение — это уже другой вопрос. В акустике, например, оно получается только после линеаризации и при $\Phi_0 \rightarrow \infty$ может оказаться неверным

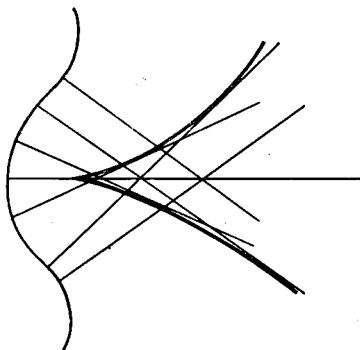


Рис. 7.9. Образование каустики.

из-за нелинейных эффектов. В главе 8 будет обсуждаться нелинейное поведение ударных волн и можно будет утверждать (за исключением, видимо, чрезвычайно слабых ударных волн, на которых сильнее сказываются эффекты вязкости), что вогнутая ударная волна фокусируется и при этом ускоряется, избегая наложения.

Для высокочастотных волн приближение геометрической оптики неприменимо вблизи каустики даже как приближение к волновому уравнению. Сингулярное поведение Φ_0 делает разложение (7.62) неравномерным в окрестности каустики. Правильное поведение впервые было найдено Эйри. Дальнейшее исследование было выполнено Келлером с сотрудниками (см., например, Кэй и Келлер [1]). Правильный результат состоит в том, что амплитуда остается конечной, но растет с ростом ω обычно как дробная степень ω . Этот вопрос несколько более специальный, чем остальная часть этой главы, и читатель отсылается к оригинальным статьям¹⁾.

7.8. Неоднородная среда

В уравнениях, описывающих неоднородную среду, коэффициенты являются функциями от x . Рассматриваемый метод разложения еще пригоден, но уравнения для σ и Φ_0 изменяются. В изотроп-

¹⁾ См. также Найфе А., Методы возмущений, М., «Мир», 1976, стр. 403—407.—Прим. ред.

ных случаях единственное изменение уравнения эйконала состоит в том, что $c = c(\mathbf{x})$, и полезнее обсудить сначала общую ситуацию, а затем перейти к конкретным примерам. Зависимость от $\mathbf{x}$ изменяет форму уравнений для лучей. Если, как и раньше, ввести $p_i = \sigma_{x_i}$ и

$$H \equiv \frac{1}{2} c(\mathbf{x}) p_i^2 - \frac{1}{2} c^{-1}(\mathbf{x}) = 0,$$

то характеристические уравнения запишутся в виде

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{ds} &= \frac{\partial H}{\partial p_i} = c p_i, \\ \frac{dp_i}{ds} &= -p_i \frac{\partial H}{\partial \sigma} - \frac{\partial H}{\partial x_i} = -\frac{c x_i}{c^2}, \\ \frac{d\sigma}{ds} &= p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{1}{c}. \end{aligned} \quad (7.71)$$

Поскольку вектор $\mathbf{p}$ является нормалью к волновому фронту $\sigma = \text{const}$, из первого уравнения следует, что лучи все еще ортогональны волновым фронтам. Однако из второго уравнения следует, что величина $c p_i$ уже больше не постоянна на луче, так что лучи искривляются в соответствии с направлением градиента функции c . Лучи следует определять решением первых двух уравнений относительно $x_i(s)$ и $p_i(s)$, после чего третье уравнение дает

$$\sigma = \int_{\text{луч}} \frac{ds}{c(\mathbf{x})};$$

здесь σ — время распространения волнового фронта вдоль луча.

Принцип Ферма утверждает, что это время стационарно по сравнению с соседними путями, соединяющими две данные точки. Мы можем проверить это. Пусть произвольный путь, соединяющий две точки $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ и $\mathbf{x} = \mathbf{b}$, задан в параметрическом виде

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mu), \quad 0 < \mu < 1, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{a}, \quad \mathbf{x}(1) = \mathbf{b}.$$

(Для применения обычных методов вариационного исчисления удобно нормировать параметр так, чтобы интегрирование проводилось по одному и тому же интервалу для всех путей. Поэтому переменная s в данном случае неудобна в качестве параметра.) Время для каждого пути равно

$$T = \int_0^1 \frac{1}{c\{\mathbf{x}(\mu)\}} \sqrt{\left(\frac{dx_j}{d\mu}\right)^2} d\mu. \quad (7.72)$$

В соответствии с известными результатами вариационного исчисления функции $x_i(\mu)$, при которых интеграл

$$T = \int_0^1 \mathcal{F}\{\mathbf{x}(\mu), \dot{\mathbf{x}}(\mu)\} d\mu, \quad \dot{\mathbf{x}}(\mu) = \frac{d\mathbf{x}}{d\mu},$$

достигает стационарного значения, удовлетворяют уравнениям Эйлера

$$\frac{d}{d\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x_i} = 0.$$

В нашем случае уравнения имеют вид

$$\frac{d}{d\mu} \left(\frac{1}{c} \frac{1}{\sqrt{\dot{x}_j^2}} \frac{dx_i}{d\mu} \right) + \frac{1}{c^2} \sqrt{\dot{x}_j^2} c_{x_i} = 0.$$

Вернувшись на этом стационарном пути к параметру s при помощи соотношения $\sqrt{\dot{x}_j^2} d\mu = ds$, получим

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{c} \frac{dx_i}{ds} \right) + \frac{1}{c^2} c_{x_i} = 0.$$

Это согласуется с (7.71), и мы проверили принцип Ферма для нашего случая. Принцип Ферма непосредственно и наглядно объясняет, почему лучи являются прямыми, когда c постоянно.

Слоистая среда

Для слоистой среды, в которой c зависит только от вертикальной координаты, скажем y , вычисление лучей можно упростить. Прежде всего луч остается в той же вертикальной плоскости, в которой он начинается. Поэтому достаточно рассмотреть двумерный случай с осью x , направленной по горизонтали, и осью y по вертикали. Скорость имеет вид $c = c(y)$, и система (7.71) сводится к следующей:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= cp_1, & \frac{dy}{ds} &= cp_2, \\ \frac{dp_1}{ds} &= 0, & \frac{dp_2}{ds} &= -\frac{c'(y)}{c^2}, & \frac{d\sigma}{ds} &= \frac{1}{c}. \end{aligned}$$

Поскольку p_1 постоянно и $dx/ds = cp_1$, угол θ между лучом и горизонталью определяется равенством $\cos \theta = p_1 c(y)$, и если индекс 0 относится к некоторой исходной точке луча, то

$$p_1 = \frac{\cos \theta_0}{c_0}, \quad \frac{\cos \theta}{\cos \theta_0} = \frac{c(y)}{c_0}. \quad (7.73)$$

Это известный в оптике закон Снеллиуса.

Компоненту p_2 можно найти, решив уравнения для y и p_2 или, еще лучше, заметив, что равенство $p_1^2 + p_2^2 = 1/c^2$ (уравнение эйконала) дает

$$p_2 = \sqrt{\frac{1}{c^2(y)} - \frac{\cos^2 \theta_0}{c_0^2}}.$$

Уравнения лучей дают нам

$$\frac{dx}{dy} = \frac{p_1}{p_2} = \frac{c(y) \cos \theta_0 / c_0}{\sqrt{1 - c^2(y) \cos^2 \theta_0 / c_0^2}}. \quad (7.74)$$

Следовательно, луч с исходным углом θ_0 в точке (x_0, y_0) определяется равенством

$$x - x_0 = \int_{y_0}^y \frac{c(y) \cos \theta_0 / c_0}{\sqrt{1 - c^2(y) \cos^2 \theta_0 / c_0^2}} dy. \quad (7.75)$$

Время прибытия волнового фронта вычисляется по формуле

$$\sigma = \int_0^s \frac{ds}{c} = \int_{y_0}^y \frac{dy}{c^2 p_2} = \int_{y_0}^y \frac{dy}{c(y) \sqrt{1 - c^2(y) \cos^2 \theta_0 / c_0^2}}. \quad (7.76)$$

Следует отметить, что все, что мы действительно использовали при выводе этих результатов, — это закон Снеллиуса; мы рассматривали его с более общей точки зрения теории характеристик.

Кажущееся безобидным распределение скорости $c(y)$ приводит к неожиданным эффектам для лучей. Отметим два примера.

Волновод в океане

Предположим, что функция $c(y)$ имеет вид, указанный на рис. 7.10, так что c изменяется только внутри слоя $|y| < Y$,

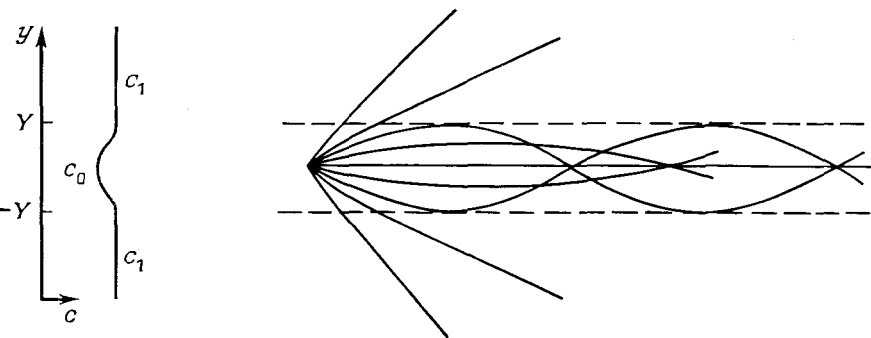


Рис. 7.10. Волновод в океане.

$c = c_1$ вне этого слоя и $c < c_1$ внутри слоя, достигая минимума c_0 при $y = 0$. Рассмотрим лучи от точечного источника, расположенного в точке $x = y = 0$.

Когда c возрастает вдоль луча, то одновременно возрастает $\cos \theta = c \cos \theta_0 / c_0$ и, следовательно, θ убывает, луч поворачи-

вается, приближаясь к горизонтали. Если $\theta_0 > \arccos(c_0/c_1)$, то луч проникает в область $c = c_1$ и дальше идет по прямой. Однако если $\theta_0 < \arccos(c_0/c_1)$, то $\cos \theta$ возрастает до 1 и θ убывает до 0 в точке y , для которой

$$c(y) = \frac{c_0}{\cos \theta_0}.$$

В этой точке луч горизонтален, затем он пересекает минимальное значение c , и все повторяется симметрично относительно оси x . Таким образом, эти лучи осциллируют около оси x , как показано на рис. 7.10.

Канал $|y| < Y$ образует своего рода волновод, и через точки, лежащие внутри его и достаточн одалекие от источника, может проходить несколько накладывающихся лучей. Поэтому геометрическая оптика предсказывает последовательное повторение сигналов. Кроме того, при помощи (7.76) можно показать, что сигналы, распространяющиеся по периферии, могут появиться раньше, чем сигналы, распространяющиеся вдоль центральной линии. Они проходят больший путь, но выигрывают в скорости распространения. В такой ситуации значения амплитуды, получаемые при помощи геометрической оптики, неверны и следует обратиться к более точному рассмотрению (см., например, недавнюю работу Коэна и Блюма [1]).

Зоны тени

Для источника, расположенного ниже максимума функции c , как изображено на рис. 7.11, аналогичным образом можно пока-

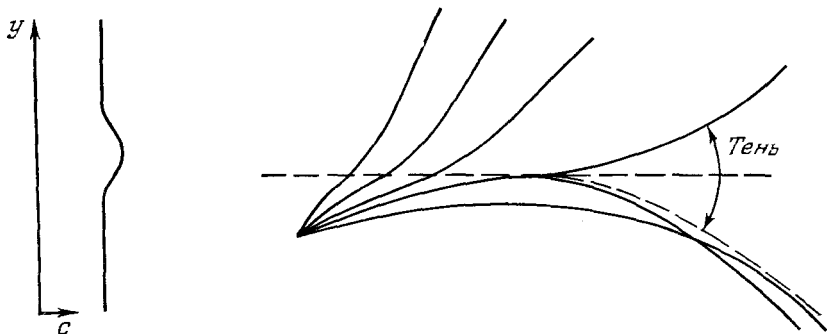


Рис. 7.11. Образование зоны тени.

зать возможность образования зоны тени, в которую лучи не проникают. Такой случай приведен на рис. 7.11.

Распространение энергии

Модификации уравнения (7.66) зависят от конкретной задачи и от того, какая физическая величина обозначена символом φ . Замечательно, что в любом случае поток энергии вдоль трубки лучей остается постоянным. Мы проверим это для акустики в неоднородной среде.

Чтобы не усложнять анализ, рассмотрим первоначально неподвижную жидкость с постоянным давлением при отсутствии массовых сил, но с произвольным распределением плотности $\rho(\mathbf{x})$. Можно представить себе нагретый слой жидкости, в котором гравитационные эффекты имеют высший порядок, и ими можно пренебречь. Линеаризованные уравнения¹⁾ для возмущения давления P , возмущения плотности R и возмущения скорости $\mathbf{V}$ имеют вид

$$\begin{aligned} R_t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) &= 0, \\ \rho \mathbf{V}_t + \nabla P &= 0, \\ P_t - c^2 (R_t + \mathbf{V} \cdot \nabla \rho) &= 0, \end{aligned} \quad (7.77)$$

где $c^2(\mathbf{x})$ — скорость звука. Для P имеем уравнение

$$P_{tt} = c^2 \left(\nabla^2 P - \frac{\nabla \rho}{\rho} \cdot \nabla P \right).$$

Используя два первых члена разложения .

$$P = \sum_0^{\infty} P_n(\mathbf{x}) f_n \{t - \sigma(\mathbf{x})\},$$

находим

$$\sigma_{x_i}^2 = \frac{1}{c^2}, \quad 2\sigma_{x_i} \frac{\partial P_0}{\partial x_i} + \left(\sigma_{x_i x_i} - \sigma_{x_i} \frac{\rho_{x_i}}{\rho} \right) P_0 = 0.$$

Если $\mathbf{V}$ и R разложены в аналогичные ряды, то коэффициенты V_n и R_n можно определить по P_n и σ , возвратившись к исходным трем уравнениям первого порядка в (7.77). В частности,

$$\mathbf{V}_0 = \frac{P_0 \nabla \sigma}{\rho}, \quad R_0 = \frac{P_0}{c^2}. \quad (7.78)$$

Уравнение для $P_0(\mathbf{x})$ можно записать в дивергентной форме

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{P_0^2 \sigma_{x_i}}{\rho} \right) = 0.$$

¹⁾ Обозначения, принятые в § 6.6, здесь изменены. Это сделано для того, чтобы избежать недоразумений при использовании индексов, нумерующих члены разложения вблизи волнового фронта.

Интегрирование по тонкой трубке лучей, как и в случае, рассмотренном перед формулой (7.70), дает

$$\frac{P_0^2}{\rho c} \Delta \mathcal{A} = \text{const.} \quad (7.79)$$

За счет дополнительного множителя ρc , зависящего от x , происходит изменение амплитуды давления, которое добавляется к изменению, связанному с расхождением лучей.

Интерпретацию левой части (7.79) как потока энергии нам удобнее провести для высокочастотного варианта геометрической оптики. Осредненная работа, которую совершают за единицу времени силы давления, действующие на элемент жидкости с поперечной площадью $\Delta \mathcal{A}$, равна

$$P_0 V_{0n} \Delta \mathcal{A}, \quad (7.80)$$

где V_{0n} — компонента вектора V , нормальная к $\Delta \mathcal{A}$. Согласно (7.78),

$$V_{0n} = \frac{P_0}{\rho} \mathbf{n} \cdot \nabla \sigma = \frac{P_0}{\rho c},$$

откуда

$$P_0 V_{0n} \Delta \mathcal{A} = \frac{P_0^2}{\rho c} \Delta \mathcal{A}.$$

Таким образом, равенство (7.79) показывает, что поток энергии остается постоянным вдоль трубки лучей.

7.9. Анизотропные волны

Когда в среде имеются выделенные направления, уравнение эйконала может быть несимметричным по σ_{x_i} . Вследствие этого лучи, определяемые как характеристики уравнения эйконала, уже не ортогональны волновому фронту. Если считать, что среда однородна, так что x не входит явно в уравнение эйконала, то уравнение эйконала можно записать следующим образом:

$$H(p_1, p_2, p_3) = 0, \quad p_i = \sigma_{x_i}.$$

Характеристическими уравнениями в этом случае являются

$$\frac{dx_i}{d\lambda} = H_{p_i}, \quad \frac{dp_i}{d\lambda} = 0, \quad \frac{d\sigma}{d\lambda} = p_i H_{p_i}. \quad (7.81)$$

На лучах величины p_i постоянны, поэтому направления лучей H_{p_i} постоянны и лучи являются прямыми линиями. Однако направления лучей ортогональны волновому фронту тогда и только тогда, когда

$$H_{p_i} \propto p_i,$$

Это верно тогда и только тогда, когда H представляет собой функцию от $p_1^2 + p_2^2 + p_3^2$, т. е. в изотропном случае.

Простой пример анизотропии дает волновое уравнение в движущейся среде. Если среда имеет скорость U в направлении оси x_1 и если a_0 — скорость распространения в покоящейся среде, то

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{a_0^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^2 \varphi.$$

(Символ s зарезервирован для нормальной скорости волнового фронта, которая не равна a_0). Уравнение эйконала имеет вид

$$\sigma_{x_i}^2 = \frac{1}{a_0^2} (1 - U \sigma_{x_1})^2, \quad (7.82)$$

и мы полагаем

$$H = \frac{1}{2} \{ p_i^2 - a_0^{-2} (1 - U p_1)^2 \}.$$

Направление луча определяется соотношениями

$$\frac{dx_1}{d\lambda} = \frac{iU}{a_0^2} + \left(1 - \frac{U^2}{a_0^2} \right) p_1, \quad \frac{dx_2}{d\lambda} = p_2, \quad \frac{dx_3}{d\lambda} = p_3.$$

Оно, очевидно, не совпадает с направлением нормали $\mathbf{p}$ к волновому фронту. Для точечного источника волновой фронт является,

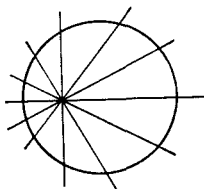


Рис. 7.12. Волновой фронт и лучи для акустического импульса в движущейся среде.

очевидно, сферой радиуса $a_0 t$, снесенной вниз по течению на расстояние Ut . Лучи показаны на рис. 7.12.

То, что лучи не ортогональны волновому фронту, несомненно, сначала кажется удивительным. Интуитивное представление, что волновой фронт движется по нормальям, естественно, и как следствие можно ожидать, что ортогональные траектории играют в геометрии движения основную роль. Но это совсем не так. Дело в том, что лучи связаны с распространением энергии, и ни скорость, ни направление их не обязаны совпадать с нормальной скоростью волнового фронта. Это первое проявление в ограниченной форме важного различия между фазовой скоростью и групповой скоростью. В общем виде это различие будет обсуждаться в гл. 11, и более подробное изучение лежащих в его основе понятий мы пока отложим.

Вернемся к общему случаю системы (7.81). Поскольку величины p_i постоянны, уравнения интегрируются. Рассмотрим случай точечного источника, расположенного в начале координат. Пусть s — расстояние от источника; тогда решение системы (7.81) имеет вид

$$x_i = l_i s, \quad \sigma = p_i l_i s, \quad (7.83)$$

где $\mathbf{l}$ — единичный вектор, направленный вдоль луча и имеющий компоненты

$$l_i = \frac{H_{p_i}}{\sqrt{H_{p_j}^2}}. \quad (7.84)$$

Семейство лучей получается варьированием p_i по всем значениям, удовлетворяющим уравнению

$$H(p_1, p_2, p_3) = 0. \quad (7.85)$$

Каждый выбор p_i определяет луч, и в момент времени t волновой фронт $\sigma = t$ находится на расстоянии

$$s = \frac{t}{p_i l_i} \quad (7.86)$$

вдоль луча. Координаты соответствующей точки волнового фронта равны

$$x_i = \frac{l_i}{p_j l_j} t; \quad (7.87)$$

изменяя параметры p_1, p_2, p_3 , удовлетворяющие уравнению (7.85), получаем весь волновой фронт.

Подставляя в (7.63) приведенную форму $S = t - \sigma(\mathbf{x})$, получаем для нормальной скорости волнового фронта следующее выражение:

$$c = \frac{1}{|\nabla \sigma|} = \frac{1}{p}.$$

В силу этого, единичная нормаль к волновому фронту имеет компоненты

$$n_i = c p_i,$$

и угол μ между вектором $\mathbf{l}$ и нормалью определяется уравнением

$$\cos \mu = l_j n_j = c l_j p_j.$$

Поэтому (7.86) можно переписать как

$$s = \frac{c}{\cos \mu} t. \quad (7.88)$$

Волновой фронт движется вдоль луча с увеличенной скоростью $c/\cos \mu$, а его скорость вдоль нормали равна c . Иногда в качестве параметров удобнее использовать не p_1, p_2, p_3 , а $c = 1/p$ и единич-

ную нормаль $n_i = c p_i$. Тогда уравнение эйконала (7.85) определяет s как функцию от $\mathbf{p}$. Эта функция $s(\mathbf{p})$ описывает анизотропную среду и геометрию лучей и полностью определяет волновой фронт. Такое описание особенно удобно для плоских и осесимметричных задач. Мы описываем эти случаи в переменных (x_1, x_2) , причем в осесимметричном случае переменная x_2 является расстоянием от оси симметрии.

Плоские и осесимметричные задачи

Пусть нормаль $\mathbf{n}$ образует угол ψ с осью x_1 ; тогда уравнение эйконала определяет скорость распространения в виде $s = s(\psi)$. Чтобы описать лучи и волновой фронт в терминах $s(\psi)$, необходимо найти выражение для направленного вдоль луча единичного

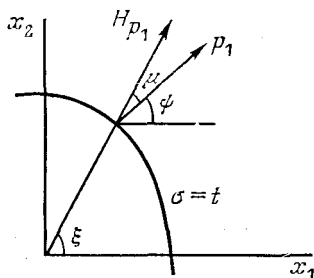


Рис. 7.13. Геометрия волнового фронта, лучей и нормалей в анизотропной среде.

вектора $\mathbf{l}$ как функции от $s(\psi)$. Оказывается, что удобнее всего найти угол μ между вектором $\mathbf{l}$ и нормалью $\mathbf{n}$ (см. рис. 7.13). Поскольку $\mathbf{l}$ имеет направление $\partial H / \partial \mathbf{p}$ и $\mathbf{n}$ имеет такое же направление, что и $\mathbf{p}$, этот угол можно найти, проведя рассуждения в $\mathbf{p}$ -пространстве. Сначала представим вектор H_{p_i} в $\mathbf{p}$ -пространстве в полярных координатах p и ψ . Он имеет компоненту $\partial H / \partial p$ в направлении $\mathbf{p}$ и компоненту $\partial H / (p \partial \psi)$, перпендикулярную к $\mathbf{p}$. Отсюда

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{1}{p} \frac{\partial H / \partial \psi}{\partial H / \partial p}. \quad (7.89)$$

С помощью функции $s(\psi)$ можно написать эквивалент уравнения эйконала для $H(p, \psi)$:

$$H \equiv p c(\psi) - 1 = 0.$$

Следовательно,

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{c'(\psi)}{c(\psi)}. \quad (7.90)$$

Это основная формула, связывающая направления векторов $\mathbf{l}$ и $\mathbf{n}$.

Лучи определяются равенствами

$$x_1 = s \cos (\mu + \psi) t, \quad x_2 = s \sin (\mu + \psi) t.$$

Волновой фронт (7.88) находится на расстоянии

$$s = \frac{c(\psi) t}{\cos \mu} = t \sqrt{c'^2 + c^2} \quad (7.91)$$

вдоль луча с параметром ψ . Следовательно, в декартовых координатах волновой фронт определяется равенствами

$$x_1 = \frac{c(\psi) t}{\cos \mu} \cos (\mu + \psi), \quad x_2 = \frac{c(\psi) t}{\cos \mu} \sin (\mu + \psi).$$

Исключив μ с помощью формулы (7.90), после несложных преобразований получим

$$x_1 = \{c(\psi) \cos \psi - c'(\psi) \sin \psi\} t, \quad (7.92)$$

$$x_2 = \{c(\psi) \sin \psi + c'(\psi) \cos \psi\} t. \quad (7.93)$$

Соответствующая геометрия показана на рис. 7.13.

Формулы (7.92) и (7.93) можно вывести иначе, заметив, что волновой фронт является огибающей элементарных плоских волн

$$x_1 \cos \psi + x_2 \sin \psi = c(\psi) t.$$

Такая огибающая находится совместным решением этого уравнения и уравнения, полученного из него дифференцированием по ψ :

$$-x_1 \sin \psi + x_2 \cos \psi = c'(\psi) t.$$

Решение имеет вид (7.92), (7.93). Этот вывод проще, но он ограничен однородной средой и не выявляет каких-либо свойств лучей. Мы предпочли объединить все случаи одним методом, а именно методом характеристик для уравнения эйконала.

Источник в движущейся среде

Чтобы проиллюстрировать полученные результаты, применим их к уравнению (7.82). При $p_1 = \cos \psi / c$, $p_2 = \sin \psi / c$ уравнение эйконала дает

$$\frac{1}{c^2} = \frac{1}{a_0^2} \left(1 - \frac{U \cos \psi}{c} \right)^2.$$

Следовательно,

$$c(\psi) = U \cos \psi + a_0$$

для уходящей волны. Волновой фронт (7.92)–(7.93) описывается уравнениями

$$x_1 = (U + a_0 \cos \psi) t,$$

$$x_2 = (a_0 \sin \psi) t.$$

Это окружность радиуса $a_0 t$ с центром в точке, смещенной на Ut вниз по течению, как и требуется.

Магнитная газовая динамика

Снова сравнительно безобидные на вид задачи приводят к удивительно сложной геометрии. Интересный пример подобной ситуации возникает в магнитной газовой динамике. В среде с бесконечной проводимостью и однородным магнитным полем, направленным вдоль оси x_1 , возмущения удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial t^4} - (a^2 + b^2) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla^2 \varphi + a^2 b^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \nabla^2 \varphi = 0. \quad (7.94)$$

Уравнение эйконала имеет вид

$$1 - (a^2 + b^2) p^2 + a^2 b^2 p_1^2 p^2 = 0.$$

Полагая $p_1 = \cos \psi / c$, $p = 1/c$, получаем

$$c^4 - (a^2 + b^2) c^2 + a^2 b^2 \cos^2 \psi = 0. \quad (7.95)$$

Существуют два расходящихся волновых фронта (быстрые и медленные волны) в соответствии с увеличением порядка уравнения (7.94).

В данном случае удобно работать в полярных координатах; в силу (7.91), волновой фронт находится на расстоянии

$$s = t \sqrt{c'^2 + c^2} \quad (7.96)$$

вдоль направления

$$\xi(\psi) = \mu(\psi) + \psi, \quad \operatorname{tg} \mu = \frac{c'(\psi)}{c(\psi)}. \quad (7.97)$$

В силу (7.95), производная $c'(\psi)$ удовлетворяет соотношению

$$\{2c^3 - (a^2 + b^2)c\}c' - a^2 b^2 \sin \psi \cos \psi = 0. \quad (7.98)$$

Пусть теперь параметр ψ меняется в интервале $0 \leq \psi \leq \pi/2$, и пусть для определенности $a > b$.

Согласно (7.95)–(7.98), имеем при $\psi \rightarrow 0$ и $\psi \rightarrow \pi/2$ следующие соотношения:

$\psi \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} c &\rightarrow a, \quad b, \\ c' &\rightarrow 0, \quad 0, \\ \mu &\rightarrow 0, \quad 0, \\ \xi &\rightarrow 0, \quad 0, \\ s &\rightarrow at, \quad bt; \end{aligned}$$

$\psi \rightarrow \pi/2$:

$$\begin{aligned} c &\rightarrow \sqrt{a^2 + b^2}, & 0, \\ c' &\rightarrow 0, & -\frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \\ \mu &\rightarrow 0, & -\frac{\pi}{2}, \\ \xi &\rightarrow \frac{\pi}{2}, & 0, \\ s &\rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} t, & \frac{abt}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \end{aligned}$$

Решение, соответствующее первому столбцу, имеет точки A , B на осях x_1 и x_2 и дает искаженный, но представляющий естественный

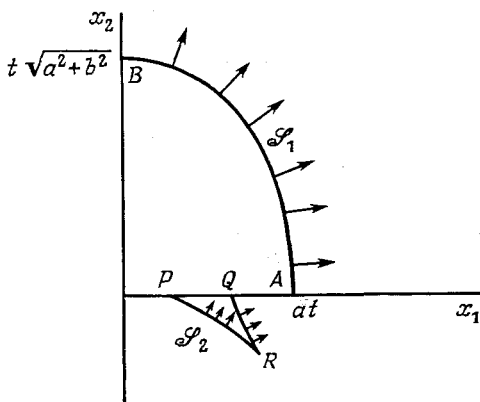


Рис. 7.14. Волновые фронты в магнитной газовой динамике.

венным расходящийся волновой фронт $\mathcal{S}_1$, изображенный на рис. 7.14. Второе решение странное. Для обоих пределов $\psi \rightarrow 0$ и $\psi \rightarrow \pi/2$ имеем $\xi \rightarrow 0$, а s является конечной величиной. Это дает точки P и Q на оси x_1 . В точке P мы имеем $\psi = \pi/2$, так что волновой фронт проходит по касательной к оси; в точке Q мы имеем $\psi = 0$ и волновой фронт перпендикулярен оси. Между $\psi = 0$ и $\pi/2$ должен достигаться максимум или минимум функции ξ . Поскольку $\xi = \mu + \psi$, это происходит при значении ψ , определяемом уравнением

$$\frac{d\mu}{d\psi} + 1 = 0;$$

используя равенство $\operatorname{tg} \mu = c'/c$, это условие можно переписать в виде

$$c''(\psi) + c(\psi) = 0.$$

Можно показать, что волновой фронт имеет в этой точке заострение. Можно показать также, что ξ отрицательно. Таким образом, второй фронт имеет удивительную форму $\mathcal{S}_2$, изображенную на

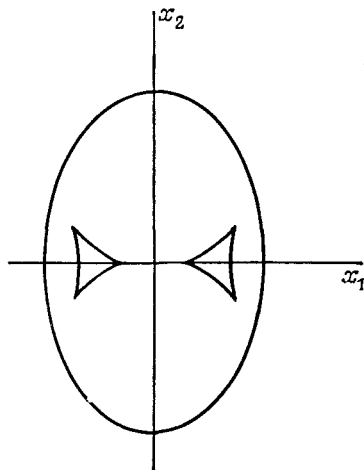


Рис. 7.15. Полные волновые фронты в магнитной газовой динамике.

рис. 7.14. Несмотря на то что при $\psi > 0$ волновой фронт локально движется в положительном направлении оси x_2 , энергия распространяется в отрицательном направлении оси x_2 и как следствие волновой фронт появляется *ниже* оси x_1 . Это удивительный пример различия между скоростью волнового фронта и скоростью вдоль луча, между фазовой скоростью и групповой скоростью.

Полные волновые фронты симметричны относительно осей x_1 и x_2 , и полная их картина изображена на рис. 7.15.

Глава 8

ДИНАМИКА УДАРНЫХ ВОЛН

При обсуждении волнового уравнения было выявлено большинство основных идей линейной теории гиперболических волн в пространствах двух и трех измерений, и теперь мы обратимся к нелинейным эффектам. Для плоских волн в однородной среде оказалось возможным разработать законченную нелинейную теорию. Однако в противоположность линейной теории, которая была почти тривиальной, здесь потребовались глубокие идеи и изощренные методы. Значительные трудности ожидаются в задачах с большим числом измерений или в случае неоднородной среды, где даже линейная теория становится сложной. Цилиндрические и сферические волны все еще описываются двумя независимыми переменными, но возникает некоторое усложнение, поскольку уравнения для них содержат переменные коэффициенты. Аналогичная ситуация имеет место для плоских волн в неоднородной среде.

В общем случае двух- или трехмерного распространения приходится иметь дело с большим числом независимых переменных и геометрия становится еще сложнее; не удивительно поэтому, что приходится прибегать к приближенным методам. В самом деле, единственные точные решения, которые удастся найти, это автомодельные решения для частных задач, и даже в них обычно требуется численное интегрирование приведенных уравнений. Автомодельные решения для цилиндрических и сферических волн и для волн в неоднородной среде были рассмотрены в § 6.16, о других речь пойдет ниже. Наряду с автомодельными решениями приходится использовать приближенные теории или численные методы.

Эта и следующая главы посвящены некоторым приближенным теориям, созданным для изучения распространения ударных волн в таких условиях. Изложение проводится для ударных волн в газах, но идеи и математическую технику можно использовать и для аналогичных задач из других областей.

Наиболее очевидный способ приближения для таких задач состоит в том, что их можно рассматривать как малые возмущения более простых задач с известными решениями. Например, плоскую волну, распространяющуюся в слегка неоднородной среде или вдоль слегка гофрированной стенки, можно рассматривать как возмущение однородного случая. Задача, подобная этой, будет подробно проанализирована ниже, поскольку она оказывается необходимой в иной связи; будут указаны и другие задачи. Но

методы, соответствующие возмущениям такого типа, обычно очевидны, и возникающие математические задачи, хотя зачастую и трудные, уже не связаны с какими-либо новыми аспектами поведения волн. Мы снова не ставим своей задачей развивать чисто математические методы и переносим внимание на приближения, по существу связанные с распространением волн.

Основываясь на интуиции, можно сказать, что трудности в этих задачах обусловлены сочетанием двух эффектов: ударная волна приспособляется к изменению геометрии (или среды) и в то же время вовлекается в сложное нелинейное взаимодействие с течением позади нее. Нелинейные плоские волны свободны от первого, линейные неплоские волны свободны от второго. Если в более общем случае сравнительно просто учесть один из эффектов, так что можно сосредоточить внимание на втором эффекте, то можно надеяться, что удастся развить приближенную теорию.

Эта глава посвящена задачам, в которых основную роль играют нелинейные геометрические эффекты и взаимодействие с течением позади ударной волны не приводит к существенным изменениям в ее движении. «Динамика ударных волн», — по-видимому, подходящее название, поскольку движение ударной волны решающим образом действует на течение всей жидкости. В следующей главе мы рассмотрим задачи, для которых справедливо скорее обратное. Это задачи о слабых ударных волнах, и основная идея заключается в том, что для слабых ударных волн геометрические эффекты, хотя и важные, можно без изменения заимствовать из линейной теории. Тогда нелинейный анализ состоит во введении в рамках этой геометрии основных эффектов нелинейного взаимодействия с течением.

В обоих случаях приближения проводятся на интуитивном уровне и основаны на включении известных эффектов в математическое описание. Обоснование достигается проверками на частных случаях, которые допускают точное решение, и сравнением с наблюдениями. Эти задачи слишком трудны для обычных приближенных методов.

При изучении динамики ударных волн описание будет основано на картине, даваемой геометрической оптикой. При этом геометрия течения описывается в терминах волновых фронтов, распространяющихся по трубкам лучей, причем для *изотропной* среды лучи являются ортогональными траекториями последовательных положений волнового фронта. Для ударной волны, распространяющейся по неподвижному газу, среда изотропна. Поэтому по аналогии мы введем лучи, ортогональные последовательным положениям ударной волны, и выясним, как элемент ударной волны распространяется по трубке лучей.

В то же время между ударной волной и линейным волновым фронтом существует принципиальное различие. Скорость ударной

волны в данной точке зависит от ее интенсивности, так что геометрию нельзя задать заранее независимо от определения интенсивности волны. Оба вопроса связаны между собой, и геометрия трубки лучей должна определяться одновременно с определением интенсивности волны по площади трубки лучей. Уравнения, соответствующие уравнениям (7.60) и (7.61), связаны между собой так, как если бы в уравнении (7.60) скорость c зависела от Φ_0 . Приходится снова проанализировать весь этот вопрос.

Краеугольным камнем этой теории является распространение волн по *заданной* трубке с произвольным поперечным сечением, и это распространение нам необходимо изучить. Оно интересно само по себе, и, конечно, распространение в клинообразном канале идентично цилиндрическим волнам, а распространение в конусе идентично сферическим волнам, так что мы имеем возможности для изучения в дальнейшем и этих задач. Распространение плоской волны в неоднородной среде происходит аналогично, и некоторые его детали также включены в рассмотрение.

8.1. Распространение ударной волны по неоднородной трубе

Рассмотрим одномерное (гидравлическое) описание течения по трубе с заданной площадью поперечного сечения $A(x)$. Даже в однородной трубе ударная волна может изменяться сложным образом вследствие взаимодействия с течением позади нее, как описано в задаче о поршне в § 6.8 и 6.11. Но мы заинтересованы в возможно более полном выделении эффектов, связанных с непостоянством величины $A(x)$, и фактически хотим рассмотреть самый простой вариант задачи о поршне. Точнее, мы хотим сформулировать задачу таким образом, чтобы в случае $A(x) = \text{const}$ ударная волна имела постоянную скорость. Для этого предположим, что

$$A(x) = A_0 = \text{const} \quad \text{при } x < 0$$

и что ударная волна первоначально движется по этой части трубы с постоянным числом Маха M_0 . Можно считать, что ударная волна образована поршнем, движущимся с подходящей *постоянной* скоростью далеко сзади в однородной части трубы. Поршень все еще создает напор, поддерживающий движение ударной волны, но это *не приводит ни к каким изменениям*; изменения полностью связаны с изменением площади поперечного сечения. Задача тогда состоит в том, чтобы найти зависимость числа Маха ударной волны от $A(x)$ при $x > 0$.

Течение, строго говоря, не одномерно, но если площадь поперечного сечения меняется не слишком быстро, то уравнения,

получаемые усреднением по сечению трубы, будут давать хорошее приближение. Эти уравнения таковы:

$$\rho_t + u\rho_x + \rho u_x + \rho u \frac{A'(x)}{A(x)} = 0, \quad (8.1)$$

$$u_t + uu_x + \frac{1}{\rho} p_x = 0, \quad (8.2)$$

$$p_t + up_x - a^2(\rho_t + u\rho_x) = 0. \quad (8.3)$$

Изменение площади фигурирует только в уравнении неразрывности (8.1), а это уравнение немедленно следует из закона сохранения массы в виде

$$(\rho A)_t + (\rho u A)_x = 0. \quad (8.4)$$

Заметим, что для распространения волны внутрь клина с вершиной в точке x_0

$$A(x) \propto (x_0 - x), \quad \frac{A'(x)}{A(x)} = \frac{-1}{x_0 - x}, \quad (8.5)$$

а внутрь конуса

$$A(x) \propto (x_0 - x)^2, \quad \frac{A'(x)}{A(x)} = \frac{-2}{(x_0 - x)}. \quad (8.6)$$

Если положить $r = (x_0 - x)$ и придать противоположный знак скорости u (чтобы она была направлена в сторону возрастания r),

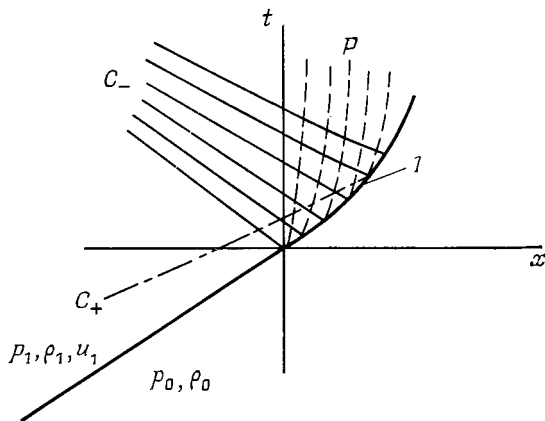


Рис. 8.1. (x, t) -диаграмма для ударной волны, входящей в неоднородную область. I — ударная волна.

то эти уравнения совпадут с уравнениями (6.132) — (6.134) для цилиндрических и сферических волн и в этом случае они будут точными. Последнее указывает, что истинный критерий справедливости одномерной формулировки фактически состоит в том,

что кривизна стенок в x -направлении должна быть малой. Но вопрос о случаях, когда эта теория точна, по-видимому, не был изучен до конца.

На рис. 8.1 приведена (x, t) -диаграмма рассматриваемой задачи, причем за начало отсчета времени t взят момент, когда исходная ударная волна приходит в точку $x = 0$. При $t < 0$ течение состоит из однородных областей, разделенных движущейся ударной волной. Положим $u = 0$, $p = p_0$, $\rho = \rho_0$ для невозмущенного состояния перед ударной волной и $u = u_1$, $p = p_1$, $\rho = \rho_1$ для исходного однородного состояния за ней. Величины u_1 , p_1 , ρ_1 выражаются через p_0 , ρ_0 , M_0 при помощи условий на разрыве.

Когда ударная волна достигает точки $x = 0$, возмущения этого состояния распространяются по траекториям частиц P и отрицательным характеристикам C_- . Кривые C_- могут иметь положительные или отрицательные наклоны в зависимости от того, какое из неравенств ($u_1 > a_1$ или $u_1 < a_1$) выполняется; последний случай изображен на рис. 8.1. Задача состоит в том, чтобы из уравнений (8.1)–(8.3) определить эти возмущения, а также изменения положения ударной волны и ее интенсивности. Условия на разрыве имеют вид

$$u = a_0 \frac{2}{\gamma + 1} \left(M - \frac{1}{M} \right), \quad (8.7)$$

$$p = \rho_0 a_0^2 \left\{ \frac{2}{\gamma + 1} M^2 - \frac{\gamma - 1}{\gamma(\gamma + 1)} \right\}, \quad (8.8)$$

$$\rho = \rho_0 \frac{(\gamma + 1) M^2}{(\gamma - 1) M^2 + 2}; \quad (8.9)$$

кроме того, в случае необходимости можно использовать формулу для скорости звука: $a^2 = \gamma p / \rho$.

Случай малых возмущений

В одномерной формулировке не требуется малости изменений самой функции $A(x)$, поскольку для достаточно больших расстояний могут иметь место большие изменения даже в том случае, когда производные от $A(x)$ будут оставаться малыми. Однако, в случае когда отклонение $A(x)$ от A_0 остается малым,

$$\frac{A(x) - A_0}{A_0} \ll 1,$$

можно предположить, что возмущения состояния u_1 , p_1 , ρ_1 за ударной волной и изменение числа Маха ударной волны соответственно малы. Тогда можно искать решение задачи, используя его близость к решению для однородной трубы. Уравнения (8.1)–(8.3) и условия на разрыве (8.7)–(8.9) линеаризуются около состояния u_1 , p_1 , ρ_1 . Однако следует отметить, что величины

$p_1 - p_0, \dots$ не предполагаются малыми; ударная волна может иметь произвольную интенсивность.

Линеаризованные уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \rho_t + u_1 \rho_x + \rho_1 u_x + \frac{\rho_1 u_1 A'(x)}{A_0} &= 0, \\ u_t + u_1 u_x + \frac{1}{\rho_1} p_x &= 0, \\ p_t + u_1 p_x - a_1^2 (\rho_t + u_1 \rho_x) &= 0; \end{aligned} \quad (8.10)$$

при этом для сокращения записи мы подразумеваем, что ρ_t интерпретируется как $(\rho - \rho_1)_t$, $A'(x)$ как $\{A(x) - A_0\}'$ и т. д. Поскольку это линейные уравнения с постоянными коэффициентами, общее решение находится без труда, причем удобнее перейти к уравнениям в характеристической форме. Характеристические уравнения для (8.10) записываются так:

$$C_+: \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + (u_1 + a_1) \frac{\partial}{\partial x} \right\} (p + \rho_1 a_1 u) + \rho_1 a_1^2 u_1 \frac{A'(x)}{A_0} = 0, \quad (8.11)$$

$$C_-: \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + (u_1 - a_1) \frac{\partial}{\partial x} \right\} (p - \rho_1 a_1 u) + \rho_1 a_1^2 u_1 \frac{A'(x)}{A_0} = 0, \quad (8.12)$$

$$P: \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + u_1 \frac{\partial}{\partial x} \right\} (p - a_1^2 \rho) = 0; \quad (8.13)$$

решив каждое из них по отдельности, получим

$$(p - p_1) + \rho_1 a_1 (u - u_1) = -\frac{\rho_1 a_1^2 u_1}{u_1 + a_1} \cdot \frac{A(x) - A_0}{A_0} + F \{x - (u_1 + a_1)t\}, \quad (8.14)$$

$$(p - p_1) - \rho_1 a_1 (u - u_1) = -\frac{\rho_1 a_1^2 u_1}{u_1 - a_1} \cdot \frac{A(x) - A_0}{A_0} + G \{x - (u_1 - a_1)t\}, \quad (8.15)$$

$$(p - p_1) - a_1^2 (\rho - \rho_1) = H(x - u_1 t), \quad (8.16)$$

где F , G и H — произвольные функции. Благодаря постоянству коэффициентов в линеаризованной форме мы смогли провести интегрирования для трех семейств характеристик в явном виде, причем характеристики были аппроксимированы прямыми $x - (u_1 \pm a_1)t = \text{const}$, $x - u_1 t = \text{const}$. Три произвольные функции определяются начальными условиями задачи и граничными условиями на ударной волне.

Первое и решающее условие состоит в том, что F должна быть тождественно равна нулю. Это следует из того, что все характеристики C_+ за ударной волной, т. е. прямые $x - (u_1 + a_1)t < 0$, начинаются в однородной области, где $u = u_1$, $p = p_1$, $\rho = \rho_1$, $A = A_0$ (см. рис. 8.1); отсюда, согласно (8.14), $F = 0$. Именно на этом шаге исключаются возмущения, приходящие из области за

ударной волной. Следует подчеркнуть, что в рамках принятого метода утверждение $F = 0$ строго выводится из формулировки начальных условий и не нуждается в интуитивном обосновании.

Две другие функции G и H отличны от нуля; они описывают возмущения на характеристиках C_- и траекториях частиц P , изображенных на рис. 8.1. Эти кривые начинаются на возмущенной ударной волне, и *трех* условий на разрыве достаточно для определения G , H и изменения числа Маха (по которому можно найти и изменение положения ударной волны). Функции G и H представляют второстепенный интерес. Основной нужный нам результат — изменение числа Маха, и его можно найти, не затрагивая G и H . Условия на разрыве выражают возмущения $p - p_1$, $u - u_1$ на ударной волне через изменение числа Маха $M - M_0$. В силу (8.7) и (8.8), имеем

$$\begin{aligned} p - p_1 &= \frac{4\rho_0 a_0^2}{\gamma + 1} M_0 (M - M_0), \\ u - u_1 &= \frac{2}{\gamma + 1} a_0 \left(1 + \frac{1}{M_0^2} \right) (M - M_0). \end{aligned} \quad (8.17)$$

Подставив эти выражения в формулу (8.14) с $F = 0$, получим

$$\left\{ \frac{4}{\gamma + 1} M_0 + \frac{2}{\gamma + 1} \left(1 + \frac{1}{M_0^2} \right) \frac{\rho_1 a_1}{\rho_0 a_0} \right\} (M - M_0) = - \frac{\rho_1 a_1^2}{\rho_0 a_0^2} \frac{u_1}{u_1 + a_1} \frac{A - A_0}{A_0}. \quad (8.18)$$

Выражения для u_1 , ρ_1 , a_1 через M_0 находим из условий (8.7)–(8.9) с $M = M_0$. Тогда после некоторых алгебраических преобразований равенство (8.18) записывается в виде

$$\frac{A - A_0}{A_0} = -g(M_0)(M - M_0), \quad (8.19)$$

где

$$g(M) = \frac{M}{M^2 - 1} \left(1 + \frac{2}{\gamma + 1} \frac{1 - \mu^2}{\mu} \right) \left(1 + 2\mu + \frac{1}{M^2} \right), \quad (8.20)$$

$$\mu^2 = \frac{(\gamma - 1)M^2 + 2}{2\gamma M^2 - (\gamma - 1)}. \quad (8.21)$$

Величина μ фактически является числом Маха ударной волны относительно течения за ней.

При необходимости выражения для G и H можно найти, рассмотрев соотношения (8.15) и (8.16) на ударной волне; в теории малых возмущений корректно при этом принять, что условия (8.7)–(8.9) удовлетворяются на фронте невозмущенной ударной волны $x = a_0 M_0 t$, поскольку ошибки будут малыми второго порядка. Детали можно найти в статье Честера [1], где впервые были получены эти результаты.

Интересно, что в равенстве (8.15) член, содержащий $A(x)$, меняет знак при $u_1 = a_1$ и приводит к особенности при $u_1 = a_1$. Тем не менее в равенстве (8.19) не обнаруживается ни изменения знака, ни какой-либо особенности. Фридман [1] исследовал случай $u_1 = a_1$, который соответствует в точности звуковому течению за ударной волной. Он показал, что для того, чтобы получить регулярное решение, в возмущения на характеристике C_- следует включить малые нелинейные эффекты, но при этом равенство (8.19) не изменится.

Прежде чем подробно обсуждать соотношение (8.19), перейдем к важному обобщению.

Конечные изменения площади; правило характеристик

Пусть площадь $A(x)$ сечения трубы меняется медленно, но труба настолько длинна, что при этом накапливаются большие изменения этой площади; тогда трубу можно рассматривать как последовательность коротких отрезков, на каждом из которых изменение A мало. На каждом таком отрезке трубы можно провести линеаризацию около локальных условий и применить теорию малых возмущений, как в (8.14)—(8.16). Но, строго говоря, уже нельзя полагать $F = 0$, поскольку условия на входе каждого из этих отрезков уже не будут отвечать однородному состоянию.

После ряда последовательных шагов соответствующие ошибки могут накапливаться. Однако если этим пренебречь, то равенство (8.19) будет применимо к каждому отрезку с A_0 и M_0 , равными площади и числу Маха на входе в рассматриваемый отрезок трубы. Но тогда теория чрезвычайно проста. Фактически мы утверждаем, что (8.19) представляет собой дифференциальную форму функционального соотношения $M = M(A)$:

$$\frac{1}{A} \frac{dA}{dM} = -g(M), \quad (8.22)$$

и вообще нет необходимости проводить разбиение на малые отрезки! Далее, само соотношение (8.19) всего лишь результат подстановки условий на разрыве в характеристическое соотношение на характеристиках C_+ . Таким образом, весь вывод можно сформулировать в виде следующего правила характеристик:

Выписать точное нелинейное дифференциальное соотношение для характеристик C_+ . Вместо p , ρ , u , a подставить их выражения через M из условий на разрыве. Полученное дифференциальное уравнение определяет зависимость M от x .

Хотя мы уже имеем все необходимые результаты, выполним эти предписания, чтобы продемонстрировать их простоту. Основные уравнения, описывающие данную задачу, — это уравнения

(8.1) — (8.3). Уравнение вдоль характеристик C_+ имеет вид

$$\frac{dp}{dx} + \rho a \frac{du}{dx} + \frac{\rho a^2 u}{u+a} \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} = 0. \quad (8.23)$$

Условия на разрыве определяются равенствами (8.7) — (8.9). Подставив их, получим

$$g(M) \frac{dM}{dx} + \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} = 0, \quad (8.24)$$

где функция $g(M)$ задана формулой (8.20). Уравнение (8.24) удобнее переписать в виде

$$\frac{M}{M^2-1} \lambda(M) \frac{dM}{dx} + \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} = 0, \quad (8.25)$$

где

$$\lambda(M) = \left(1 + \frac{2}{\gamma+1} \frac{1-\mu^2}{\mu}\right) \left(1 + 2\mu + \frac{1}{M^2}\right), \quad (8.26)$$

$$\mu^2 = \frac{(\gamma-1)M^2+2}{2\gamma M^2-(\gamma-1)}. \quad (8.27)$$

Причина такого выбора состоит в том, что $\lambda(M)$ очень слабо зависит от числа Маха. Предельные значения равны

$$M \rightarrow 1, \quad \lambda \rightarrow 4, \quad (8.28)$$

$$M \rightarrow \infty, \quad \lambda \rightarrow n = 1 + \frac{2}{\gamma} + \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} = 5,0743 \quad \text{для } \gamma = 1,4. \quad (8.29)$$

Формула (8.25) впервые была получена Чизнеллом [2] при помощи другого подхода. Функция $A(x)$ аппроксимировалась последовательностью разрывных ступенек, и решение строилось с помощью анализа элементарного взаимодействия ударной волны с каждым из разрывов. При каждом взаимодействии ударная волна проходит ступеньку с измененной интенсивностью и возмущения отражаются (возмущения на кривых C_- и P в нашем подходе). Но отраженные возмущения повторно отражаются, когда они достигают предыдущих ступенек; эти повторно отраженные волны накладываются на ударную волну и дают вклад в последующие взаимодействия. Если пренебречь всеми повторно отраженными волнами, то получится уравнение (8.25).

Чизнелл проанализировал эффект всех один раз повторно отраженных возмущений и обнаружил, что их *суммарный* вклад в уравнение (8.25) гораздо меньше, чем вклады, вносимое отдельными возмущениями. Еще до этого Мёкель [1] применил аналогичные идеи к стационарным косым ударным волнам в неоднородном сверхзвуковом потоке. Неоднородный поток заменялся слоями, разделенными поверхностями разрыва; в каждом слое параметры течения были постоянными. Решение строилось по элементарным взаимодействиям на разделяющих слой поверхностях.

Хотя подход Мёкеля — Чизнелла в принципе содержит возможность последовательного улучшения путем учета многократно отраженных волн все более высокой кратности, не представляется целесообразным идти далее учета один раз повторно отраженных волн. Трудно также оценить степень приближения, с которым были решены уравнения (8.1) — (8.3). Однако сравнительно малые изменения, вносимые один раз повторно отраженными волнами, указывают, что соотношение (8.25) может оказаться неожиданно хорошим. Это, как мы увидим ниже, действительно имеет место.

Когда быстрый вывод соотношения (8.25) из правила характеристик пришел мне на ум, я надеялся, что и полный анализ этого приближения можно будет провести на основе уравнений (8.1) — (8.3). До сих пор это не сделано! Для того чтобы показать, в чем здесь трудность, заметим, что характеристическое уравнение (8.23) можно записать так:

$$\frac{p_t}{u+a} + p_x + \rho a \left(\frac{u_t}{u+a} + u_x \right) + \frac{\rho a^2 u}{u+a} \frac{A'(x)}{A(x)} = 0. \quad (8.30)$$

Это точное уравнение, справедливое во всем течении, поскольку оно является просто комбинацией основных уравнений (8.1) — (8.3). Если к ударной волне, движущейся со скоростью U , применить равенство (8.23), то можно утверждать, что соотношение

$$\frac{p_t}{U} + p_x + \rho a \left(\frac{u_t}{U} + u_x \right) + \frac{\rho a^2 u}{u+a} \frac{A'(x)}{A(x)} = 0 \quad (8.31)$$

будет хорошим приближением на ударной волне. Объединяя уравнения (8.30) и (8.31), видим, что это приближение основано на предположении об относительной малости выражения

$$\left(\frac{1}{U} - \frac{1}{u+a} \right) (p_t + \rho a u_t) \quad (8.32)$$

на ударной волне, т. е. о малости этого выражения по сравнению с p_t/U . Малость первого сомножителя будет соответствовать предположению, что характеристика C_+ на рис. 8.1 лежит достаточно близко к ударной волне, так что мы всего лишь переносим соотношение, справедливое на C_+ , на ударную волну. Однако, хотя величина $(u+a-U)/U$ равна нулю при $M=1$, она стремится к 0,274 (для $\gamma=1,4$) при $M \rightarrow \infty$. Результаты, полученные при помощи правила характеристик, иногда оказываются в сотню раз точнее! В случае цилиндрического или сферического сходящегося взрыва (см. ниже) относительная ошибка составляет около 0,003. Таким образом, хотя первый сомножитель может мало способствовать точности, правило работает хорошо, поскольку величина

$$\frac{p_t + \rho a u_t}{p_t} \quad (8.33)$$

чрезвычайно мала на ударной волне. Хотя в исходной статье (Уизем [7]) были приведены дальнейшие доводы, вполне удовлетворительного объяснения этого факта не было найдено. Конечно, мы знаем, что этот результат верен в теории малых возмущений, и при помощи уравнения (8.14) $\dot{c}F = 0$ можем проверить, что

$$p_t + \rho_1 a_1 u_t = 0$$

в этой теории.

Точность уравнения (8.25), лишь частично обоснованная случаем малых возмущений и анализом Мёкеля — Чизнелла, была подтверждена сравнением с известными решениями. Прежде всего для слабых ударных волн $M \simeq 1$ и $\lambda \simeq 4$, откуда

$$M - 1 \propto A^{-1/2}. \quad (8.34)$$

Это согласуется с результатами геометрической акустики для слабых импульсов, когда $M - 1$ пропорционально импульсу. Далее, уравнение (8.25) можно применить к сходящимся цилиндрическим или сферическим ударным волнам, положив $A \propto x_0 - x$ или $(x_0 - x)^2$ соответственно, и сравнить полученные результаты с точными автомодельными решениями Гудерлея, описанными в § 6.16. Для бесконечно сильных ударных волн λ стремится к значению n , определяемому соотношением (8.29), и уравнение (8.25) принимает вид

$$\frac{n}{M} \frac{dM}{dx} + \frac{1}{A} \frac{dA}{dx} = 0, \quad M \propto A^{-1/n}. \quad (8.35)$$

Следовательно, правило характеристик дает

$$\begin{aligned} M &\propto r^{-1/n} && \text{для цилиндрических ударных волн,} \\ M &\propto r^{-2/n} && \text{для сферических ударных волн.} \end{aligned} \quad (8.36)$$

Сравнение с показателями точных автомодельных решений проведено в табл. 8.1. Точность удивительная, учитывая простоту приближенной теории. Кроме всего прочего, она показывает, что сходящиеся ударные волны реагируют прежде всего на изменяю-

Таблица 8.1

γ	Цилиндрическая волна		Сферическая волна	
	Приближенно	Точно	Приближенно	Точно
6/5	0,163112	0,161220	0,326223	0,320752
7/5	0,197070	0,197294	0,394142	0,394364
5/3	0,225425	0,226054	0,450850	0,452692

щуюся геометрию, как и предполагается в приближенной теории, а дальнейшие возмущения от источника влияют на них очень мало; интенсивность исходной ударной волны входит только в коэффициент пропорциональности в соотношениях (8.36). Это не имеет места для расходящихся ударных волн. Они будут замедляться за счет расширения, и продолжающееся взаимодействие с течением на большом расстоянии позади будет играть важную роль; рассматриваемая приближенная теория *не* годится для таких задач.

Другой интересный момент состоит в том, что, согласно приближенной теории, показатель для сферического случая в точности равен удвоенному показателю для цилиндрического случая. Такое равенство неверно, однако, для точного автомодельного решения, хотя отклонения от него чрезвычайно малы.

С упомянутым выше частичным обоснованием и этими независимыми проверками мы заключаем, что в задачах такого типа правило характеристик дает хорошее простое приближение и его можно уверенно использовать для широкого круга задач.

Для произвольного M решение уравнения (8.25) можно записать так:

$$\frac{A}{A_0} = \frac{f(M)}{f(M_0)}, \quad f(M) = \exp \left\{ - \int \frac{M \lambda(M)}{M^2 - 1} dM \right\}. \quad (8.37)$$

В частности, эту формулу можно использовать для распространения результатов для сходящихся цилиндрических и сферических ударных волн и включить в рассмотрение ударные волны умеренной интенсивности. Конечно, при приближении к центру $A \rightarrow 0$ и $M \rightarrow \infty$. Значения функции $f(M)$ для $\gamma = 1,4$ будут приведены в табл. 8.3 (см. стр. 278).

В следующем параграфе правило характеристик используется для задачи об ударной волне, распространяющейся в слое с неоднородной плотностью; дальнейшие же примеры можно найти в исходной работе (Уизем [71]). Это правило будет также основой для геометрического подхода к двух- и трехмерным задачам о распространении ударных волн в § 8.3.

8.2. Распространение ударной волны в стратифицированном слое

Применим теперь этот метод к одномерной задаче о плоской ударной волне, движущейся в x -направлении в данной среде с равновесным распределением $u = 0$, $p = p_0(x)$, $\rho = \rho_0(x)$. Если давление $p_0(x)$ непостоянно, то в данной среде должны действовать массовые силы, соответствующие градиентам давления, и их надо

включить в уравнения. Одномерные уравнения имеют вид

$$\begin{aligned}\rho_t + u\rho_x + \rho u_x &= 0, \\ u_t + uu_x + \frac{1}{\rho} p_x &= \mathcal{F} \\ p_t + up_x - a^2 (\rho_t + u\rho_x) &= 0,\end{aligned}\tag{8.38}$$

где $\mathcal{F}$ — массовая сила, отнесенная к единице массы. Для атмосферы Земли или для внешних слоев звезд $\mathcal{F}$ будет гравитационным ускорением. В равновесном состоянии функции $\rho_0(x)$ и $p_0(x)$ должны удовлетворять уравнению

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{dp_0}{dx} = \mathcal{F},\tag{8.39}$$

и для полного определения $\rho_0(x)$ и $p_0(x)$ следует задать еще распределение энтропии. В атмосфере $\mathcal{F} = -g$ и, например, имеем

$$\begin{aligned}\rho_0(x) &= \rho_0(0) e^{-gx/\mathcal{R}T_0} \quad (\text{изотермическое состояние}), \\ \frac{\gamma}{\gamma-1} \rho_0^{\gamma-1}(x) &= c - gx \quad (\text{изэнтропическое состояние})\end{aligned}$$

согласно результатам § 6.6.

Применим теперь правило характеристик к распространению ударной волны в таком слое, помня, что это правило применимо только для локальных эффектов стратификации и должно использоваться лишь тогда, когда дополнительные эффекты малы. Соответствующее характеристическое соотношение можно записать в следующей дифференциальной форме:

$$dp + \rho a du - \frac{\rho a}{u+a} \mathcal{F} dx = 0 \quad \text{на} \quad \frac{dx}{dt} = u + a.$$

Но мы применим его на ударной волне. Это значит, что мы используем дифференциальное уравнение

$$\frac{dp}{dx} + \rho a \frac{du}{dx} - \frac{\rho a}{u+a} \mathcal{F} = 0\tag{8.40}$$

с величинами u , ρ , p , a , выраженными через $p_0(x)$, $\rho_0(x)$ и число Маха ударной волны $M(x)$. В общем случае требуется численное интегрирование, но для сильных ударных волн можно получить аналитическое выражение. Для сильных ударных волн (см. (6.110)) условия на разрыве упрощаются:

$$\begin{aligned}u &= \frac{2}{\gamma+1} U, \quad p = \frac{2}{\gamma+1} \rho_0 U^2, \quad \rho = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \rho_0, \\ a^2 &= \frac{\gamma p}{\rho} = \frac{2\gamma(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2} U^2,\end{aligned}$$

где U — скорость ударной волны. В этом пределе скорость U сравнительно велика и третий член в (8.40) пренебрежимо мал по сравнению с остальными двумя. Массовая сила $\mathcal{F}$ входит неявно, определяя зависимость $\rho_0(x)$, и уравнение (8.40) сводится к виду

$$\frac{1}{U} \frac{dU}{dx} + \beta \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dx} = 0,$$

где

$$\beta = \left(2 + \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} \right)^{-1}. \quad (8.41)$$

Отсюда

$$U \propto \rho_0^{-\beta}, \quad p \propto \rho_0^{1-2\beta}. \quad (8.42)$$

При $\gamma = 1,4$ мы имеем $\beta = 0,21525$.

Эти результаты позволяют провести еще одну проверку с точным решением. Сакураи [1] исследовал автомодельные решения этой задачи в случае, когда $\rho_0 \propto x^\alpha$. Он обнаружил, что в этом случае $U \propto x^{-\lambda}$, и нашел величину λ для различных значений α . Его значения отношения λ/α приведены в табл. 8.2 и сравниваются с β . Хотя приближение и не столь хорошо, как для задачи о сходящейся ударной волне, оно все еще остается удивительно точным.

Таблица 8.2

γ	$\alpha = 2$	$\alpha = 1$	$\alpha = 1/2$	β
5/3	0,21779	0,22335	0,22820	0,23608
7/5	0,19667	0,20214	0,20704	0,21525
6/5	0,16545	0,17040	0,17498	0,18301

Следует все время помнить, что мы ограничиваемся кругом задач со значительными *локальными* изменениями ударной волны. Для экспоненциального убывания плотности также можно найти автомодельные решения и сравнить их с нашим приближением. Сравнение было проделано Хейзом [1], и разность показателей достигает 15%. Мы относим это за счет того, что экспоненциальное изменение плотности не связано с такими сильными локальными эффектами, как степенной закон с $\rho_0 \rightarrow 0$ для конечного значения x .

Задачу, рассматриваемую в этом параграфе, первым изучал Чизнелл [1]. Он использовал подход последовательных взаимодействий и в случае $\rho_0 = \text{const}$, $\mathcal{F} = 0$ нашел малые поправки за счет однократных повторных отражений. Как и прежде, было обнаружено благоприятное взаимное погашение вкладов.

8.3. «Геометрическая динамика» ударной волны

Обратимся теперь к развитию приближенной геометрической теории распространения ударных волн в двух- и трехмерных задачах при отсутствии специальной симметрии (Уизем [6, 9]). Рассмотрим ударную волну, распространяющуюся в однородном неподвижном газе, и, опираясь на результаты геометрической оптики для линейных задач, введем «лучи», определяемые как ортогональные траектории последовательных положений ударной волны.

В качестве частного примера рассмотрим дифракцию ударной волны на закругленном угле, изображенную на рис. 8.2. Положения ударной волны показаны сплошными кривыми, а лучи — штриховыми. Идея состоит в том, чтобы рассматривать распространение каждого элемента ударной волны по каждой элементарной трубке лучей как задачу о распространении ударной волны по трубе с твердыми стенками.

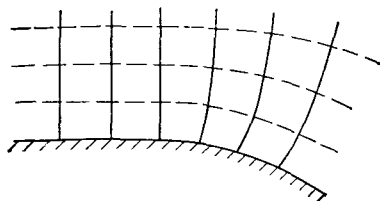


Рис. 8.2. Положения ударной волны (сплошные кривые) и лучей (штриховые кривые) при дифракции ударной волны на закругленном угле.

Эквивалентность была бы полной, если бы лучи были траекториями частиц, поскольку твердые стенки являются траекториями частиц для невязкого течения. Однако это верно только приближенно. В силу условий на разрыве, возмущенное течение непосредственно за ударной волной должно быть нормальным к ней, но по мере удаления от ударной волны траектории частиц в общем случае отклоняются от лучей. Таким образом, здесь используется определенное приближение, причем оно может быть довольно грубым. Однако только таким или каким-либо подобным способом геометрические эффекты можно выделить из полной сложной картины течения. В задаче о дифракции на угле (рис. 8.2) сама стенка на всей своей протяженности является как лучом, так и траекторией частицы; поэтому возникает некоторое дополнительное препятствие отклонению луча от траектории частицы позади ударной волны.

Точность приближения такого типа трудно оценить заранее, а приближения высших порядков практически невозможны. Как

оправдание мы покажем, что эта теория сводится в точности к геометрической оптике для линейных задач, и сравним нелинейные результаты как с другими теоретическими результатами для частных случаев, так и с экспериментом. Возможно, стоит заметить, что приближения, которые легко оценить, обычно связаны с малыми возмущениями. Здесь мы рассматриваем эффекты больших возмущений в чрезвычайно сложных задачах.

Приближение трубок лучей не зависит от способа рассмотрения распространения по каждой из трубок. Однако мы предполагаем, что локальное число Маха будет функцией от площади сечения трубки, и за отсутствием какой-либо другой явной формулы воспользуемся результатами § 8.1, в частности соотношением (8.37). Положение ударной волны в момент времени t удобно описывать равенством

$$\alpha(x) = a_0 t, \quad (8.43)$$

где a_0 — невозмущенная скорость звука. Тогда последовательные положения ударной волны задаются семейством поверхностей $\alpha(x) = \text{const}$. Ясно, что в принципе мы можем определить функцию $\alpha(x)$. Во-первых, при помощи равенства (8.43) можно выразить число Маха ударной волны в любой точке через $\alpha(x)$. Во-вторых, по функции $\alpha(x)$ должно быть возможно определить всю геометрию лучей, поскольку она описывает семейство положений ударной волны: это позволяет найти площадь сечения трубки лучей. Тогда соотношение между A и M обеспечивает переход к выводу уравнения для $\alpha(x)$.

Нормальная скорость любой движущейся поверхности $S(t, x) = 0$ была указана формулой (7.63). Если применить это соотношение к $S = a_0 t - \alpha(x)$, то скорость ударной волны окажется равной $U = a_0 / |\nabla \alpha|$; следовательно,

$$M = \frac{1}{|\nabla \alpha|}. \quad (8.44)$$

Для изучения геометрии трубок лучей удобно ввести единичный вектор l для направления луча в произвольной точке и функцию A , связанную с площадью сечения трубки. Определение вектора l очевидно; он выражается через α равенством

$$l = \frac{\nabla \alpha}{|\nabla \alpha|}, \quad (8.45)$$

поскольку лучи ортогональны поверхностям $\alpha = \text{const}$. Для определения функции A потребуются некоторые разъяснения.

Мы хотим ввести конечную функцию точки пространства, которую можно было бы использовать в качестве меры площади сечения произвольной бесконечно тонкой трубки лучей. Для этого рассмотрим какой-либо фиксированный луч и построим вокруг него тонкую трубку, состоящую из пучка близлежащих лучей.

Затем можно ввести отношение площади произвольного поперечного сечения трубки лучей к площади некоторого фиксированного сечения. В пределе, когда максимальный диаметр трубки лучей стремится к нулю, это отношение приближается к конечному пределу и соответствующая предельная функция принимается за функцию A на выбранном луче. Аналогичным образом эта функция определяется на каждом луче и таким образом становится функцией точки пространства.

Для любой бесконечно тонкой трубки лучей функция A теперь скорее пропорциональна площади сечения трубки, чем равна самой площади. Однако в соотношении (8.37) фигурирует только отношение площадей, так что эта величина A все еще связана с локальным числом Маха равенством

$$\frac{A}{A_0} = \frac{f(M)}{f(M_0)} \quad (8.46)$$

По этой же причине исходная точка отсчета для отношения площадей поперечных сечений на трубках лучей выпадает и заменяется начальным условием $A = A_0$ при $M = M_0$, входящим в (8.46). Действительно, в качестве A можно взять любую конечную функцию, которая при движении вдоль бесконечно тонкой трубки изменяется пропорционально площади сечения трубки. Различные коэффициенты пропорциональности на различных лучах будут компенсироваться различными значениями A_0 .

Связь A с функцией $\alpha(x)$, определяющей положение ударной волны, по существу определяется тем, что возрастание A вдоль луча связано с дивергенцией лучевого вектора $\mathbf{l}$, определяемого равенством (8.45). Действительно, сейчас мы покажем, что выполняется соотношение

$$\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{l}}{A} \right) = 0, \quad (8.47)$$

которое можно переписать также в виде

$$\frac{1}{A} \frac{dA}{ds} = \frac{\mathbf{l} \cdot \nabla A}{A} = \nabla \cdot \mathbf{l} \quad (8.48)$$

Для доказательства равенства (8.47) следует применить теорему о дивергенции к объему V тонкой трубки лучей между двумя последовательными положениями ударной волны, как показано на рис. 8.3. Имеем

$$\int_V \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{l}}{A} \right) dV = \int_{S_1 + \Sigma + S_2} \frac{\mathbf{l} \cdot \mathbf{v}}{A} dS, \quad (8.49)$$

где Σ — боковая поверхность трубки, S_1 и S_2 — основания, а $\mathbf{v}$ — внешняя нормаль. На боковой поверхности $\mathbf{l} \cdot \mathbf{v} = 0$, согласно определению $\mathbf{l}$, так что поверхность Σ не дает вклада в этот инте-

грал. На S_2 величина $\mathbf{l} \cdot \mathbf{v} = +1$, а на S_1 величина $\mathbf{l} \cdot \mathbf{v} = -1$. Тогда правая часть равенства (8.49) сводится к разности

$$\int_{S_2} \frac{dS}{A} - \int_{S_1} \frac{dS}{A}.$$

Если диаметр трубки стремится к нулю, то, в силу определения функции A , оба интеграла стремятся к одному и тому же значению,

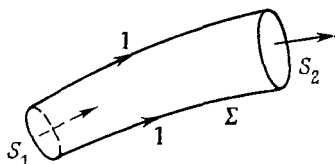


Рис. 8.3. Геометрия трубки лучей.

так что их разность стремится к нулю. Следовательно, интеграл в левой части (8.49) равен нулю. Поскольку объем V был выбран произвольно, это означает, что равенство (8.47) выполняется всюду.

Уравнения (8.44)–(8.47) дают уравнение в частных производных для $\alpha(\mathbf{x})$. Собрав результаты, получим

$$M = \frac{1}{|\nabla \alpha|}, \quad (8.50)$$

$$\nabla \cdot \left(\frac{M}{A} \nabla \alpha \right) = 0, \quad (8.51)$$

$$\frac{A}{A_0} = \frac{f(M)}{f(M_0)}, \quad (8.52)$$

где уравнение (8.51) получено из (8.47) при помощи равенства $\mathbf{l} = \nabla \alpha / |\nabla \alpha| = M \nabla \alpha$.

Эти выражения удобны для сравнения с результатами геометрической оптики и линейной теории. Линейный предел отвечает $M \rightarrow 1$, и линейная теория заменяет уравнения (8.50)–(8.52) соответственно следующими уравнениями:

$$|\nabla \alpha| = 1, \quad (8.53)$$

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{A} \nabla \alpha \right) = 0, \quad (8.54)$$

$$\frac{A}{A_0} = \left(\frac{M_0 - 1}{M - 1} \right)^2 \quad (8.55)$$

Заметим, что в первых двух уравнениях, связанных с геометрией, M тождественно заменяется единицей, но в уравнение (8.55) входит $M - 1$ как мера интенсивности (которая мала) ударной

волны. Таким образом геометрия не связана более с определением интенсивности волны. Параметры течения, такие, как $z = (p - p_0)/p_0$, пропорциональны $M - 1$, и линейная теория использует скорее z , чем $M - 1$. Из уравнений (8.54) и (8.55) имеем

$$\nabla \cdot (z^2 \nabla \alpha) = 0. \quad (8.56)$$

Уравнение (8.53) совпадает с уравнением эйконала (7.65) с учетом нормировки α на скорость звука, а уравнение (8.56) — не что иное, как уравнение переноса (7.66) с $z \propto \Phi_0$. В линейной теории сначала было выведено уравнение (8.56), а затем найдена интерпретация $z \propto A^{-1/2}$, соответствующая уравнению (8.55). Используемые здесь рассуждения привели непосредственно к тому, что раньше было «интерпретацией». Основной момент, однако, состоит в том, что развитая здесь теория в соответствующем пределе сводится к линейной теории. Главное отличие нелинейной теории состоит в том, что интенсивность волны z связана с M . Даже для слабых ударных волн с $M - 1 \ll 1$ эта связь может привести к важным качественным отличиям.

8.4. Двумерные задачи

В двумерном случае положения ударной волны и лучи образуют ортогональную координатную сетку, как показано на рис. 8.4,

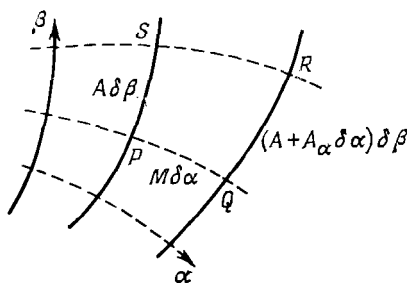


Рис. 8.4. Линейные элементы динамики ударных волн.

И для некоторых целей удобно переписать уравнения в этих координатах. Последовательные положения ударной волны уже представлены семейством кривых $\alpha = \text{const}$, и мы введем функцию $\beta(x)$, представляющую лучи как семейство кривых $\beta = \text{const}$. Интересующие нас уравнения, в которых α и β используются как независимые координаты, можно получить непосредственным преобразованием уравнений (8.50)–(8.52), но в целях выяснения

дальнейших свойств геометрии поучительно провести независимый вывод. (Эти рассуждения фактически являлись основой первоначального вывода данной теории.)

В описании, основанном на сетке кривых $\alpha = \text{const}$, $\beta = \text{const}$, геометрия тесно связана с линейными элементами, соответствующими приращениям координат $d\alpha$ и $d\beta$, и геометрия трубок лучей вводится через масштабные коэффициенты этих элементов.

Линейный элемент, соответствующий приращению $d\beta$, равен $A(\alpha, \beta) d\beta$, где A — некоторая функция. Эта функция A , очевидно, пропорциональна ширине лучевого канала между лучами β и $\beta + d\beta$. В двумерной задаче трубки лучей имеют постоянную глубину в третьем измерении, поэтому A пропорциональна площади трубки и может быть использована вместо этой площади.

Приращение $d\alpha$ соответствует изменению положения ударной волны за время $dt = d\alpha/a_0$. Следовательно, пройденное расстояние равно $Udt = M d\alpha$. Отсюда следует, что длина элемента дуги, соответствующая приращению $d\alpha$, равна $M d\alpha$. В общем случае длина элемента дуги выражается формулой

$$ds^2 = M^2 d\alpha^2 + A^2 d\beta^2. \quad (8.57)$$

Функции M и A в таких ортогональных координатах не могут быть произвольными функциями от (α, β) . Они удовлетворяют некоторому дифференциальному уравнению, которое следует из известного нам факта, что двумерное пространство, описываемое метрикой (8.57), в действительности плоское. Поэтому кривизна, вычисленная при помощи M и A , должна обращаться в нуль. Можно формулировать это иначе: функции M и A должны быть такими, чтобы выражение (8.57) можно было преобразовать в следующее выражение:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

Соответствующее условие, которое будет выведено ниже, имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{M} \frac{\partial A}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial M}{\partial \beta} \right) = 0. \quad (8.58)$$

Если добавить соотношение между A и M , то получится полная система уравнений для определения $A(\alpha, \beta)$ и $M(\alpha, \beta)$. Зная их, можно найти лучи и положения ударной волны как функции от x и y .

Для доказательства (8.58) рассмотрим криволинейный четырехугольник $PQRS$ (рис. 8.4) с вершинами (α, β) , $(\alpha + \delta\alpha, \beta)$, $(\alpha, \beta + \delta\beta)$, $(\alpha + \delta\alpha, \beta + \delta\beta)$. Пусть $\theta(\alpha, \beta)$ — угол между лучом и фиксированным направлением, скажем осью x . Поскольку стороны PS и QR имеют длины $A\delta\beta$ и $(A + A_\alpha \delta\alpha)\delta\beta$ соответственно, а расстояние между ними равно $M\delta\alpha$, изменение наклона луча

при переходе из точки P в S составляет

$$\delta\theta = \frac{QR - PS}{PQ} = \frac{1}{M} \frac{\partial A}{\partial \alpha} \delta\beta.$$

Отсюда

$$\frac{\partial\theta}{\partial\beta} = \frac{1}{M} \frac{\partial A}{\partial \alpha}. \quad (8.59)$$

Так как наклон кривой β равен $\theta + 1/2\pi$, аналогичные рассуждения показывают, что

$$\frac{\partial\theta}{\partial\alpha} = -\frac{1}{A} \frac{\partial M}{\partial\beta}. \quad (8.60)$$

Уравнение (8.58) получается исключением θ , но удобнее работать с системой уравнений (8.59) и (8.60). Система замыкается добавлением соотношения между A и M :

$$A = A_0 \frac{f(M)}{f(M_0)}. \quad (8.61)$$

Эквивалентность уравнений (8.59) — (8.60) и (8.50) — (8.51) легко устанавливается с помощью соотношений

$$\begin{aligned} \alpha_x &= \frac{\cos \theta}{M}, & \alpha_y &= \frac{\sin \theta}{M}, \\ \beta_x &= -\frac{\sin \theta}{A}, & \beta_y &= \frac{\cos \theta}{A}. \end{aligned} \quad (8.62)$$

Как только θ , M и A найдены как функции от α и β , положения ударной волны можно получить интегрированием вдоль лучей. На луче

$$\frac{\partial x}{M \partial \alpha} = \cos \theta, \quad \frac{\partial y}{M \partial \alpha} = \sin \theta.$$

Следовательно, выражения

$$\begin{aligned} x &= x_0(\beta) + \int_0^\alpha M \cos \theta \, d\alpha, \\ y &= y_0(\beta) + \int_0^\alpha M \sin \theta \, d\alpha \end{aligned} \quad (8.63)$$

определяют положение ударной волны в момент времени $t = \alpha/a_0$ по известному положению $x = x_0(\beta)$, $y = y_0(\beta)$ при $t = 0$.

В общем случае коэффициент $A_0/f(M_0)$ в (8.61) может зависеть от β , поскольку и A_0 , и M_0 могут изменяться вдоль кривой $\alpha = 0$, определяющей исходное положение ударной волны. Но мы можем ввести новую переменную β и новую функцию A для того, чтобы исключить эту зависимость. Инвариантной величиной

является длина элемента дуги $A d\beta$. Если $A = k(\beta) \bar{A}$, то

$$A d\beta = k(\beta) \bar{A} d\beta = \bar{A} d\bar{\beta},$$

где

$$\bar{\beta} = \int k(\beta) d\beta.$$

Таким образом, любой нежелательный множитель $k(\beta)$ можно поглотить выбором новой $\bar{\beta}$. Будем считать, что это проделано, если не указано противное, и положим $A = A(M)$. В задаче дифракции (рис. 8.2) исходная ударная волна $\alpha = 0$ является плоской и $M_0 = \text{const}$. Выберем в качестве β расстояние от стенки в этой однородной области. Тогда $A_0 = 1$ и

$$A = \frac{f(M)}{f(M_0)}. \quad (8.64)$$

8.5. Распространение волн по ударной волне

Интересно, что уравнения (8.59) — (8.61) оказываются гиперболическими и описывают волновое движение возмущений, распространяющихся вдоль фронта ударной волны. По небольшому размышлению становится ясно, что этого следовало ожидать. Течение в области за деформирующейся ударной волной содержит двумерные волны, распространяющиеся с локальной скоростью звука относительно локального течения, как показано на рис. 8.5.

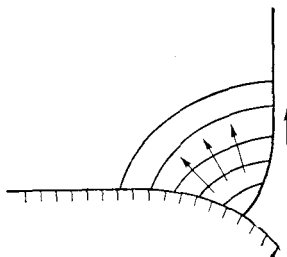


Рис. 8.5. Цилиндрические волны, возникающие при дифракции ударной волны.

Наши приближенные уравнения некоторым образом описывают след этих цилиндрических волн при их пересечении с ударной волной.

Волновое распространение возмущений по ударной волне проявляется при изучении уравнений в характеристической форме.

При подстановке $A = A(M)$ в уравнения (8.59) и (8.60) они принимают вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial \theta}{\partial \beta} - \frac{A'(M)}{M} \frac{\partial M}{\partial \alpha} &= 0, \\ \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} + \frac{1}{A(M)} \frac{\partial M}{\partial \beta} &= 0.\end{aligned}\quad (8.65)$$

Характеристическая форма такова:

$$\left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \pm c \frac{\partial}{\partial \beta} \right) \left(\theta \pm \int \frac{dM}{Ac} \right) = 0, \quad (8.66)$$

где c — функция от M , определяемая как

$$c(M) = \sqrt{\frac{-M}{AA'}}. \quad (8.67)$$

Поскольку $A'(M) < 0$, характеристики вещественны, и мы имеем нелинейные волны, распространяющиеся со скоростями

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \pm c$$

в (α, β) -пространстве. Эти волны переносят изменения формы и интенсивности ударной волны по самой ударной волне. Инварианты Римана даются уравнением (8.66), а именно

$$\theta + \int \frac{dM}{Ac} = \text{const} \quad \text{на} \quad \frac{d\beta}{d\alpha} = c, \quad (8.68)$$

$$\theta - \int \frac{dM}{Ac} = \text{const} \quad \text{на} \quad \frac{d\beta}{d\alpha} = -c. \quad (8.69)$$

Эти уравнения во всех смыслах аналогичны исходным уравнениям одномерной нелинейной газовой динамики, изученным в гл. 6, и развитые там идеи и методы можно применить к волнам, распространяющимся вдоль ударной волны.

Зависимость $A(M)$ выводится из уравнения (8.25), которое можно переписать в виде

$$\frac{1}{A} \frac{dA}{dM} = - \frac{M}{M^2 - 1} \lambda(M). \quad (8.70)$$

Отсюда

$$Ac = \left\{ \frac{M^2 - 1}{\lambda(M)} \right\}^{1/2}, \quad (8.71)$$

и интеграл в формулах для инвариантов Римана равен

$$\omega(M) = \int_1^M \frac{dM}{Ac} = \int_1^M \left\{ \frac{\lambda(M)}{M^2 - 1} \right\}^{1/2} dM. \quad (8.72)$$

Могут оказаться полезными явные формулы для слабых ударных волн с $M - 1 \ll 1$ и для сильных ударных волн с $M \gg 1$.

Эти формулы имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \lambda &\sim 4, \\ \frac{A}{A_0} &\sim \frac{(M_0-1)^2}{(M-1)^2}, \\ A c &\sim \left(\frac{M-1}{2}\right)^{1/2}, \quad \omega(M) \sim 2^{3/2} (M-1)^{1/2} \end{aligned} \right\} \text{ при } M \rightarrow 1 \quad (8.73)$$

и

$$\left. \begin{aligned} \lambda &\sim n = 5,0743 \text{ для } \gamma = 1,4, \\ \frac{A}{A_0} &\sim \left(\frac{M_0}{M}\right)^n, \\ A c &\sim n^{-1/2} M, \\ \omega(M) &\sim n^{1/2} \ln M \end{aligned} \right\} \text{ при } M \rightarrow \infty. \quad (8.74)$$

Характеристические соотношения проще всего получаются в (α, β) -координатах, но в приложениях к конкретным краевым задачам иногда предпочтительнее описание в декартовых координатах (x, y) . Выражения (8.68) и (8.69) простыми выкладками преобразуются к нужной форме. Заметим, что

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y_\alpha + y_\beta \frac{d\beta}{d\alpha}}{x_\alpha + x_\beta \frac{d\beta}{d\alpha}}, \quad (8.75)$$

где $x_\alpha = M \cos \theta$, $y_\alpha = M \sin \theta$, $x_\beta = -A \sin \theta$, $y_\beta = A \cos \theta$. Следовательно, характеристики $d\beta/d\alpha = \pm c$ записываются как

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\theta \pm m), \quad (8.76)$$

где

$$\operatorname{tg} m = \frac{Ac}{M} = \left(-\frac{A}{MA'}\right)^{1/2}, \quad (8.77)$$

а характеристические уравнения принимают вид

$$\theta \pm \omega(M) = \text{const на } C_\pm: \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\theta \pm m). \quad (8.78)$$

Значения $m(M)$ и $\omega(M)$ приведены в табл. 8.3, заимствованной из статьи Брисона и Гросса [1].

Последние уравнения можно вывести и непосредственно из двумерной формы уравнений (8.50) и (8.51). При $\alpha_x = \cos \theta/M$, $\alpha_y = \sin \theta/M$ эквивалентная система уравнений для θ и M имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\sin \theta}{M} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\cos \theta}{M} \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\cos \theta}{A} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\sin \theta}{A} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (8.79)$$

Таблица 8.3

Число Маха M	Площадь трубки лучей A , $A \times 10^{-N}$	N	Характеристический угол m , град.	Интеграл ω
1	∞		0	0
1,000001	3,668749	+10	—	0,003
1,00001	3,668672	+8	—	0,009
1,0001	3,667902	+6	0,403	0,028
1,001	3,660213	+4	1,280	0,089
1,01	3,584696	+2	4,002	0,283
1,05	1,310728	+1	8,544	0,633
1,10	2,946288	+0	11,474	0,896
1,15	1,184152	+0	13,142	1,097
1,20	6,053638	—1	14,843	1,266
1,25	3,536658	—1	15,958	1,414
1,30	2,250720	—1	16,859	1,547
1,35	1,520662	—1	17,604	1,669
1,40	1,074028	—1	18,231	1,728
1,45	7,850741	—2	18,766	1,887
1,50	5,898186	—2	19,228	1,984
1,55	4,531934	—2	19,630	2,077
1,60	3,548150	—2	19,983	2,165
1,65	2,822580	—2	20,295	2,249
1,70	2,276434	—2	20,572	2,330
1,75	1,858064	—2	20,820	2,406
1,80	1,532637	—2	21,042	2,480
1,85	1,276079	—2	21,242	2,551
1,90	1,071389	—2	21,423	2,619
1,95	9,063299	—3	21,587	2,685
2,00	7,719471	—3	21,736	2,749
2,05	6,615861	—3	21,872	2,811
2,10	5,702352	—3	21,997	2,871
2,15	4,940726	—3	22,111	2,929
2,20	4,301517	—3	22,216	2,985
2,25	3,761766	—3	22,312	3,040
2,30	3,303423	—3	22,401	3,094
2,40	2,576553	—3	22,560	3,203
2,50	2,037086	—3	22,696	3,302
2,60	1,630023	—3	22,814	3,388
2,70	1,318343	—3	22,916	3,477
2,80	1,076566	—3	23,006	3,563
2,90	8,868121	—4	23,085	3,645
3,00	7,363072	—4	23,154	3,724
3,20	5,184216	—4	23,271	3,875

Продолжение табл. 8.3

Число Маха M	Площадь трубки лучей A , $A \times 10^{-N}$	N	Характеристический угол θ , град.	Интеграл ω
3,40	3,740925	—4	23,364	4,015
3,60	2,757067	—4	23,439	4,148
3,80	2,069662	—4	23,501	4,272
4,00	1,578970	—4	23,552	4,398
4,50	8,519558	—5	23,647	4,660
5,00	4,926060	—5	23,710	4,900
6,00	1,921342	—5	23,788	5,314
7,00	8,705958	—6	23,832	5,672
8,00	4,395269	—6	23,859	5,966
9,00	2,408270	—6	23,876	6,232
10,00	1,407051	—6	23,889	6,470
15,00	1,786391	—7	23,917	7,385
20,00	4,141420	—8	23,926	8,033
100,00	1,172427	—11	23,937	11,67
∞	0		23,938	∞

Несколько более длинные непосредственные вычисления показывают, что характеристические уравнения совпадают с приведенными выше.

8.6. Вторичные ударные волны

Функция $s(M)$ возрастает с ростом M . Следовательно, волны, движущиеся в положительном направлении и несущие возрастание числа Маха M и θ , должны опрокидываться в силу нелинейности. Исходя из известных нам результатов для аналогичных задач, можно предположить, что придется ввести разрывы переменных M и θ , соответствующие изломам фронта ударной волны, как показано на рис. 8.6. В этой приближенной теории мы следуем обычной интерпретации таких разрывов типа «ударной волны» и выводим условия на разрыве из основных уравнений в форме законов сохранения. Такие «ударные волны» в исходной газодинамической ударной волне мы будем называть вторичными ударными волнами ¹⁾.

Эти вторичные ударные волны интерпретируются как след близких к цилиндрическим волн, распространяющихся в течении за

¹⁾ Из всех возможных эквивалентов нетривиального термина «shock-shocks», использованного в оригинале, этот представился нам наиболее приемлемым. — *Прим. ред.*

ударной волной. Вторичная ударная волна представляет собой след настоящей газодинамической ударной волны в течении за основной ударной волной. Таким образом, это соответствует отражению Маха с тремя ударными волнами (описанному в конце

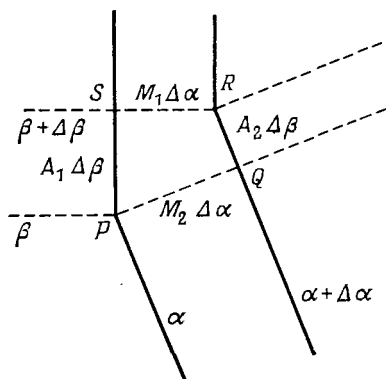


Рис. 8.6. Линейные элементы для вторичной ударной волны.

гл. 6), которое было изучено и описано независимо от излагаемой теории. В дальнейшем мы обсудим связь с отражением Маха более подробно.

Дифференциальные уравнения (8.59) и (8.60) рассматриваемой теории были получены с помощью метрики (8.57) в (α, β) -пространстве. Для вывода условий на разрыве требуется соответствующая интегральная форма уравнений. Рассмотрим окрестность разрыва для двух последовательных положений ударной волны, как показано на рис. 8.6. Пусть разность α -координат для этих положений ударной волны составляет $\Delta\alpha$, а разность β -координат составляет $\Delta\beta$. Пусть, далее, индексы 1 и 2 означают величины до разрыва и после него. Тогда, согласно рис. 8.6, $PQ = M_2 \Delta\alpha$, $QR = A_2 \Delta\beta$, $SR = M_1 \Delta\alpha$, $PS = A_1 \Delta\beta$. Выражая расстояние PR двумя различными способами, получаем

$$(M_1 \Delta\alpha)^2 + (A_1 \Delta\beta)^2 = (M_2 \Delta\alpha)^2 + (A_2 \Delta\beta)^2.$$

Но отношение $\Delta\beta/\Delta\alpha$ равно скорости C вторичной ударной волны в (α, β) -координатах, откуда

$$C^2 = -\frac{M_2^2 - M_1^2}{A_2^2 - A_1^2}. \quad (8.80)$$

Соответствующий скачок переменной θ определяется равенством

$$\operatorname{ctg}(\theta_2 - \theta_1) = \operatorname{tg}(\angle RPQ + \angle RPS) = \frac{A_2 C / M_2 + M_1 / A_1 C}{1 - A_2 M_1 / M_2 A_1}.$$

Подставляя для C выражение (8.80), находим

$$\operatorname{tg}(\theta_2 - \theta_1) = \frac{(M_2^2 - M_1^2)^{1/2} (A_1^2 - A_2^2)^{1/2}}{A_2 M_2 + A_1 M_1}. \quad (8.81)$$

В декартовых координатах (x, y) равенство (8.80) преобразуется к виду

$$\operatorname{tg}(\chi - \theta_i) = \frac{A_i}{M_i} \left(\frac{M_2^2 - M_1^2}{A_1^2 - A_2^2} \right)^{1/2}, \quad i = 1 \text{ или } 2, \quad (8.82)$$

где χ — угол, составляемый фронтом вторичной ударной волны с осью x .

Предполагается, что функциональное соотношение (8.61) между A и M остается в силе и для резкого изменения площади канала в месте возникновения вторичной ударной волны, скорость C выражается через M_1 и M_2 формулой (8.80), а скачок переменной θ определяется равенством (8.81). Тогда легко проверить, что для слабых вторичных ударных волн, когда $M_2 - M_1 \rightarrow 0$, величина (8.80) сводится, как и должно быть, к характеристической скорости (8.67), а выражение (8.81) сводится к выражению для инварианта Римана. Однако для достаточно сильных вторичных ударных волн равенство (8.61) будет неточно определять зависимость A_2 от M_2 , поскольку эта зависимость выведена в предположении о медленном изменении сечения канала.

Вопрос не исчерпывается установлением правильных формул, связывающих M и A при резком изменении сечения канала; такие формулы были найдены Лапортом [1]. Фактически, как следует из традиционного рассмотрения отражения Маха, существуют третья ударная волна и вихревой след за основной ударной волной. Поэтому на основе анализа таких конфигураций с тремя ударными волнами в принципе можно получить дополнительные соотношения. Это привело бы к усложнениям, деталями которых заниматься, по-видимому, не стоит в силу приближенного характера теории. Можно, однако, отметить, что если это проделать, то связь между A и M для волн, следующих за вторичной ударной волной, примет вид

$$A = k(\beta) f(M),$$

где $k(\beta) = A_2/f(M_2)$ определяется из соотношений для трех ударных волн; было бы неверным продолжить это соотношение между A и M через вторичную ударную волну назад в исходное положение и положить $k = A_0/f(M_0)$.

В целом ситуация аналогична тому, что происходит с энтропией в обычной газовой динамике, где прежде всего полагают $p = p(\rho)$, и это приводит к простым волнам. Но затем, поскольку волны сжатия опрокидываются, приходится вводить ударные волны, а они приводят к изменениям энтропии, так что p больше не

является функцией только от p ; за ударной волной энтропия постоянна лишь на траектории данной частицы. Аналогично обстоит дело с A и M , подобными p и ρ , и k , играющим роль энтропии. Более простая теория вторичных ударных волн (8.80) и (8.81) с $A = A(M)$ подобна пренебрежению изменениями энтропии в газодинамических ударных волнах. Последнее, как известно, приводит к точным результатам, если разрывы не слишком велики, и можно ожидать, что это же будет верно и в данном случае.

Сравнение этих упрощенных условий на разрыве для вторичной ударной волны и результатов для отражения Маха с тремя ударными волнами будет дано на рис. 8.11 (см. стр. 290). Оно подтверждает нашу точку зрения о нецелесообразности более тщательного рассмотрения данного вопроса в рамках этой приближенной теории.

8.7. Дифракция плоских ударных волн

Рассмотрим теперь приложения общей теории и начнем с задачи о дифракции плоской ударной волны, распространяющейся вдоль закругленной стенки. Геометрия для выпуклой стенки представлена на рис. 8.2. Стенка является лучом, и ее форма задает граничное значение $\theta = \theta_w$ на стенке. Если использовать (α, β) -координаты, то стенку (границу) можно принять за луч $\beta = 0$.

Заметим, что θ_w является известной функцией расстояния s вдоль стенки. Однако если на границе мы положим $\theta = \theta_w(\alpha)$, то сможем найти связь между α и s лишь из окончательного решения. Для простых форм, подобных углам, такого соотношения не требуется, поскольку θ_w просто принимает постоянные значения на обеих сторонах угла и (α, β) -описание упрощается. Для более общих форм, для которых это неявное соотношение будет неудобным, обычно лучше работать в (x, y) -описании и использовать эквивалентную систему уравнений (8.78).

Граница сначала представляет собой прямую с $\theta_w = 0$, и ударная волна однородна с $\theta = 0$, $M = M_0$. Положим, что β равно расстоянию от границы невозмущенной области, так что $A_0 = 1$ и применимо равенство (8.64). Положим, далее, что $\alpha = 0$ в точке, где граница начинает искривляться; тогда полная задача состоит в решении уравнений (8.65) со следующими начальными и граничными условиями:

$$\begin{aligned} \theta &= 0, \quad M = M_0 && \text{при } \alpha = 0, \quad 0 < \beta < \infty, \\ \theta &= \theta_w(\alpha) && \text{при } \beta = 0, \quad 0 < \alpha < \infty. \end{aligned}$$

Распространение волн вдоль ударной волны аналогично одномерным волнам в газовой динамике. Отклонение стенки соответствует движению поршня, и можно представить себе, что это

отклонение тянет или толкает основание ударной волны и посылает волны вдоль нее. Выпуклая граница соответствует вытягиваемому поршню, посылающему волны разрежения, тогда как вогнутая — поршню, генерирующему волны сжатия. В силу точно таких же рассуждений, как и в § 6.8, решение в каждом случае является простой волной до тех пор, пока в результате опрокидывания не образуются вторичные ударные волны. Определяемый формулой (8.69) C -инвариант постоянен всюду, поскольку все характеристики C_- начинаются в однородной области перед волнами, в которой $\theta = 0$ и $M = M_0$. Следовательно,

$$\theta - \omega(M) = -\omega(M_0) \quad (8.83)$$

всюду, причем $\omega(M)$ определяется равенством (8.72). В частности, число Маха M_w у стенки, которое, пожалуй, является наиболее важным результатом, выражается через θ_w без дальнейшего решения исходных уравнений. Имеем

$$\theta_w = \omega(M_w) - \omega(M_0). \quad (8.84)$$

Значение M_w , соответствующее любому конкретному значению θ_w , получается из этого соотношения при помощи табл. 8.3.

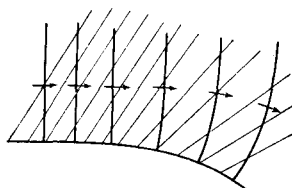


Рис. 8.7. Характеристики для дифракции ударной волны.

В простой волне граничные значения распространяются в область течения и остаются постоянными на характеристиках C_+ , изображенных на рис. 8.7. Если характеристическая переменная τ определена как значение α в точке пересечения этой характеристики с границей $\beta = 0$, то решение в виде простой волны имеет вид

$$\theta = \theta_w(\tau), \quad M = M_w(\theta_w), \quad \beta = (\alpha - \tau) c(M_w). \quad (8.85)$$

Соответствующие соотношения в (x, y) -описании таковы:

$$\begin{aligned} \theta &= \theta_w = \arctan y'_w(\xi), \quad M = M_w(\theta_w), \\ y &= y_w(\xi) + (x - \xi) \tan(\theta_w + m_w). \end{aligned} \quad (8.86)$$

Разрежение около угла

Для выпуклого угла θ скачком меняется от 0 до некоторой отрицательной величины θ_w и остается равным этой величине. Соответствующее граничное значение числа Маха скачком меняется от M_0 до величины M_w , определяемой равенством (8.84).

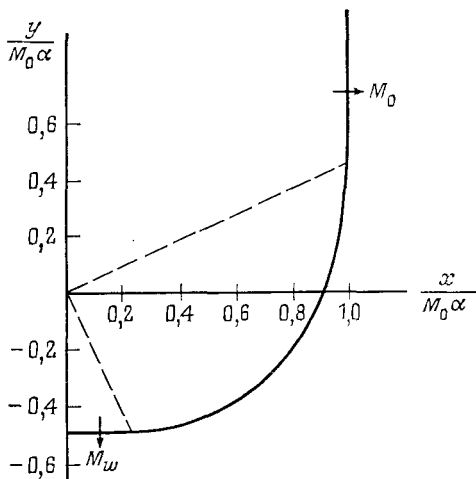


Рис. 8.8. Теоретическая форма ударной волны для дифракции на угле в 90° .

Возмущение является центрированной простой волной (см. рис. 8.8), и решение для числа Маха M в этой волне находится из соотношений

$$\frac{\beta}{\alpha} = c(M), \quad c(M_w) < \frac{\beta}{\alpha} < c(M_0). \quad (8.87)$$

Соответствующее значение θ дается равенством (8.83). Вдоль ударной волны

$$\frac{\partial x}{A \partial \beta} = -\sin \theta, \quad \frac{\partial y}{A \partial \beta} = \cos \theta;$$

следовательно, в момент времени $t = \alpha/a_0$ ударная волна описывается следующими параметрическими уравнениями:

$$\begin{aligned} x &= \alpha M_w \cos \theta_w - \int_0^{\beta} \frac{f(M)}{f(M_0)} \sin \theta d\beta, \\ y &= \alpha M_w \sin \theta_w + \int_0^{\beta} \frac{f(M)}{f(M_0)} \cos \theta d\beta. \end{aligned} \quad (8.88)$$

Поскольку M и θ являются функциями одной переменной β/α , отсюда следует, что x/α и y/α тоже функции одной этой переменной. Следовательно, ударная волна со временем равномерно расширяется. Это можно было бы предсказать заранее непосредственно из соображений размерностей. В данной задаче нет характерной длины или интервала времени, так что все параметры течения должны быть функциями от $x/(a_0 t)$ и $y/(a_0 t)$. Это одинаково верно и в точной теории, и в приближенной геометрической теории.

Первое возмущение распространяется по характеристике $\beta = \alpha c(M_0)$. Поскольку β измеряется расстоянием от границы по исходной невозмущенной ударной волне и $\alpha = a_0(t)$, скорость в физическом пространстве равна $a_0 c(M_0)$. Одной из немногих величин, которые можно найти в точной формулировке этой задачи, является скорость первого сигнала. Согласно теории звука, первое возможное возмущение от угла распространяется в область течения за ударной волной с локальной скоростью звука a относительно течения с локальной скоростью u . Следовательно, это возмущение перемещается вдоль ударной волны со скоростью

$$\{a^2 - (U - u)^2\}^{1/2}, \quad (8.89)$$

где U — скорость ударной волны. Величины U , a и u можно выразить через M_0 , и оказывается, что величина (8.89) равна $a_0 c^*$, где

$$c^* = \left\{ \frac{(M_0^2 - 1) [(\gamma - 1) M_0^2 + 2]}{(\gamma + 1) M_0^2} \right\}^{1/2}.$$

Эту величину следует сравнить с

$$c_0 = c(M_0) = \left\{ \frac{M_0^2 - 1}{\lambda(M_0)} \right\}^{1/2},$$

где $\lambda(M)$ определяется формулой (8.26). Для слабых ударных волн

$$c_0 \sim \left\{ \frac{1}{2} (M_0 - 1) \right\}^{1/2}, \quad c^* \sim \{2(M_0 - 1)\}^{1/2}, \quad M_0 \rightarrow 1; \quad (8.90)$$

для сильных ударных волн при $\gamma = 1,4$

$$c_0 \sim 0,4439 M_0, \quad c^* \sim 0,4082 M_0, \quad M_0 \rightarrow \infty. \quad (8.91)$$

Таким образом, зависимость от M_0 оказывается одной и той же, и фактически имеет место приемлемое численное согласование при $M_0 > 2$. Для слабых ударных волн $c_0 = \frac{1}{2} c^*$. Можно возразить, что c^* дает скорость только первого сигнала и что на самом деле основное возмущение может приходить позднее. Но все свидетельствует, по-видимому, о том, что для слабых ударных волн истинное возмущение распределяется по всему звуковому кругу, а приближенная теория концентрирует возмущение, грубо говоря, в половину этой области.

Мы увидим ниже, что полная амплитуда возмущения предсказывается, как свидетельствуют значения M_w , очень хорошо, и концентрация возмущения в этой теории неизбежна. Для более сильных ударных волн возмущение будет более сконцентрированным, и приближенная теория прекрасно описывает такое поведение. Можно добавить, что в этой теории основное внимание уделяется локальному поведению в окрестности ударной волны, а это, очевидно, лучше подходит для сильных ударных волн. К счастью, задачи о слабых ударных волнах менее интересны и в любом случае могут быть решены в рамках линейной акустики.

Несмотря на то что точная формулировка для дифракции около угла приводит к автомодельному решению, зависящему от $x/a_0 t$ и $y/a_0 t$, в общем случае с ним мало что можно сделать. Однако для малых углов θ_w можно линеаризовать течение за ударной волной и провести решение до конца. Это было осуществлено Лайтхиллом [4]. Мы можем сравнить наши результаты с результатами Лайтхилла для этого частного случая. При малых значениях θ_w формулу (8.84) для числа Маха M_w у стенки можно аппроксимировать следующим выражением:

$$M_w - M_0 = c(M_0) \theta_w = \left\{ \frac{M_0^2 - 1}{\lambda(M_0)} \right\}^{1/2} \theta_w. \quad (8.92)$$

Сравним это выражение с результатами Лайтхилла в двух предельных случаях $M_0 \rightarrow 1$ и $M_0 \rightarrow \infty$. Для слабых ударных волн

$$M_w - M_0 \sim \left\{ \frac{1}{2} (M_0 - 1) \right\}^{1/2} \theta_w,$$

тогда как у Лайтхилла это значение умножается на $8/(3\pi)$. Для сильных ударных волн

$$M_w - M_0 \sim 0,4439 M_0 \theta_w,$$

а значение Лайтхилла приходится определять по графику, но численный множитель, по-видимому, близок к 0,5. Теория Лайтхилла показывает, что для слабых ударных волн возмущение распространяется по всему звуковому кругу, но для более сильных ударных волн оно более сконцентрировано, и действительно, при $M_0 \rightarrow \infty$ кривизна стремится к бесконечности.

Учитывая сравнительную простоту этой приближенной теории, результаты можно считать удивительно хорошими. Анализ Лайтхилла, ограниченный случаем угла и малых θ_w , уже существенно сложнее нашего; приближенную же теорию можно применять к огромному множеству задач, для которых другие аналитические решения не найдены. Результаты должны быть хорошими, за исключением очень слабых ударных волн, но даже для них полное изменение числа Маха должно предсказываться хорошо. Об экспериментальных проверках, показывающих это согласование, речь пойдет ниже.

Решение для произвольного исходного числа Маха и любой величины угла дается формулами (8.87) и (8.88). В пределе сильных ударных волн, когда $M_0 \rightarrow \infty$, эти формулы упрощаются

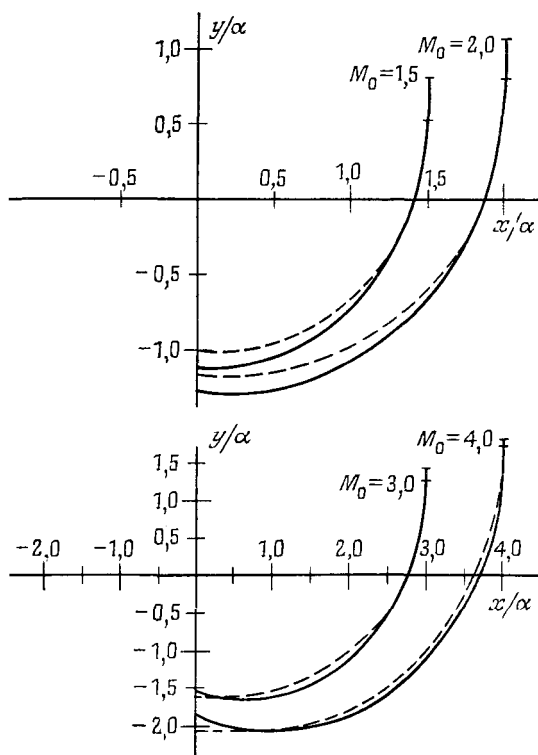


Рис. 8.9. Дифракция ударной волны: сравнение экспериментальных (сплошные кривые) и теоретических (штриховые кривые) результатов (по Скьюзу).

и форма решения становится яснее. Для сильных ударных волн соответствующее выражение для M_w принимает вид

$$M_w = M_0 \exp \left(\frac{\theta_w}{\sqrt{n}} \right), \quad (8.93)$$

и в веере

$$\begin{aligned} \frac{M}{M_0} &= \left(\frac{\beta \sqrt{n}}{M_0 \alpha} \right)^{1/(n+1)}, \\ \theta &= \frac{\sqrt{n}}{n+1} \ln \frac{\beta \sqrt{n}}{M_0 \alpha}. \end{aligned} \quad (8.94)$$

Уравнение для ударной волны в момент времени $t = \alpha/a_0$ находится из (8.88) с $f(M) = M^{-n}$. Легче всего использовать в качестве параметра θ вместо β и определить постоянные интегрирования из условий $x = M_0 a_0 t$, $y = M_0 a_0 t / \sqrt{n}$ при $\theta = 0$. Тогда имеем

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{M_0 a_0 t} &= \left(\frac{n+1}{n} \right)^{1/2} e^{\theta/\sqrt{n}} \sin(\eta - \theta), \\ \frac{y}{M_0 a_0 t} &= \left(\frac{n+1}{n} \right)^{1/2} e^{\theta/\sqrt{n}} \cos(\eta - \theta), \end{aligned} \right\} \theta_w < \theta < 0, \quad (8.95)$$

где $\operatorname{tg} \eta = \sqrt{n}$. Форма ударной волны приведена на рис. 8.8 для $\theta_w = -\pi/2$. Автомодельная форма решения уже была указана, и мы лишь добавим, что для сильных ударных волн решение также сопоставимо с M_0 .

Решение для различных значений M_0 сравнивалось с экспериментальными результатами Скьюза [1]. Согласование оказалось приемлемо хорошим; типичные результаты воспроизведены на рис. 8.9.

Для сильных ударных волн не существует ограничений на величины θ_w , для которых можно найти решение. Для достаточно слабых ударных волн такое ограничение существует, поскольку M_w не может быть меньше единицы. Поэтому, если θ_w оказывается меньше величины θ_{lim} , определяемой как

$$\theta_{\text{lim}} = - \int_1^{M_0} \frac{dM}{Ac},$$

то решения не существует. Предположительно это соответствует сильному разделению или другим эффектам около угла, но в настоящий момент интерпретация неясна.

Дифракция на клине

Для вогнутой границы волны на ударной волне опрокидываются, и в решение (8.85) приходится вводить вторичные ударные волны, используя условия на разрыве, установленные в § 8.6. Мы рассмотрим подробно только решение для вогнутого угла, эквивалентное решению задачи о дифракции плоской ударной волны на клине. Этой задаче уделено значительное внимание в литературе (см. Курант и Фридрихс [1], стр. 338). В приближенной теории решение просто. Это решение соответствует вторичной ударной волне, разделяющей две области, в которых M и θ постоянны, как на рис. 8.10. Согласно (8.84), число Маха на стенке находится

из равенств

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \theta_w &= \frac{(M_w^2 - M_0^2)^{1/2} (A_0^2 - A_w^2)^{1/2}}{A_w M_w + A_0 M_0}, \\ \frac{A_w}{A_0} &= \frac{f(M_w)}{f(M_0)}. \end{aligned} \quad (8.96)$$

Угол χ для фронта вторичной ударной волны, изображенной на

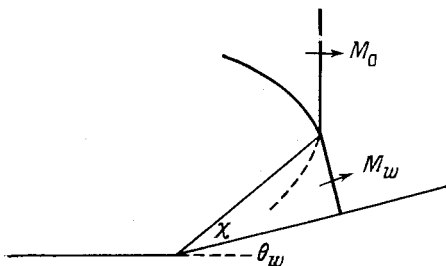


Рис. 8.10. Отражение Маха на клине

рис. 8.10, определяется, согласно (8.82), из равенства

$$\operatorname{tg} (\chi - \theta_w) = \frac{A_w}{A_0} \left\{ \frac{1 - (M_0/M_w)^2}{1 - (A_w/A_0)^2} \right\}^{1/2}. \quad (8.97)$$

Для сильных ударных волн

$$\frac{A_w}{A_0} = \left(\frac{M_0}{M_w} \right)^n,$$

и χ становится функцией только от θ_w . Соответствующий график приведен на рис. 8.11.

В действительности истинная конфигурация представляет собой отражение Маха с третьей отраженной волной и вихревым следом, как показано на рис. 8.10. Кроме того, «стебель Маха» — часть ударной волны около стенки — слегка искривлен. Газодинамические условия на разрыве для трех ударных волн дают соотношения между углами течения и ударными волнами в тройной точке. Если считать, что стебель Маха прямой, то эти соотношения позволяют иным способом определить χ как функцию от θ_w . Этот результат представлен на рис. 8.11 штриховой кривой.

Различие для малых значений θ_w оказывается примерно таким, как и ожидалось, и является величиной того же порядка, что и расхождение в (8.91). Затем кривые случайным образом сближаются и пересекаются. В теории с тремя ударными волнами существует верхний предел для θ_w , при котором отражение Маха переходит в обычное отражение (см. §.6.17), в то время как упрощенные

соотношения для вторичных ударных волн продолжают предсказывать очень маленький стебель Маха. Однако для углов θ , боль-

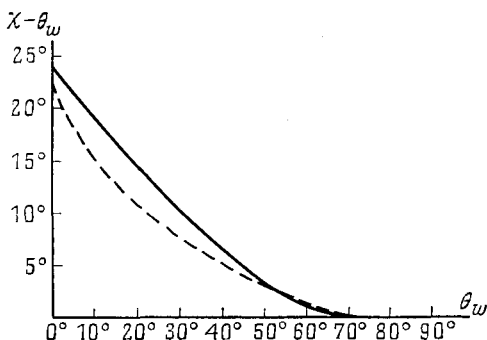


Рис. 8.11. Зависимость угла $\chi - \theta_w$ от угла клина θ_w для отражения Маха. Сплошная кривая соответствует данной теории, штриховая — теории с тремя ударными волнами.

ших примерно 70° , этот стебель Маха так мал, что практически мы имеем ту же картину, что и для обычного отражения. Мы снова заключаем, что эта теория удивительно хороша.

{дифракция на круговом цилиндре

Возможно, наиболее суровым испытанием этой теории явилось ее приложение к дифракции на круговом цилиндре, которое выполнили Брисон и Гросс [1] и сравнили затем со своими экспериментальными результатами. Здесь возникло затруднение, связанное с поведением решения в передней точке цилиндра, но Брисон и Гросс предложили удовлетворительный способ обойти его. Прежде всего ударная волна испытывает обычное отражение вплоть до угла около 45° от передней критической точки цилиндра, после чего образуется стебель Маха, который в дальнейшем удлиняется. Как указано на рис. 8.11, приближенная теория предсказывает существование стебля Маха для всех θ_w вплоть до $\pi/2$. Брисон и Гросс приняли ту точку зрения, что если стебель Маха чрезвычайно мал, то это отражение практически является обычным.

Однако оставалась еще трудность, связанная с началом вычислений у передней точки, поскольку в этой точке имеется особенность. Брисон и Гросс воспользовались следующей процедурой. На ранних стадиях предполагается, что маленький стебель Маха прямолинеен и направлен по радиусу, как на рис. 8.12. Если длина этого стебля составляет $b = b(\varphi)$, где φ — угол, отсчитываемый

от передней точки, а радиус цилиндра нормирован на единицу, то невозмущенные лучи, лежащие в трубке с площадью $A_0 =$

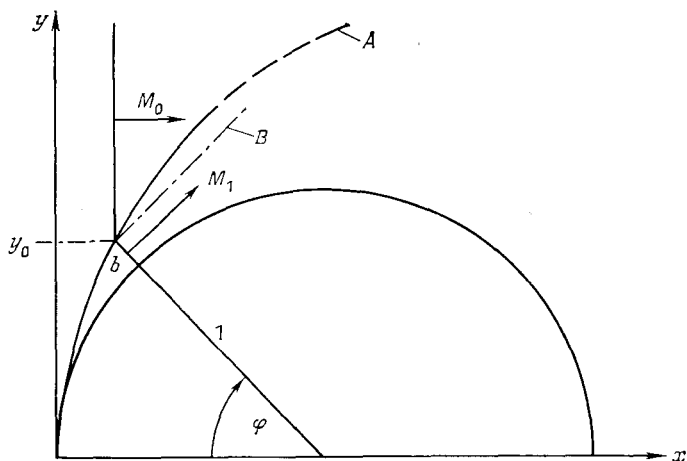


Рис. 8.12. Дифракция ударной волны на сфере и цилиндре.

A — вторичная ударная волна, B — луч.

$= (1 + b) \sin \varphi$, проходят через площадь $A_1 = b$. Поэтому

$$\frac{b}{(1+b) \sin \varphi} = \frac{f(M_1)}{f(M_0)}. \quad (8.98)$$

Поскольку α непрерывна на вторичной ударной волне и $\alpha = x/M_0$ в невозмущенной части ударной волны, то $\alpha = \{1 - (1+b) \cos \varphi\}/M_0$. Число Маха M определяется равенством

$$\frac{1}{M} = |\nabla \alpha| = \frac{\partial \alpha}{R \partial \varphi}$$

для данного радиуса R . Объединяя эти два равенства и принимая среднее значение $R = 1 + \frac{1}{2} b$ для M_1 , получаем

$$\frac{M_0}{M_1} = \frac{1}{1+b/2} \frac{d}{d\varphi} \{1 - (1+b) \cos \varphi\}. \quad (8.99)$$

Уравнения (8.98) и (8.99) дают дифференциальное уравнение для $b(\varphi)$, которое следует решить с начальным условием $b = 0$ при $\varphi = 0$. Для сильных ударных волн с $M_0 \gg 1$ это уравнение таково:

$$\frac{db}{d\varphi} = (1+b) \operatorname{tg} \varphi - \frac{1+b/2}{\cos \varphi} \left[\frac{b}{(1+b) \sin \varphi} \right]^{1/n}. \quad (8.100)$$

Для малых φ

$$b = \sin^{n+1} \varphi, \quad \varphi \ll 1.$$

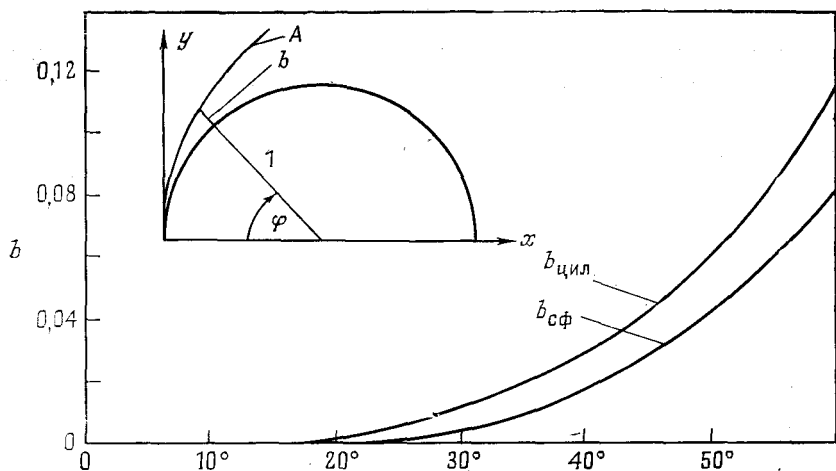


Рис. 8.13. Длина стебля Маха для вторичной ударной волны. A — вторичная ударная волна. По оси абсцисс отложены значения φ .

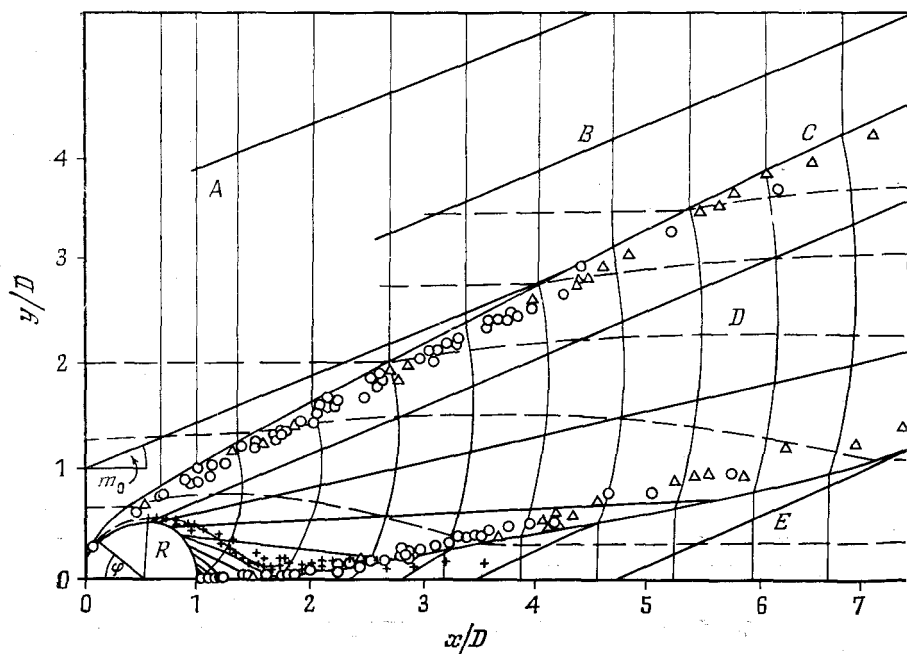


Рис. 8.14. Дифракция на цилиндре при $M_0 = 2,81$ (по Брисону и Гроссу [11]). A — экспериментально найденные тройные точки, B — характеристики, C — вторичная ударная волна 1, D — лучи, E — вторичная ударная волна 2.

Решение уравнения (8.100) изображено на рис. 8.13. Брисон и Гросс используют это решение вплоть до $\varphi = 45^\circ$, а затем переходят к подробному характеристическому решению. Когда два стебля Маха пересекаются в задней критической точке, за цилиндром образуется другая вторичная ударная волна. Результаты приводятся на рис. 8.14 и сравниваются с экспериментальными данными. Теоретически найденные положения ударной волны и двух вторичных ударных волн соответствуют сплошным линиям, а лучи — штриховым. Кружками и треугольниками отмечены экспериментальные точки для положений вторичной ударной волны с числами Рейнольдса $Re = 7,79 \cdot 10^4$ и $Re = 0,87 \cdot 10^4$ соответственно. В эксперименте около фронта возникал вихрь, траектория которого нанесена крестиками; этот вихрь, конечно, не описывается нашей простой теорией. Теневые фотографии картины течения представлены на рис. 8.15a, 8.15b и 8.15c.

Дифракция на конусе или сфере

Для трехмерных задач используется исходная система уравнений (8.50) — (8.52). Для осесимметричных задач первые два уравнения принимают вид

$$\alpha_x^2 + \alpha_r^2 = \frac{1}{M^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{rM}{A} \alpha_x \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{rM}{A} \alpha_r \right) = 0,$$

где x — расстояние вдоль оси вращения, а r — радиальное расстояние. Опять удобно ввести лучевой угол θ равенствами

$$\alpha_x = \frac{\cos \theta}{M}, \quad \alpha_r = \frac{\sin \theta}{M}$$

и работать с системой

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\sin \theta}{M} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\cos \theta}{M} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{r \cos \theta}{A} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r \sin \theta}{A} \right) = 0, \quad (8.101)$$

$$\frac{A}{A_0} = \frac{f(M)}{f(M_0)}.$$

На границе имеем $\operatorname{tg} \theta = r'_w(x)$ при $r = r_w(x)$.

Для дифракции на конусе решение является автомодельным и все величины зависят лишь от r/x . Уравнения (8.101) можно свести к обыкновенным дифференциальным уравнениям, которые следует решать совместно с условиями на стенке и на вторичной ударной волне. Детали приведены в оригинальной статье (Уизем [9]). Брисон и Гросс обобщили вычисления и сравнили результаты

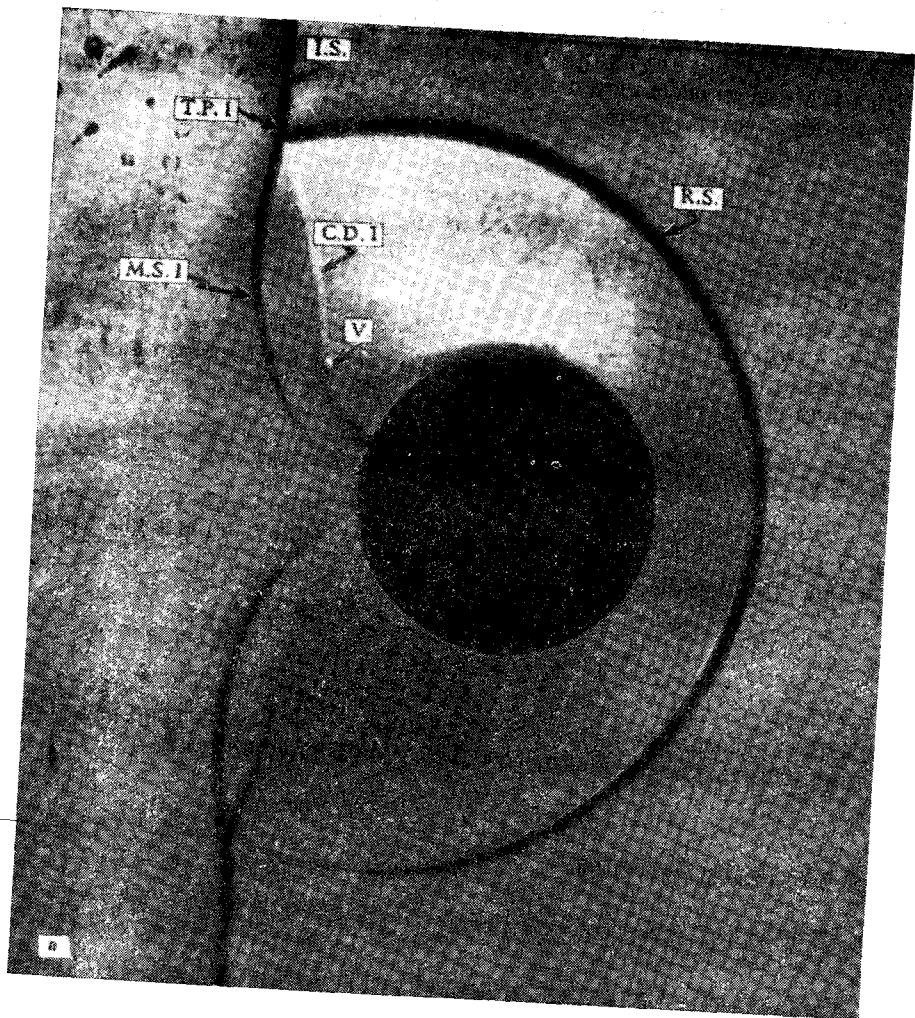
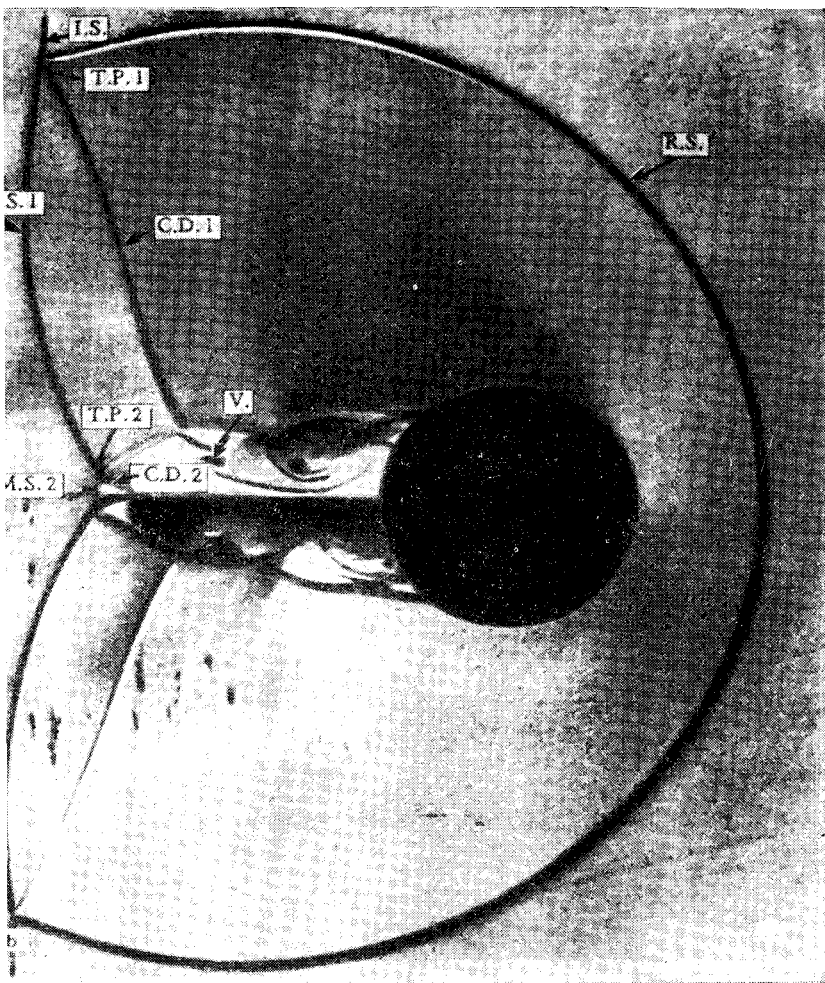


Рис. 8.15а. Теневая фотография дифракции ударной волны на цилиндре диаметром 0,5 дюйма (1,27 см) при $M_0 = 2,82$. Видна начальная стадия отрыва пограничного слоя. (По Брисону и Гроссу [1]).

Обозначения: I.S.— исходная ударная волна; M.S.— ударная волна Маха; R.S.— отраженная ударная волна; C.D.— контактный разрыв; T.P.— тройная точка; V.— вихрь.



8.15b. Теневая фотография дифракции ударной волны на цилиндре диаметром 0,5 дюйма при $M_0 = 2,81$. (По Брисону и Гроссу [1]).
 Обозначения те же, что на рис. 8.15а.

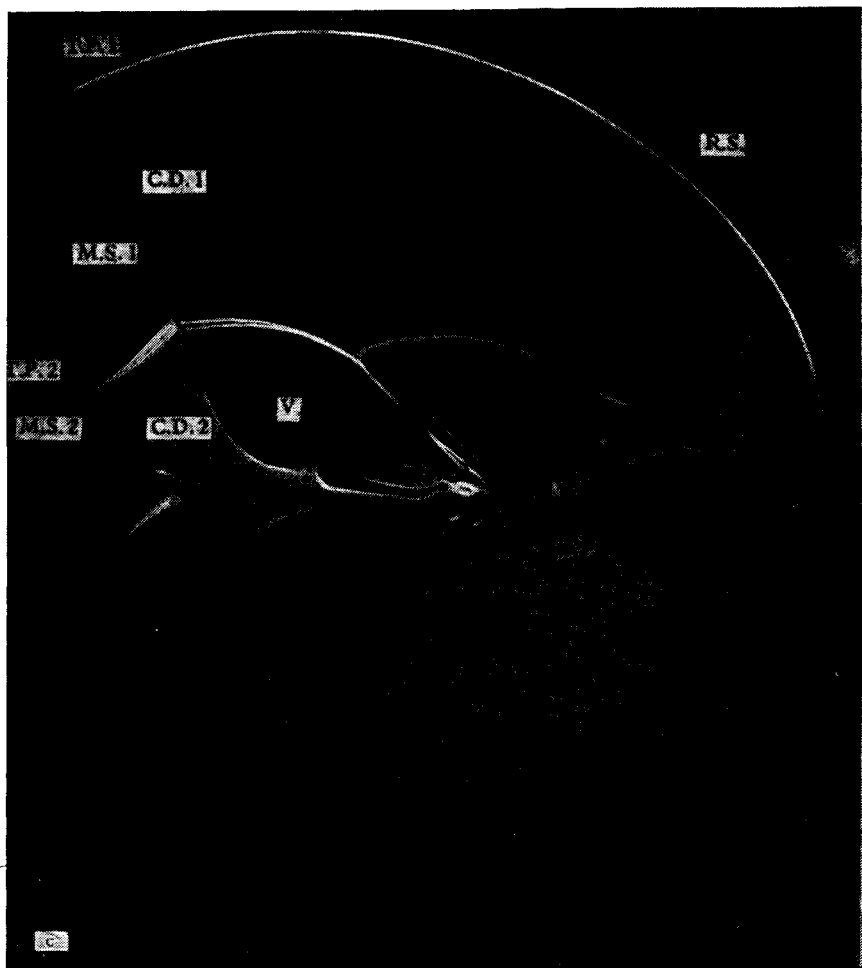


Рис. 8.15с. Теневая фотография дифракции ударной волны на цилиндре диаметром 0,5 дюйма при $M_0 = 2,84$. (По Брисону и Гроссу [1].)
Обозначения те же, что на рис. 8.15а.

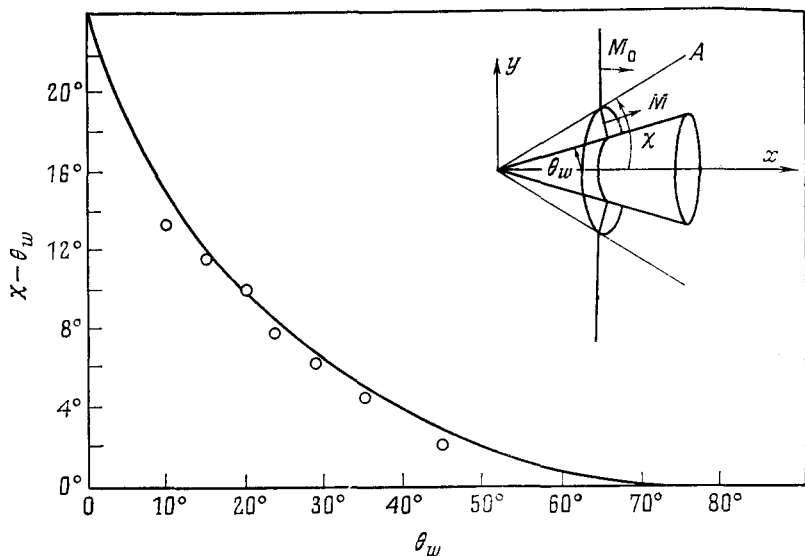


Рис. 8.16. Сравнение теоретических (сплошная кривая) и экспериментальных (кружки) результатов для угла вторичной ударной волны при дифракции на конусе (по Брисону и Гроссу [1]). A — вторичная ударная волна.

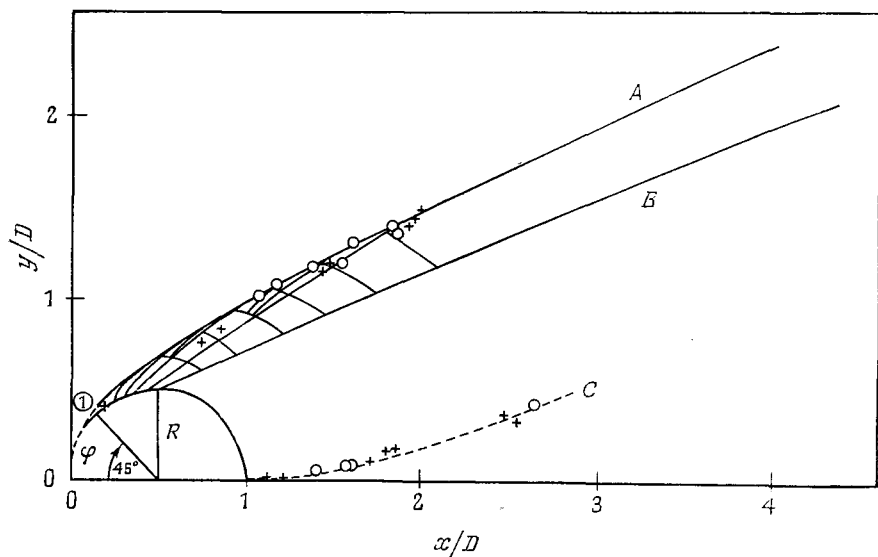


Рис. 8.17. Дифракция на сфере. Кружки соответствуют случаю $M_0 = 2,85$, крестики — $M_0 = 4,41$ (по Брисону и Гроссу [1]). A — вторичная ударная волна 1, B — характеристики, C — тройная точка 2.

с экспериментальными данными. На рис. 8.16 проведено сравнение для зависимости угла вторичной ударной волны χ от угла границы θ_w при $M_0 = 3,68$.

В случае сферы Брисон и Гросс проделали вычисления для системы (8.101) методом характеристик. Вычисления в окрестности передней критической точки проводились приближенным методом, аналогичным методу, использованному ими для цилиндра. Полученные результаты не так полны, как для цилиндра, но согласование между теорией и экспериментом, показанное на рис. 8.17, столь же хорошо.

8.8. Устойчивость ударных волн

Рассматриваемая теория позволяет получить количественную оценку эффектов, на которые всегда ссылаются при объяснении устойчивости плоских ударных волн. Предположим, что по какой-либо причине на ударной волне образовалось вздутие, изображенное на рис. 8.18. Отставшая часть соответствует вогнутому участку фронта и, следовательно, будет усиливаться по мере распространения. Усиливаясь, она будет ускоряться и таким образом вздутие будет сглаживаться. Аналогичным образом любая часть ударной волны, выдающаяся вперед, ослабляется и замедляется. Общим результатом является устойчивость. Рассуждения об изменении интенсивности волны в зависимости от кривизны количественно выражаются соотношением между A и M .

В линейной геометрической оптике вогнутая часть волнового фронта приводит к каустике, поскольку линейные лучи ортогональны исходному волновому фронту и образуют огибающую (см. стр. 239—240 выше). По мере того как волновой фронт распространяется по сходящейся трубке лучей, он усиливается и его интенсивность неограниченно возрастает при приближении к каустике. Но в линейной теории скорость возмущений неизменна, и поэтому лучи остаются прямыми. В развиваемой здесь нелинейной теории ударная волна по мере усиления ускоряется. Это как бы расталкивает лучи, и не получается ни наложений, ни каустики. Возмущение обгоняет ударную волну, как показано на рис. 8.18, и выравнивается, расплываясь вдоль ударной волны.

Подробно задача формулируется как задача Коши с начальными значениями M и θ , заданными на исходной ударной волне. В двух измерениях эта задача полностью аналогична задаче, рассмотренной в § 6.12. Имеется исходная область взаимодействия, а затем возмущение разделяется на две простые волны, движущиеся в положительном и отрицательном направлениях вдоль ударной волны. Для каждой из них полные изменения θ и M будут равны нулю, так что они в конце концов превратятся в N -волны

с вторичными ударными волнами впереди и сзади и линейным убыванием θ между ними. Форма ударной волны будет соответствовать рис. 8.18. Подробные вычисления здесь приводиться не

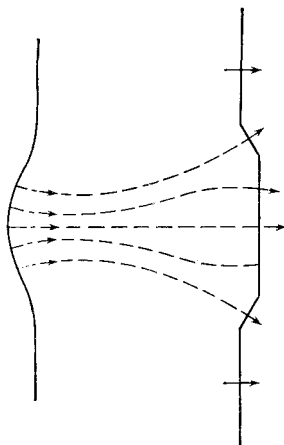


Рис. 8.18. Схема положений ударной волны (сплошные кривые) и лучей (штриховые кривые) для нелинейного распада каустики.

будут. Согласно общим результатам, установленным ранее, вторичная ударная волна затухает как $t^{-1/2}$. Для равномерно распределенного начального возмущения типа синусоиды возмущение затухает как $1/t$ (см. § 2.8).

Устойчивость сходящихся цилиндрических ударных волн

Возникает интересный и важный вопрос об устойчивости сходящихся цилиндрических и сферических ударных волн. Ожидаемое высокое давление в центре будет значительно ослаблено несовершенной фокусировкой. В экспериментах Перри и Кантровица [1] были обнаружены очень симметричные формы для слабых и умеренных ударных волн и некоторые признаки неустойчивости для сильных ударных волн, хотя выводы не представляются достаточно четкими.

Интересно проанализировать этот вопрос, используя нашу теорию. Локальные выпуклости на ударной волне будут проявлять тенденции, описанные для плоских ударных волн, но на них накладываются общее движение к центру и усиление волны в целом. Отставшие части будут проявлять тенденцию к усилению, но другие части уже усилились за счет общего движения и близости к центру, так что отставшие части могут продолжать запаздывать и, возможно, отставать все больше и больше. Пока радиус

достаточно велик, кажется ясным, что поведение будет близким к плоским волнам и распространение будет устойчивым. Поэтому вопрос касается поведения ударной волны вблизи центра, где ее интенсивность велика.

Задача для сильных цилиндрических ударных волн была исследована Батлером [2] при помощи метода малых возмущений, неявно включавшего приближения теории трубок лучей. В развитой здесь общей формулировке она решается проще и без использования предположения о малости возмущений. Для сильных ударных волн двумерные уравнения (8.59) — (8.61) принимают вид

$$\frac{\partial \theta}{\partial \beta} + \frac{n M_0^n}{M^{n+2}} \frac{\partial M}{\partial \alpha} = 0, \quad (8.102)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \alpha} + \frac{M^n}{M_0^n} \frac{\partial M}{\partial \beta} = 0. \quad (8.103)$$

Симметричное решение для ударной волны с исходным радиусом R_0 дается формулами

$$\theta = -\frac{\beta}{R_0}, \quad M = M_0 \left(-\frac{n+1}{n} \frac{M_0 \alpha}{R_0} \right)^{-1/(n+1)}, \quad \alpha < 0. \quad (8.104)$$

Как и следовало ожидать, оно совпадает с решением Гудерлея.

Для изучения возмущений этого решения используем преобразование годографа уравнений (8.102) и (8.103) и поменяем ролями зависимые и независимые переменные. Это приводит к линейным уравнениям без каких-либо ограничений величины возмущений. Сначала введем новые переменные

$$q = \left(\frac{M}{M_0} \right)^{n+1}, \quad \Theta = \frac{(n+1)\theta}{\sqrt{n}}, \quad s = \frac{M_0 \alpha}{\sqrt{n}};$$

тогда уравнения (8.102) и (8.103) перейдут в следующие:

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial s} + q^2 \frac{\partial \Theta}{\partial \beta} &= 0, \\ \frac{\partial \Theta}{\partial s} + \frac{\partial q}{\partial \beta} &= 0. \end{aligned} \quad (8.105)$$

В этих переменных симметричное решение имеет вид $q \propto 1/s$, $\Theta \propto \beta$. При преобразовании годографа β и s рассматриваются как функции от q и Θ . Формулы преобразования таковы: $\Theta_\beta = J s_q$, $\Theta_s = -J \beta_q$, $q_\beta = -J s_\Theta$, $q_s = J \beta_\Theta$, где J — якобиан $\partial(q, \Theta)/\partial(s, \beta)$. Уравнения (8.105) принимают вид

$$\beta_\Theta + q^2 s_q = 0, \quad \beta_q + s_\Theta = 0.$$

Исключив β , получим одно уравнение

$$q^2 s_{qq} + 2q s_q = s_{\Theta\Theta}. \quad (8.106)$$

Решая его методом разделения переменных, находим

$$s = q^\mu e^{im\Theta}, \quad \mu = -\frac{1}{2} \pm \left(\frac{1}{4} - m^2\right)^{1/2}. \quad (8.107)$$

Если $m = 0$, то при $\mu = -1$ имеем симметричное решение. Если $m \geq 1$, то $\text{Re } \mu = -1/2$. Следовательно, при приближении ударной волны к центру, когда $q \rightarrow \infty$, гармоники доминируют над симметричной модой. Поэтому ударная волна оказывается неустойчивой.

Мнимая часть показателя степени μ указывает, что возмущение состоит из волн, распространяющихся по ударной волне. Когда возмущение становится большим, якобиан J может обратиться в нуль. Это означает, что отображение (q, Θ) -плоскости на (s, β) -плоскость перестает быть взаимно однозначным, что соответствует появлению вторичных ударных волн. Когда достигается эта стадия, дальнейшие расчеты следует проводить численно в (s, β) -плоскости.

8.9. Распространение ударной волны в движущейся среде

При рассмотрении возмущений в движущейся среде из линейной теории можно заключить, что лучи не ортогональны к волновым фронтам (см. § 7.9 и рис. 7.12). Соответственно мы не можем ожидать, что в нелинейной теории лучи будут ортогональны ударным волнам. На первый взгляд это приводит к затруднениям поскольку нелинейная формулировка опирается на ортогональность при сравнении распространения в трубке лучей с распространением по данному каналу. Однако выход состоит в том, чтобы в качестве пробного случая рассмотреть распространение возмущений в *однородном* потоке.

В системе отсчета, движущейся с потоком, применима старая формулировка, и остается только совершить преобразование Галилея к другой движущейся системе, чтобы получить правильную формулировку для движущейся среды. Тогда, как и ожидалось, лучи уже не будут ортогональны ударным волнам. Эта задача была решена автором (Уизем [12]), а приложения указаны Хупертом и Майлсом [1].

Интересно было бы продолжить это исследование, чтобы увидеть, каким образом можно непосредственно сформулировать теорию для движущейся среды. Все указывает на то, что близость лучей к линиям тока не столь важна, как первоначально представлялось, и это может привести к новым точкам зрения.

Глава 9

РАСПРОСТРАНЕНИЕ СЛАБЫХ УДАРНЫХ ВОЛН

Как было указано в начале гл. 8, можно развить другой подход и охватить другой класс задач, связанный с ударными волнами сравнительно малой интенсивности. Геометрические эффекты вводятся теперь без изменения из линейной теории, после чего мы в состоянии справиться с более общими нелинейными взаимодействиями внутри волнового профиля. Приближенные методы будут развиты для нестационарных волн, первыми примерами которых явятся сферические и цилиндрические волны. Затем будет более детально исследована задача о звуковом ударе, являющаяся, по-видимому, наиболее интересным приложением теории слабых ударных волн.

Неприятности от звуковых ударов принимают угрожающие размеры, но фактически эти удары представляют собой чрезвычайно слабые ударные волны и естественная цель — сделать их еще слабее. Максимальное избыточное давление у поверхности Земли для современных и проектируемых сверхзвуковых лайнеров составляет около 2 фунт/фут² (т. е. около 0,15 кГ/см². — *Перев.*), что соответствует ударной волне интенсивности порядка 10⁻³. Основную задачу для постоянной скорости и траектории полета можно рассматривать как задачу о стационарном сверхзвуковом обтекании, так что здесь будет продолжено развитие теории, изложенной в § 6.17.

9.1. Метод введения нелинейности

Геометрические эффекты в простейшей форме возникают при рассмотрении сферических волн. Если линеаризованная теория описывается волновым уравнением, то решение для расходящейся сферической волны имеет вид ¹⁾

$$\varphi = \frac{f(t - r/c_0)}{r}, \quad (9.1)$$

¹⁾ В § 7.3 для радиальных расстояний в сферической и цилиндрической геометрии было удобнее использовать различные обозначения, а именно R и r , поскольку решение для точечного источника использовалось для построения решения для линейного источника. В этом больше нет необходимости, и мы используем обозначение r в обоих случаях.

где c_0 — скорость распространения возмущения. Амплитуда затухает как $1/r$, в то время как площадь поверхности, через которую распространяется энергия, растет как r^2 . Волновой профиль уменьшается за счет множителя $1/r$, но в остальном не изменяется. Если этот результат является линеаризованным решением соответствующей нелинейной задачи, то, как мы знаем, нелинейное искажение профиля является определяющим при правильном описании опрокидывания волны и распространения ударной волны. Предположим, что истинная нелинейная скорость распространения возмущения, определяемая из характеристических уравнений, равна $c(\varphi)$ (линеаризованная скорость c_0 равна ее значению при $\varphi = 0$). Тогда можно ввести нелинейное искажение, модифицировав (9.1) следующим образом:

$$\varphi = \frac{f(\tau)}{r}, \quad (9.2)$$

где $\tau(t, r)$ выбирается так, чтобы на кривых $\tau = \text{const}$ выполнялось точное характеристическое соотношение, т. е. мы требуем, чтобы

$$\frac{dr}{d\tau} = c(\varphi) \quad \text{при } \tau = \text{const}. \quad (9.3)$$

Поскольку φ определена как функция от τ и r , эти соотношения дают дифференциальное уравнение для τ , которое легко проинтегрировать, поменяв ролями r и t . Мы имеем

$$\frac{dt}{dr} = \frac{1}{c\{f(\tau)/r\}} \quad \text{при } \tau = \text{const}; \quad (9.4)$$

отсюда

$$t = \int \frac{1}{c\{f(\tau)/r\}} dr + T(\tau), \quad (9.5)$$

где интегрирование проводится при постоянном значении τ , а $T(\tau)$ — произвольная функция, которая появляется при интегрировании по r . Уравнение (9.5) определяет $\tau(t, r)$ и вместе с соотношением (9.2) дает нелинейную модификацию решения. Этот метод введения нелинейности впервые был предложен Ландау [1], а затем независимо автором в связи с задачей о звуковом ударе (Уизем [1—3]).

Функция $T(\tau)$ связана с произволом в выборе характеристической переменной. Как только $T(\tau)$ выбрана, $f(\tau)$ определяется из соответствующих граничных условий на источнике. Различные способы выбора $T(\tau)$ компенсируются выбором $f(\tau)$. В общей теории ради простоты можно положить $T(\tau) = \tau$, но в конкретных задачах иногда полезна дополнительная свобода выбора. Следует отметить, что функции f в линейном решении (9.1) и в нелинейном варианте (9.2) будут совпадать лишь в том случае,

когда $T(\tau)$ выбрана так, что $\tau = t - r/c_0$ (с достаточной точностью) там, где накладываются граничные условия.

Конечно, эта нелинейная модификация решения обычно не удовлетворяет заданным нелинейным уравнениям точно, да пока она еще и не обоснована даже как формальное приближение. Однако чувствуется, что она улавливает важные нелинейные эффекты для малых ϕ . В более простом случае, рассмотренном в § 2.10, а также в случае плоских волн, мы видели, что линеаризация характеристик была источником неравномерности аппроксимации. Нелинейность вносит искажения и в амплитудный множитель $1/r$, но можно ожидать, что эта вторая модификация будет равномерно малой по ϕ . Сформулированная точка зрения будет подтверждена впоследствии, когда мы приступим к более тщательному оправданию этого метода. Для того чтобы увидеть полностью его возможности, мы сначала обсудим дальнейшие следствия и обобщения.

Поскольку для сферических волн решение ϕ имеет особенно простой вид, интеграл в (9.5) поддается изучению и упрощается заменой переменной интегрирования на $f(\tau)/r$. В других задачах, однако, соответствующие выражения менее удобны и полезно наметить общую схему анализа. Используя в качестве отправного пункта линеаризованное решение, мы уже предположили, что ϕ мало, и поэтому корректно заменить $c(\phi)$, скажем на $c_0 + c_1\phi + + O(\phi^2)$ и использовать (9.3) в приближенном виде

$$\frac{dt}{dr} = \frac{1}{c_0} - \frac{c_1}{c_0^2} \phi. \quad (9.6)$$

Разложение по степеням ϕ проводится для dt/dr , а не для dr/dt , ввиду последующего интегрирования по r . Тогда (9.4) принимает вид

$$\frac{dt}{dr} = \frac{1}{c_0} - \frac{c_1}{c_0^2} \frac{f(\tau)}{r} \quad \text{при } \tau = \text{const}, \quad (9.7)$$

а характеристиками становятся кривые

$$t = \frac{r}{c_0} - \frac{c_1}{c_0^2} f(\tau) \ln r + T(\tau). \quad (9.8)$$

В линейной теории мы положили бы характеристическую переменную τ равной $t - r/c_0$ или функции от этой разности. Мы видим, что такая линейная аппроксимация неравномерна, поскольку дополнительный член *стремится к бесконечности* при $r \rightarrow \infty$. Член $c \ln r$ мал по сравнению с r , но его следует сравнивать скорее с выражением $c_0 t - r$, характеризующим расстояние от переднего фронта волны. Предположение, что поправка к скорости распространения будет определяющей, подтверждается, и возникает аналогия с ситуацией, рассмотренной в § 2.10.

Замена уравнения (9.4) приближенным выражением (9.6) — не только упрощение. В большинстве задач оказывается действитель-

но бессмысленным сохранять члены высшего порядка по φ , поскольку само выражение (9.2) верно только с точностью до членов второго порядка по φ .

Сингулярное поведение $\ln r$ при $r \rightarrow 0$ не вносит каких-либо особых неудобств, поскольку поправочный член несуществен вблизи начала координат, где можно вернуться к линейной теории. Однако, чтобы использовать выражение (9.8), как оно есть, следует исключить начало координат и применять это решение вне некоторой сферы $r = r_0(t)$, на которой заданы граничные условия. (Например, источник жидкости можно представить в виде расширяющейся сферы, раздвигающей жидкость.) Тогда $T(\tau)$ можно выбрать так, чтобы уравнение (9.8) имело вид

$$t = \frac{r}{c_0} - \frac{c_1}{c_0^2} f(\tau) \ln \frac{r}{r_0(\tau)} + \tau. \quad (9.9)$$

При таком выборе нелинейная характеристическая переменная τ совпадает с $t - r/c_0$ на граничной поверхности и функция f будет такой же, как и в линейной теории.

Волны, описываемые формулами (9.2) и (9.8), будут опрокидываться, как только появится огибающая характеристик и решение станет многозначным. Если $c_1 > 0$, то волна, несущая возмущение φ , опрокинется. Например, для $T'(\tau) > 0$ это означает, что опрокидывание происходит, когда $f'(\tau) > 0$. На огибающей

$$\frac{c_1}{c_0^2} f'(\tau) \ln r - T'(\tau) = 0.$$

Для волны, определяемой соотношением (9.9), опрокидывание впервые произойдет на расстоянии, равном

$$\ln \frac{r}{r_0(\tau_m)} \approx \frac{c_0^2}{c_1 f'(\tau_m)}, \quad (9.10)$$

где τ_m — точка максимума для $f'(\tau)$. Затем следует ввести ударную волну. Метод введения ударной волны будет следовать известной нам схеме, и мы пока отложим его рассмотрение.

Рассмотрим теперь обобщения этого метода. Прежде всего линейные решения могут быть не такими простыми, как (9.1). Например, в случае цилиндрических волн решение (7.29) имеет вид

$$\varphi = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{t-r/c_0} \frac{q(\eta) d\eta}{V(t-\eta)^2 - r^2/c_0^2}. \quad (9.11)$$

Характеристическая переменная $t - r/c_0$ ясно видна в верхнем пределе, но как t , так и r входят также и в подынтегральное выражение. Однако результаты для плоских и сферических волн свидетельствуют о том, что нелинейные эффекты становятся важными на больших расстояниях, а на больших расстояниях,

согласно (7.32),

$$\varphi \sim \frac{f(t-r/c_0)}{r^{1/2}}. \quad (9.12)$$

Следовательно, на больших расстояниях нелинейность можно ввести почти также, как и в сферическом случае. Если истинная скорость распространения составляет $c(\varphi) = c_0 + c_1\varphi + O(\varphi^2)$, то положим

$$\varphi = \frac{f(\tau)}{r^{1/2}}, \quad (9.13)$$

$$\frac{dt}{dr} = \frac{1}{c_0} - \frac{c_1}{c_0^2} \frac{f(\tau)}{r^{1/2}},$$

$$t = \frac{r}{c_0} - \frac{2c_1}{c_0^2} f(\tau) r^{1/2} + \tau. \quad (9.14)$$

Здесь функция $T(\tau)$, получающаяся при интегрировании по r , положена равной τ ; поправочный член остается малым при $r \rightarrow 0$, и нет необходимости в более тщательном выборе $T(\tau)$. Снова линейная теория, в которой $\tau = t - r/c_0$, приводит к неравномерной аппроксимации при $r \rightarrow \infty$. Далее, хотя до сих пор основное внимание уделялось поведению на больших расстояниях, отклонение характеристики от прямолинейной зависит от

$$\frac{f(\tau) r^{1/2}}{t - r/c_0}, \quad (9.15)$$

а это отношение велико как при больших r , так и вблизи $t - r/c_0 = 0$. Таким образом, нелинейные поправки будут одинаково важными и вблизи волнового фронта $t - r/c_0 = 0$ на всех расстояниях. Существенно, что выражение (9.12) справедливо при $(c_0 t - r)/r \ll 1$, так что оно охватывает оба случая. Соответствующая нелинейная модификация решения, определяемая равенствами (9.13) и (9.14), также применима вблизи фронта волны для всех r . Это имеет решающее значение, поскольку в наиболее интересных задачах на переднем фронте имеется ударная волна и нелинейную модификацию решения, выведенную из (9.13), можно использовать для ее изучения в целом.

Можно построить нелинейную модификацию полного решения, положив

$$\varphi = -\frac{1}{2\pi} \int_0^\tau \frac{q(\eta) d\eta}{V(\tau-\eta)(\tau-\eta+2r/c_0)}, \quad (9.16)$$

и определить отсюда нелинейную характеристическую переменную τ . В этой более полной форме характеристическое уравнение, соответствующее (9.14), становится чрезвычайно сложным, однако дополнительные члены остаются малыми по сравнению

с $f(\tau)r^{1/2}$. Следовательно, для получения нелинейной модификации решения во всей области достаточно взять комбинацию выражений (9.16) и (9.14). Во всяком случае, нелинейная модификация играет первостепенную роль в области $c_0\tau/r \ll 1$, где (9.16) можно аппроксимировать выражением (9.13), в котором

$$f(\tau) = -\frac{1}{2\pi} \left(\frac{c_0}{2} \right)^{1/2} \int_0^\tau \frac{q(\eta) d\eta}{V\tau-\eta}.$$

Следует отметить, однако, что надлежащие граничные условия обычно задаются вне области $c_0\tau/r \ll 1$, так что либо (9.16), либо полное линейное решение, к которому оно сводится, необходимо для определения функции $f(\tau)$, фигурирующей в равенствах (9.13) и (9.14).

Решающая роль геометрической оптики теперь становится очевидной, поскольку (9.12) представляет собой приближение геометрической оптики для цилиндрических волн. В общем случае геометрическая оптика дает геометрию лучей и (для однородной среды) мы имеем

$$\varphi \simeq \Phi(s) f\left(t - \frac{s}{c_0}\right), \quad (9.17)$$

вдоль каждого луча, где s — расстояние по лучу, $\Phi(s)$ — амплитуда, $f(t - s/c_0)$ описывает профиль волны. Это естественная форма нелинейной модификации и она применима как раз там, где нелинейные эффекты наиболее важны — вблизи фронта волны и на больших расстояниях. Для нелинейной модификации следует положить

$$\varphi = \Phi(s) f(\tau), \quad (9.18)$$

$$t = \frac{s}{c_0} - \frac{c_1}{c_0^2} f(\tau) \int_0^s \Phi(s') ds' + T(\tau).$$

Объединив результаты для всех лучей, получим нелинейную модификацию полного решения. Следует отметить, что $c(\varphi)$ означает здесь скорость вдоль луча, что не совпадает с нормальной скоростью волнового фронта для анизотропной среды. Для неоднородной среды c и c_0 могут также зависеть от s . В этом случае s/c_0 заменяется на $\int ds/c_0$, и если величина c_1/c_0^2 зависит от s , то в формуле (9.18) ее следует внести под знак интеграла.

Теперь уместно сравнить данный метод с методом, развитым в предыдущей главе. Грубо говоря, для тех задач $f(\tau)$ была функцией типа ступеньки, так что нелинейное взаимодействие было умеренным и можно было учесть сильные нелинейные эффекты, изменяющие геометрию лучей. Здесь геометрия лучей и ее влияние

на амплитуду $\Phi(s)$ принимаются из линейной теории без изменения, но допускаются более общие профили $f(\tau)$.⁵ Можно предположить, что в еще более общих задачах может понадобиться комбинация обоих подходов, но такой анализ выглядит устранимым.

Второе обобщение рассматриваемого метода связано с тем, что часто нелинейная скорость распространения зависит от производных φ_t и φ_s , а не от самой функции φ . Однако при этом процедура меняется мало. Выражения для φ_t и φ_s выписываются в виде, аналогичном выражению (9.17), и исправленные характеристики определяются из соответствующего разложения

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{c} = \frac{1}{c_0} - \alpha_1 \varphi_t - \alpha_2 \varphi_s \quad \text{при } \tau = \text{const.}$$

В силу (9.17), соответствующие первые члены для φ_t и φ_s равны

$$\varphi_t = \Phi(s) f'(\tau), \quad \varphi_s = -\frac{1}{c_0} \Phi(s) f'(\tau),$$

и характеристическое соотношение принимает вид

$$\frac{\partial t}{\partial s} = \frac{1}{c_0} - k f'(\tau) \Phi(s), \quad k = \alpha_1 - \alpha_2 c_0^{-1}.$$

Характеристики определяются из уравнения

$$t = \frac{s}{c_0} - k f'(\tau) \int_0^s \Phi(s') ds' + T(\tau). \quad (9.19)$$

Типичный пример подобной ситуации связан со сферическими волнами в газовой динамике. Линейная теория — это акустика, и φ_t , φ_r соответствуют возмущениям давления и скорости. Из (7.3) и (7.4) имеем

$$\begin{aligned} \frac{p-p_0}{p_0} &= -\frac{\gamma}{a_0^2} \varphi_t = \frac{\gamma F(t-r/a_0)}{r}, \\ \frac{u}{a_0} &= \frac{1}{a_0} \varphi_r = \frac{F(t-r/a_0)}{r} - \frac{f(t-r/a_0)}{a_0 r^2}, \end{aligned}$$

где $F(\tau) = -f'(\tau)/a_0^2$. Нам потребуется также возмущение скорости звука a , которое определяется равенствами

$$\frac{a-a_0}{a_0} = \frac{\gamma-1}{2\gamma} \frac{p-p_0}{p_0} = \frac{\gamma-1}{2} \frac{F(t-r/a_0)}{r}.$$

Нелинейная модификация решения имеет вид

$$\frac{p-p_0}{p_0} = \frac{\gamma F(\tau)}{r}, \quad \frac{a-a_0}{a_0} = \frac{\gamma-1}{2} \frac{F(\tau)}{r}, \quad (9.20)$$

$$\frac{u}{a_0} = \frac{F(\tau)}{r} - \frac{f(\tau)}{a_0 r^2}, \quad (9.21)$$

где $\tau(t, r)$ следует определять по исправленным характеристикам. Точные характеристические уравнения были приведены выше (см. уравнения (6.135)). Выходящие характеристики имеют скорость $a + u$. Следовательно, для поправки первого порядка к характеристикам имеем

$$\frac{dt}{dr} = \frac{1}{a+u} \simeq \frac{1}{a_0} - \frac{a+u-a_0}{a_0^2}. \quad (9.22)$$

Согласно (9.20) и (9.21), это означает, что

$$\begin{aligned} \frac{dt}{dr} &= \frac{1}{a_0} - \frac{\gamma+1}{2a_0} \frac{F(\tau)}{r} + \frac{1}{a_0^2} \frac{f(\tau)}{r^2}, \\ t &= \frac{r}{a_0} - \frac{\gamma+1}{2a_0} F(\tau) \ln r - \frac{1}{a_0^2} \frac{f(\tau)}{r} + T(\tau). \end{aligned} \quad (9.23)$$

(Соотношение между $F(\tau)$ и $f(\tau)$ принимает вид $f'(\tau) = -a_0^2 F(\tau) T'(\tau)$, если $T'(\tau) \neq 1$.) Поскольку нас интересует область $a_0 \tau / r \ll 1$, а в этой области член $f(\tau)/r$ всегда сравнительно мал, достаточно положить

$$\begin{aligned} \frac{p-p_0}{p_0} &= \frac{\gamma F(\tau)}{r}, \quad \frac{a-a_0}{a_0} = \frac{\gamma-1}{2} \frac{F(\tau)}{r}, \quad u = \frac{F(\tau)}{r}, \\ t &= \frac{r}{a_0} - \frac{\gamma+1}{2a_0} F(\tau) \ln r + T(\tau). \end{aligned} \quad (9.24)$$

Это довольно тривиальный пример, в котором сохраняется лишь приближение геометрической акустики к (9.21) и (9.23). Цилиндрические и другие волны в газовой динамике рассматриваются аналогично, и приближение геометрической акустики дает существенное упрощение, подобное переходу от (9.11) к (9.12).

Если в выражение для s входят производные, то их удобнее считать новыми независимыми переменными. Тогда во всех случаях приближение геометрической оптики приводит к выражениям для этих зависимых переменных, пропорциональным

$$\Phi(s) F(\tau),$$

где $\Phi(s)$ — амплитудная функция, а $F(\tau)$ описывает профиль волны. Уточненная скорость распространения в этом приближении равна

$$c \simeq c_0 + c_0^2 k \Phi(s) F(\tau), \quad (9.25)$$

где коэффициент k — постоянная, определяемая конкретной связью между s и независимыми переменными. Исправленные характеристики удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial t}{\partial s} = \frac{1}{c_0} - k \Phi(s) F(\tau) \quad (9.26)$$

и имеют вид

$$t = \frac{s}{c_0} - kF(\tau) \int_0^s \Phi(s') ds' + T(\tau). \quad (9.27)$$

Построение разрывов

Ударные волны в случае необходимости вводятся с помощью условия на слабом разрыве

$$U = \frac{1}{2} (c_1 + c_2),$$

где U — скорость ударной волны, а c_1 и c_2 здесь означают скорости распространения возмущения на двух сторонах разрыва. В данном случае удобно рассматривать кривые в (s, t) -плоскости, считая t функцией от s , так что условие на разрыве принимается в виде

$$\left(\frac{dt}{ds} \right)_{\text{уд. в}} = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{dt}{ds} \right)_{c_1} + \left(\frac{dt}{ds} \right)_{c_2} \right\}, \quad (9.28)$$

эквивалентном предыдущему с точностью до членов второго порядка относительно отклонений скоростей от c_0 . Если ударная волна описывается уравнением

$$t = \frac{s}{c_0} - G(s),$$

то имеем

$$G'(s) = \frac{1}{2} k \{F(\tau_1) + F(\tau_2)\} \Phi(s),$$

$$G(s) = kF(\tau_1) \int_0^s \Phi(s') ds' - T(\tau_1),$$

$$G(s) = kF(\tau_2) \int_0^s \Phi(s') ds' - T(\tau_2).$$

Таким образом получается типичное соотношение «равных площадей»

$$\frac{1}{2} \{F(\tau_1) + F(\tau_2)\} \{T(\tau_2) - T(\tau_1)\} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} F(\tau) dT(\tau). \quad (9.29)$$

Положение передней ударной волны, движущейся в невозмущенную область, определяется уравнением (9.27), где τ связано с s соотношением

$$\frac{1}{2} kF^2(\tau) \int_0^s \Phi(s') ds' = \int_0^\tau F(\tau') dT(\tau'). \quad (9.30)$$

При $s \rightarrow \infty$ уравнение ударной волны асимптотически переходит в уравнение

$$t = \frac{s}{c_0} - K \left\{ \int_0^s \Phi(s') ds' \right\}^{1/2} + T(\tau_0), \quad (9.31)$$

где

$$K = \left\{ 2k \int_0^{\tau_0} F(\tau) dT(\tau) \right\}^{1/2}, \quad F(\tau_0) = 0. \quad (9.32)$$

На ударной волне параметры течения пропорциональны

$$K\Phi(s) \left\{ \int_0^s \Phi(s') ds' \right\}^{-1/2}. \quad (9.33)$$

Типичная асимптотическая форма волны — это N -волна с уравновешенными ударными волнами, в области между которыми происходит линейное убывание по времени, пропорциональное

$$\Phi(s) \left\{ \int_0^s \Phi(s') ds' \right\}^{-1}. \quad (9.34)$$

Для сферических волн $\Phi(s) = 1/s$ и интенсивность ударной волны (9.33) убывает как $s^{-1} (\ln s)^{-1/2}$, лишь незначительно быстрее, чем затухают линейные импульсы. Для цилиндрических волн $\Phi = s^{-1/2}$ и интенсивность ударной волны убывает как $s^{-3/4}$. Конечно, плоские волны тоже описываются этими формулами; для них Φ постоянная и закон затухания имеет вид $s^{-1/2}$, что согласуется с полученными ранее результатами. Эти асимптотические законы затухания для цилиндрических и сферических волн были получены независимо различными авторами, первым из которых был, вероятно, Ландау [1].

Для более общих двух- и трехмерных волн в однородной среде

$$\Phi(s) \propto A^{-1/2}(s),$$

где $A(s)$ — площадь сечения трубки лучей. Дальнейшие детали и приложения можно найти в ранней работе автора (Уизем [5]). Для неоднородной среды s/c_0 заменяется на $\int ds/c_0$ и все выражения в (9.26), зависящие от s , должны быть включены в $\Phi(s)$.

9.2. Обоснование метода

Существует несколько подходов, при помощи которых можно математически изучить метод введения нелинейности для конкретных систем, и каждый из них отражает свои аспекты этого приближения.

Прежде всего предположим, что нелинейное уравнение для φ имеет вид

$$\varphi_t + (c_0 + c_1\varphi)\varphi_x + \frac{\beta c_0}{x}\varphi = 0. \quad (9.35)$$

В данной ситуации это уравнение предлагается как модель, но впоследствии мы увидим его связь с другими случаями. Линеаризованное уравнение

$$\varphi_t + c_0\varphi_x + \frac{\beta c_0}{x}\varphi = 0 \quad (9.36)$$

имеет решение

$$\varphi = \frac{f(t - x/c_0)}{x^\beta}. \quad (9.37)$$

При $\beta = 1$ это выражение соответствует сферической волне, при $\beta = 1/2$ — цилиндрической. Характеристическая форма уравнения (9.35) записывается так:

$$(c_0 + c_1\varphi) \frac{d\varphi}{dx} = -\frac{\beta c_0}{x}\varphi, \quad (9.38)$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{c_0 + c_1\varphi}. \quad (9.39)$$

Уравнение (9.38) имеет точное решение

$$\varphi e^{c_1\varphi/c_0} = \frac{f(\tau)}{x^\beta}, \quad (9.40)$$

где τ — характеристическая переменная, которую следует определить из уравнения (9.39). Ясно, что выражение

$$\varphi = \frac{f(\tau)}{x^\beta} \quad (9.41)$$

для малых φ является равномерным приближением к (9.40). Это подтверждает основное предположение данного метода. Способ определения переменной τ можно изучить, используя разложения выражений (9.39) и (9.40) по степеням φ , сходящиеся при $|\varphi| < c_0/c_1$. Имеем

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{c_0} + \frac{\gamma_1 f(\tau)}{x^\beta} + \frac{\gamma_2 f^2(\tau)}{x^{2\beta}} + \dots,$$

где коэффициенты γ_n выражаются через c_0 и c_1 ; в частности, $\gamma_1 = -c_1/c_0^2$. Отсюда

$$t = T(\tau) + \frac{x}{c_0} + \frac{\gamma_1 f(\tau)}{1-\beta} x^{1-\beta} + \frac{\gamma_2 f^2(\tau)}{1-2\beta} x^{1-2\beta} + \dots \quad (9.42)$$

(В случае когда $\beta = 1, 1/2$ и т. д., соответствующие степени заменяются логарифмами.) Первое равномерное приближение имеет

вид

$$t = T(\tau) + \frac{x}{c_0} + \frac{\gamma_1 f(\tau)}{1-\beta} x^{1-\beta} \quad (9.43)$$

и согласуется с результатами, вытекающими из (9.41) и уравнения

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{c_0} - \frac{c_1}{c_0^2} \varphi. \quad (9.44)$$

Следовательно, равномерное приближение, полученное из уравнений (9.41) и (9.43), в точности совпадает с приближением метода введения нелинейности. Заметим, что в самом деле было бы бессмысленно добавлять дальнейшие члены в разложение (9.44) без добавления соответствующих членов в приближение (9.41).

Остальные подходы иллюстрируются на примере уравнения для сферических волн в газовой динамике (чтобы сделать выкладки как можно проще), но не вызывает сомнений, что они пройдут (с возможными незначительными изменениями) и в других случаях. Достаточно, опять-таки простоты ради, привести детали лишь для изэнтропического течения, хотя методы не ограничены этим случаем, и даже при наличии ударных волн изменения энтропии для слабых волн не влияют на члены низшего порядка. Полные уравнения были приведены выше (см. уравнения (6.132) — (6.134)), и для изэнтропического течения их можно свести к следующей системе уравнений для скорости звука a и радиальной скорости u :

$$a_t + ua_r + \frac{\gamma-1}{2} a \left(u_r + \frac{2u}{r} \right) = 0, \quad (9.45)$$

$$u_t + uu_r + \frac{2}{\gamma-1} aa_r = 0. \quad (9.46)$$

Разложения по малому параметру

Один очевидный подход состоит в том, чтобы продолжить формальные разложения по малой амплитуде за рамки линейной теории, посмотреть, что будет не так, и внести исправления. Здесь оказывается полезным ввести малый параметр ε в явном виде; например, ε можно положить равным максимальной величине отношения u/a_0 на некоторой исходной поверхности. Тогда формальные разложения примут вид

$$u = \varepsilon u_1(r, t) + \varepsilon^2 u_2(r, t) + \dots,$$

$$a = a_0 + \varepsilon a_1(r, t) + \varepsilon^2 a_2(r, t) + \dots$$

Подставим их в (9.45) и (9.46). Приравнявая коэффициенты при последовательных степенях ε к нулю, получим цепочку систем уравнений для (u_1, a_1) , (u_2, a_2) , ... Очевидно для u_1 и a_1 получим линейные выражения, выведенные ранее; их главные члены

будут пропорциональны $F(t - r/a_0)/r$. Затем находятся выражения для u_2 и a_2 , содержащие члены с $r^{-1} \ln r$, $r^{-2} \ln r$ и r^{-2} . Первый из них несет ответственность за неравномерность, поскольку из-за него отношения u_2/u_1 и a_2/a_1 стремятся к бесконечности при $r \rightarrow \infty$; другие же члены безвредны. Эти выражения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{u}{a_0} &= \varepsilon \left\{ \frac{F(\tau^*)}{r} - \frac{f(\tau^*)}{a_0 r^2} \right\} + \\ &\quad + \varepsilon^2 \left\{ \frac{\gamma+1}{2a_0} \frac{F(\tau^*) F'(\tau^*)}{r} \ln r + \bar{u}_2 \right\} + \dots, \\ \frac{2}{\gamma-1} \frac{a-a_0}{a_0} &= \varepsilon \frac{F(\tau^*)}{r} + \varepsilon^2 \left\{ \frac{\gamma+1}{2a_0} \frac{F(\tau^*) F'(\tau^*)}{r} \ln r + \bar{a}_2 \right\} + \dots, \end{aligned}$$

где τ^* — линеаризованная характеристическая переменная $t - r/a_0$. Здесь $\bar{u}_2$ и $\bar{a}_2$ обозначают члены, равномерно ограниченные по u_1 и a_1 , $F(\tau^*) = -f'(\tau^*)/a_0^2$, как и раньше, а εF теперь заменяет функцию F в (9.20) и (9.21). Мы сразу замечаем, что появление «неправильных» членов можно интерпретировать как следствие неоправданного применения разложений в ряд Тейлора к выражениям

$$\begin{aligned} \frac{u}{a_0} &= \varepsilon \left\{ \frac{F(\tau)}{r} - \frac{f(\tau)}{a_0 r^2} \right\}, \\ \frac{2}{\gamma-1} \frac{a-a_0}{a_0} &= \varepsilon \frac{F(\tau)}{r}, \end{aligned}$$

где

$$\tau = \tau^* + \frac{\gamma+1}{2a_0} \varepsilon F(\tau) \ln r.$$

Но эти выражения в точности совпадают с предложенным нелинейным решением (9.20), (9.21) с переменной τ , определенной как в (9.24), и с $T(\tau) = \tau$. Ситуация очень напоминает ситуацию, рассмотренную в § 2.10. Процедура последовательного подправления ряда Тейлора известна в теории возмущений. Введение произвольной функции $T(\tau)$ вносит больше свободы в выбор характеристической переменной τ , и этот произвол в выборе τ компенсируется при определении функции $F(\tau)$ из граничных условий, так что окончательное решение определяется однозначно.

Предыдущее исследование показывает, что во избежание неравномерностей следует начинать с разложений

$$\begin{aligned} u &= \varepsilon u_1(r, \tau) + \varepsilon^2 u_2(r, \tau) + \dots, \\ a &= a_0 + \varepsilon a_1(r, \tau) + \varepsilon^2 a_2(r, \tau) + \dots, \end{aligned} \quad (9.47)$$

где $\tau = \tau(t, r, \varepsilon)$ выбирается надлежащим образом. Еще лучше добавить к (9.47) разложение

$$t = t_0(r, \tau) + \varepsilon t_1(r, \tau) + \dots \quad (9.48)$$

и определять функцию $t(r, \tau, \varepsilon)$, подбирая $t_1(r, \tau)$, $t_2(r, \tau)$, ... так, чтобы не возникали члены, нарушающие равномерность приближения. В волновых задачах мы ожидаем, что последнее разложение будет определяться требованием, чтобы кривые $\tau = \text{const}$ были характеристиками. (Этот метод «деформированных координат» (strained coordinate) был предложен Лайтхиллом [3] в связи с другими задачами.) Предполагая заранее, что τ окажется характеристической переменной, очевидно предпочтительнее перейти в уравнениях (9.45)–(9.46) к независимым переменным τ и r , полагая $t = t(\tau, r)$. При этом, в силу уравнения для характеристик,

$$\frac{\partial t}{\partial r} = \frac{1}{a+u}. \quad (9.49)$$

Тогда уравнения можно записать в виде

$$\frac{2}{\gamma-1} a_r + u_r + \frac{2au}{a+u} \frac{1}{r} = 0, \quad (9.50)$$

$$\frac{2}{\gamma-1} a_\tau - u_\tau - \left(\frac{2}{\gamma-1} aa_r + uu_r \right) \frac{a+u}{a} t_\tau = 0. \quad (9.51)$$

Система несимметрична вследствие смешанного использования характеристической переменной τ и радиального расстояния r . Однако (9.50) можно рассматривать как характеристическое уравнение для изменений вдоль характеристик $\tau = \text{const}$.

Уравнения (9.49)–(9.51) теперь решаются с помощью разложений (9.47) и (9.48). В низшем порядке уравнение (9.49) дает

$$\frac{\partial t_0}{\partial r} = \frac{1}{a_0},$$

откуда

$$t_0 = \frac{r}{a_0} + T(\tau).$$

Члены первого порядка в (9.50) и (9.51) дают нам уравнения

$$\frac{2}{\gamma-1} a_{1r} + u_{1r} + \frac{2u_1}{r} = 0,$$

$$\frac{2}{\gamma-1} a_{1\tau} - u_{1\tau} - \frac{2}{\gamma-1} a_0 a_{1r} T'(\tau) = 0.$$

При решении этих уравнений следует помнить, что они являются замаскированными линеаризованными уравнениями. Легко проверить, что решение имеет вид

$$\frac{u_1}{a_0} = \frac{F(\tau)}{r} - \frac{f(\tau)}{a_0 r^2},$$

$$\frac{2}{\gamma-1} \frac{a_1}{a_0} = \frac{F(\tau)}{r},$$

где $f'(\tau) = -a_0^2 F(\tau) T'(\tau)$. В следующем порядке (9.49) дает

$$\frac{\partial t_1}{\partial r} = -\frac{u_1 + a_1}{a_0^2}.$$

Отсюда

$$t_1 = -\frac{\gamma+1}{2a_0} F(\tau) \ln r - \frac{1}{a_0^2} \frac{f(\tau)}{r}.$$

Полученные члены низшего порядка в точности совпадают с нелинейной модификацией решения, описанной формулами (9.20) — (9.23), оправдывая, таким образом, наш метод и давая последовательную схему для приближений высших порядков.

Разложения на больших расстояниях

Вариантом этого подхода является использование разложений функций $u(r, \tau)$, $a(r, \tau)$, $t(r, \tau)$ не по степеням малого амплитудного параметра ε , а по отрицательным степеням r (дополненным при необходимости логарифмическими членами) с коэффициентами, зависящими от τ . Это по существу совпадает с подходом, использованным автором в его ранних статьях (Уизем [1, 2]).

Разложение вблизи волнового фронта

Другой подход, не в такой мере использующий разложения по степеням ε , основан на аналогии с простыми волнами в плоском случае. Полная система характеристических уравнений для (9.45)—(9.46) имеет вид

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + (u-a) \frac{\partial}{\partial r} \right\} \left(\frac{2}{\gamma-1} a - u \right) + \frac{2au}{r} = 0, \quad (9.52)$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + (u+a) \frac{\partial}{\partial r} \right\} \left(\frac{2}{\gamma-1} a + u \right) + \frac{2au}{r} = 0. \quad (9.53)$$

В плоском случае член $2au/r$ отсутствует и для простой волны уравнение (9.52) заменяется следующим утверждением: величина

$$\frac{2a}{\gamma-1} - u$$

постоянна всюду. В сферическом случае это заключение в точной формулировке неверно. Однако изменение рассматриваемой римановой переменной будет зависеть от величины интеграла

$$\int_{C_-} 2au \frac{dt}{r},$$

взятого вдоль характеристики C_- . Вблизи фронта волны этот вклад будет малым, поскольку область интегрирования мала (см. рис. 9.1). Относительное изменение римановой переменной за

счет интеграла фактически будет иметь порядок $a_0\tau/r$, поскольку τ дает оценку изменения времени вблизи фронта волны. Далее, из сказанного выше следует, что наибольший интерес представ-

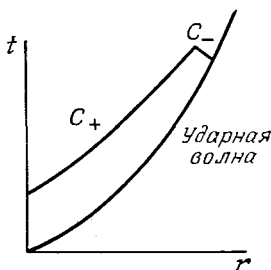


Рис. 9.1. Характеристики и ударная волна в случае сферических волн.

ляет область $a_0\tau/r \ll 1$. Поэтому ясно, что предположение о постоянстве инварианта Римана является в этой области хорошим приближением. Примем в качестве приближения к уравнению (9.52) равенство

$$\frac{2a}{\gamma-1} - u = \frac{2a_0}{\gamma-1}; \quad (9.54)$$

тогда уравнение (9.53) окажется единственным уравнением первого порядка для определения u . При его решении потребуются интегрирование вдоль характеристик C_+ и область интегрирования вдоль C_+ не мала. Это уравнение для u имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \left(a_0 + \frac{\gamma+1}{2} u\right) \frac{\partial u}{\partial r} + \left(a_0 + \frac{\gamma-1}{2} u\right) \frac{u}{r} = 0. \quad (9.55)$$

Оно почти что совпадает с уравнением (9.35) при $\beta = 1$ и может исследоваться аналогичным образом. Полезно также сравнить уравнение (9.55) с уравнением (6.83) для плоского случая. Точное решение (9.55) имеет вид

$$\frac{u}{a_0} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} \frac{u}{a_0}\right)^{2/(\gamma-1)} = \frac{F(\tau)}{r}, \quad (9.56)$$

где τ — характеристическая переменная, которую следует определять из уравнения

$$\frac{\partial \tau}{\partial r} = \left(a_0 + \frac{\gamma+1}{2} u\right)^{-1} \simeq \frac{1}{a_0} - \frac{\gamma+1}{2} \frac{u}{a_0^2}. \quad (9.57)$$

Равномерное приближение имеет вид

$$\frac{u}{a_0} = \frac{F(\tau)}{r}, \quad t = \frac{r}{a_0} - \frac{\gamma+1}{2a_0} F(\tau) \ln r + T(\tau),$$

и, согласно (9.54),

$$\frac{2}{\gamma-1} \frac{a-a_0}{a_0} = \frac{u}{a_0} = \frac{F(\tau)}{r}.$$

Это совпадает с предложенным выше решением (9.24). Следует, однако, отметить, что в этом подходе в отличие от предыдущего мы получаем для u и a только приближения, соответствующие геометрической акустике. Этого вполне достаточно для описания поведения в области $a_0\tau/r \ll 1$, но для определения $F(\tau)$ требуются другие методы.

Когда в головной части волны имеется ударная волна, скачки энтропии и инварианта Римана (9.54) будут величинами третьего порядка по интенсивности ударной волны и не окажут влияния на приближение низшего порядка.

Разложение N -волны

При наличии ударных волн типичное асимптотическое поведение окончательного волнового профиля на больших расстояниях представляется N -волной с центром на предельной характеристике τ_0 . Для сферических волн, уточнив коэффициенты в (9.24), получим

$$\frac{2}{\gamma-1} \frac{a-a_0}{a_0} \sim \frac{u}{a_0} \sim -\frac{2a_0}{\gamma+1} \left\{ t - \frac{r}{a_0} - T(\tau_0) \right\} (r \ln r)^{-1}. \quad (9.58)$$

Это указывает на то, что окончательный профиль в виде N -волны можно получить непосредственно, если искать решения в виде разложений

$$\begin{aligned} u &= v_1(r) (\zeta - \zeta_0) + v_2(r) (\zeta - \zeta_0)^2 + \dots, \\ a &= a_0 + b_1(r) (\zeta - \zeta_0) + b_2(r) (\zeta - \zeta_0)^2 + \dots, \end{aligned} \quad (9.59)$$

где $\zeta = t - r/a_0$ и ζ_0 обозначает асимптотически прямую характеристику между ударными волнами. Если эти разложения подставить в уравнения (9.45) — (9.46), то приравнивание коэффициентов при последовательных степенях $(\zeta - \zeta_0)$ приведет к цепочке уравнений для (v_1, b_1) , (v_2, b_2) , $\dots$. Первая система уравнений такова:

$$b_1 = \frac{\gamma-1}{2} v_1, \quad (9.60)$$

$$\frac{dv_1}{dr} = \frac{\gamma+1}{2} \frac{v_1^2}{a_0^2} - \frac{v_1}{r}. \quad (9.61)$$

Первое уравнение подтверждает соотношение между a и u . Второе уравнение можно переписать в виде

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{v_1 r} \right) + \frac{\gamma+1}{2a_0^2} \frac{1}{r} = 0.$$

и проинтегрировать, что даст

$$v_1 = -\frac{2a_0^2}{\gamma+1} \frac{1}{r \ln r}; \quad (9.62)$$

это подтверждает зависимость от r , указанную в (9.58).

Изложенный простой подход к асимптотическому поведению является одним из выдающихся результатов данной теории. Можно, действуя так же, определить положение ударной волны. Если на фронте ударной волны $\xi - \xi_0 = G(r)$, то (9.59) дает разложения по степеням $G(r)$ для параметров течения на ударной волне. Условие на разрыве (9.28) в данном случае имеет вид

$$\frac{dG}{dr} = -\frac{1}{2} \frac{u+a-a_0}{a_0^2},$$

и при помощи (9.60) — (9.62) находим

$$\frac{dG}{dr} = \frac{1}{2} \frac{G}{r \ln r} + O(G^2);$$

следовательно,

$$G(r) \propto \ln^{1/2} r. \quad (9.63)$$

Это согласуется с выражением (9.34) для сферических волн.

Хотя этот последний метод является, возможно, и наиболее простым и позволяет легко находить поправки высших порядков, он не может предсказать зависимость коэффициентов в уравнении ударной волны и интенсивности ударной волны от исходного источника.

9.3. Звуковые удары

Главной задачей теории звукового удара является определение ударных волн, порождаемых осесимметричным телом в стационарном сверхзвуковом полете.

Исходя из решения этой основной задачи, приходится тем или иным способом учитывать влияние формы тела, ускорения, искривления траектории полета и неоднородности атмосферы.

При решении основной задачи удобно работать в системе отсчета, в которой течение стационарно. Линеаризованная теория была подробно рассмотрена в § 7.5, так что теперь можно ввести нелинейности, пользуясь методом, развитым выше для нестационарных волн. Соответствующая задача для плоского течения, рассмотренная в § 6.17, также дает вклад в этот круг идей.

Пусть скорость U основного течения параллельна оси x , и пусть $U(1+u)$ и Uv — компоненты возмущенной скорости

в x - и r -направлении соответственно. Тогда

$$u = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{x-Br} \frac{S''(\eta) d\eta}{\sqrt{(x-\eta)^2 - B^2 r^2}}, \quad (9.64)$$

$$v = \frac{1}{2\pi r} \int_0^{x-Br} \frac{S''(\eta) d\eta}{\sqrt{(x-\eta)^2 - B^2 r^2}}, \quad (9.65)$$

где $B = \sqrt{M^2 - 1}$, а $S(x)$ — площадь поперечного сечения на расстоянии x от носика тела. Возмущение сосредоточено внутри конуса Маха $x - Br = 0$, образующие которого составляют угол Маха

$$\mu_0 = \arcsin \frac{1}{M} \quad (9.66)$$

с направлением течения. Величина $x - Br$ является линейной характеристической переменной и соответствует выражению

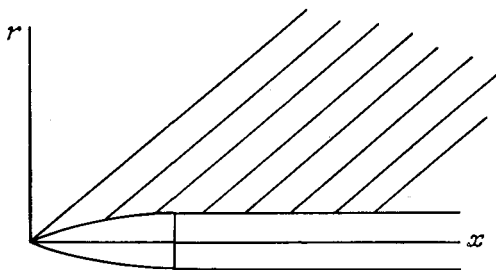


Рис. 9.2. Семейство линейных характеристик при сверхзвуковом обтекании осесимметричного тела.

$t - r/c_0$ при рассмотрении цилиндрических волн. На (x, r) -диаграмме линейные характеристики образуют семейство параллельных прямых, составляющих угол μ_0 с осью x , как показано на рис. 9.2. В области $(x - Br)/Br \ll 1$ можно использовать приближения (7.45) — (7.47). Эта область включает фронт ударной волны и основную часть удаленных областей, и именно в ней нелинейные поправки играют решающую роль. Нелинейные эффекты модифицируют характеристики и вводят ударные волны, как указано на рис. 9.3.

Следуя нашему методу введения нелинейности, заменим $x - Br$ на $\xi(x, r)$, где ξ следует подобрать таким образом, чтобы кривые $\xi = \text{const}$ были достаточно близки к точным характеристикам. Модифицированные выражения для параметров течения

имеют вид

$$u = -\frac{F(\xi)}{\sqrt{2Br}}, \quad v = \frac{BF(\xi)}{\sqrt{2Br}}, \quad (9.67)$$

$$\frac{p-p_0}{p_0} = \gamma M^2 \frac{F(\xi)}{\sqrt{2Br}}, \quad \frac{a-a_0}{a_0} = \frac{\gamma-1}{2} M^2 \frac{F(\xi)}{\sqrt{2Br}}, \quad (9.68)$$

где

$$F(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\xi \frac{S''(\eta) d\eta}{\sqrt{\xi-\eta}}. \quad (9.69)$$

Типичная кривая F была приведена на рис. 7.3. Как указывает соотношение (7.48), $F \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow 0$ и линейная теория

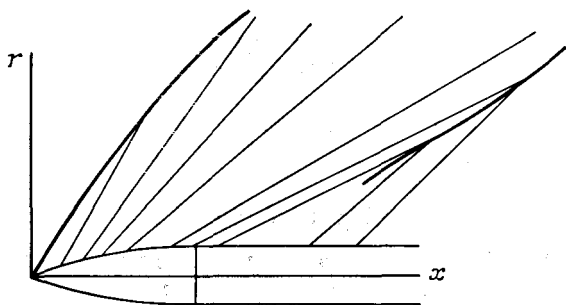


Рис. 9.3. Семейство нелинейных характеристик с ударными волнами при сверхзвуковом обтекании осесимметричного тела.

с $\xi = x - Br$ не предсказывает ударной волны. Ясно, что именно здесь нелинейная модификация сыграет свою решающую роль.

Точные уравнения для безвихревого осесимметричного течения такие же, как и уравнения для плоского течения (6.158) — (6.159), только y заменено на r и в уравнение (6.158) добавлен член $-a^2 v/r$. Поскольку производные высшего порядка остались без изменения, характеристические направления все еще соответствуют углам $\theta \pm \mu$, где θ определяет направление течения, а μ — точный угол Маха, причем $\mu = \arcsin a/q$. В соответствии с этим на кривой $\xi = \text{const}$

$$\frac{dx}{dr} = \text{ctg}(\mu + \theta).$$

Так же как и в задаче для нестационарных волн, достаточно использовать приближение первого порядка теории возмущений, и мы положим

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \text{ctg} \mu_0 - (\mu - \mu_0 + \theta) \text{cosec}^2 \mu_0.$$

С точностью того же порядка

$$\theta \simeq v, \quad \mu - \mu_0 \simeq \frac{a_0}{U} \left(\frac{a - a_0}{a_0} - u \right) \sec \mu_0,$$

откуда

$$\frac{\partial x}{\partial r} = B - \frac{M^2}{B} \left(\frac{a - a_0}{a_0} - u \right) - M^2 v.$$

Подставляя выражения (9.67) и (9.68) для параметров течения, получаем

$$\frac{\partial x}{\partial r} = B - \frac{(\gamma + 1) M^4}{(2B)^{3/2}} \frac{F(\xi)}{r^{1/2}},$$

так что

$$x = Br - kF(\xi) r^{1/2} + \xi, \quad (9.70)$$

где

$$k = \frac{(\gamma + 1) M^4}{2^{1/2} B^{3/2}}. \quad (9.71)$$

Нелинейная модификация решения в области $\xi/Br \ll 1$ дается соотношениями (9.67), (9.68) и (9.70).

Ударные волны

Если $F'(\xi) > 0$, то характеристики накладываются и возникает ударная волна. Как было указано выше, для тела конечных размеров

$$\int_0^\infty F(\xi) d\xi = 0,$$

так что в общем случае существуют две такие области и две ударные волны. Аналогом равенства (9.28) является утверждение, что наклон ударной волны равен среднему арифметическому наклонов характеристик на обеих сторонах, а ударная волна строится совершенно так же. Если ударная волна описывается уравнением

$$x = Br - G(r),$$

то имеем

$$G(r) = kF(\xi_1) r^{1/2} - \xi_1 = kF(\xi_2) r^{1/2} - \xi_2,$$

где

$$\frac{1}{2} \{F(\xi_1) + F(\xi_2)\} (\xi_2 - \xi_1) = \int_{\xi_1}^{\xi_2} F(\xi) d\xi.$$

Для первой ударной волны, перед которой находится невозмущенное течение, $F(\xi_1) = 0$ и ξ_1 можно исключить из рассмотрения.

Тогда, опустив индекс у ξ_2 , получим соотношения

$$\frac{1}{2} k F^2(\xi) r^{1/2} = \int_0^{\xi} F(\xi') d\xi', \quad (9.72)$$

$$x = Br - k F(\xi) r^{1/2} + \xi, \quad (9.73)$$

определяющие ударную волну. Параметры течения непосредственно за ударной волной даются равенствами (9.67) и (9.68), где $\xi(r)$ определяется из (9.72).

Обтекание тонкого конуса

Для конуса с углом полураствора ϵ площадь $S(x) = \pi \epsilon^2 x^2$ и функция F , определяемая по формуле (9.69), принимает вид

$$F(\xi) = 2\epsilon^2 \xi^{1/2}.$$

В этом случае соотношение (9.72) между ξ и r для точек ударной волны записывается так:

$$\xi^{1/2} = \frac{3}{2} k \epsilon^2 r^{1/2},$$

а уравнение ударной волны (9.73) сводится к следующему:

$$x = Br - \frac{3}{4} k^2 \epsilon^4 r.$$

Это соответствует конической ударной волне с углом полураствора

$$\mu_0 + \frac{3}{8} \frac{(\gamma+1)^2 M_0^6}{2(M^2-1)^{3/2}} \epsilon^4. \quad (9.74)$$

Интенсивность ударной волны находится из (9.68):

$$\frac{p-p_0}{p_0} = \frac{3\gamma(\gamma+1) M_0^6}{2(M^2-1)} \epsilon^4. \quad (9.75)$$

Для конуса из соображений размерности следует, что *точное* решение является автомодельным и параметры течения зависят только от r/x . Тогда точные нелинейные уравнения сводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям и интегрируются численно. Это знаменитое решение Тейлора — Макколла [1], которое явилось вехой в развитии теории сверхзвуковых течений. Выражения (9.74) и (9.75) были выведены для тонких конусов в рамках автомодельной теории Лайтхиллом [2]. Они являются основой для ценной проверки результатов более общего подхода для тонких тел. Численные результаты показывают, что выражения (9.74) и (9.75) представляют собой очень хорошие приближения для конусов с углами полураствора до 10° и чисел Маха в интервале примерно от 1,1 до 3,0.

Для тонких тел произвольной формы указанные формулы определяют первоначальное поведение ударной волны. Следует отметить, что в то время, как возмущения около тела имеют порядок $O(\varepsilon^2)$, интенсивность ударной волны является величиной порядка $O(\varepsilon^4)$. Это в известном смысле объясняет отсутствие ударных волн в линейной теории.

*Поведение ударной волны на больших расстояниях
от тела конечных размеров*

Согласно (9.72), для точек на ударной волне $\xi \rightarrow \xi_0$ при $r \rightarrow \infty$, причем $F(\xi_0) = 0$. Тогда вместо (9.72) имеем асимптотическое соотношение

$$F(\xi) \sim \left\{ \frac{2}{k} \int_0^{\xi_0} F(\xi') d\xi' \right\}^{1/2} r^{-1/4}. \quad (9.76)$$

Уравнение ударной волны асимптотически переходит в

$$x \sim Br - \left\{ 2k \int_0^{\xi_0} F(\xi) d\xi \right\} r^{1/4} - \xi_{0*} \quad (9.77)$$

а интенсивность ударной волны определяется так:

$$\begin{aligned} \frac{p-p_0}{p_0} &\sim \frac{\gamma M^2}{(2B)^{1/2}} \left\{ \frac{2}{k} \int_0^{\xi_0} F(\xi) d\xi \right\}^{1/2} r^{-3/4} = \\ &= \frac{2^{1/4} \gamma}{(\gamma+1)^{1/2}} (M^2-1)^{1/8} \left\{ \int_0^{\xi_0} F(\xi) d\xi \right\}^{1/2} r^{-3/4}. \end{aligned} \quad (9.78)$$

Это наиболее важная формула в исследованиях звукового удара. Она показывает, что интенсивность звукового удара у поверхности Земли очень слабо зависит от числа Маха, изменяется с расстоянием как $r^{-3/4}$ и зависит от формы тела за счет множителя

$$K = \left\{ \int_0^{\xi_0} F(\xi) d\xi \right\}^{1/2}. \quad (9.79)$$

Если длина тела равна l , а относительная толщина δ представляет собой отношение максимального диаметра к длине, то множитель $K \propto \delta l^{3/4}$. Для тела, форма которого определяется уравнениями

$$R(x) = \begin{cases} \delta l \left\{ 1 - \left(1 - \frac{x}{l} \right)^3 \right\}, & 0 \leq x \leq l, \\ \delta l, & l \leq x. \end{cases}$$

находим $K = 1,04\delta l^{3/4}$.

Асимптотический волновой профиль имеет форму уравновешенной N -волны. В области между ударными волнами $\xi \sim \xi_0$, $F(\xi) \sim 0$, так что, согласно (9.70),

$$F(\xi) \sim \frac{Br - x + \xi_0}{kr^{1/2}},$$

и, в силу (9.68) и (9.71), отношение давлений равно

$$\frac{p - p_0}{p_0} \sim \frac{\gamma}{\gamma + 1} \frac{(M^2 - 1)^{1/2}}{M^2} \frac{(Br - x + \xi_0)}{r}. \quad (9.80)$$

Течение за задней ударной волной не является невозмущенным, но в нем возмущения имеют порядок меньший, чем для N -волны. Эти и другие детали можно найти в работе автора (Уизем [3]).

Обобщения теории

Может показаться, что осесимметричные тела существенно отличаются от реального летательного аппарата, но известно, что на больших расстояниях от тела конечных размеров поле течения для любого направления можно представить как течение, вызванное эквивалентным телом вращения. Это значит, что выражения (9.67) — (9.69) применимы для любого направления, но каждому направлению будет соответствовать своя функция F . В линейной теории, с которой мы начинаем, вклады от фюзеляжа, крыльев, распределения подъемной силы и т. д. можно учитывать по отдельности и результирующая функция F для каждого направления получается суммированием всех этих вкладов. Затем эта функция F подставляется в формулы для нелинейного решения.

Объемный вклад связан с распределением площади поперечного сечения $S(x)$, где в соответствии со сверхзвуковым правилом площадей плоскости образуют разрезы под углом к потоку. Детали этого метода и нелинейные результаты приведены в статье автора (Уизем [5]). Когда учитываются различные выступы, такие, как крылья, производная $S'(x)$ становится разрывной и следует соответствующим образом изменить выражение (9.69) (Уизем [3]).

Эффекты распределения подъемной силы имеют такую же важность, как и объемные эффекты. В линейной теории распределение подъемной силы $L(x)$ дает вклад

$$\Phi_1 = -\frac{1}{2\pi\rho_0 U} \frac{\cos \tilde{\omega}}{r} \int_0^{x-Br} \frac{(x-\eta) L(\eta)}{\sqrt{(x-\eta)^2 - B^2 r^2}} d\eta \quad (9.81)$$

в потенциал скорости, где $\tilde{\omega}$ — угол между направленной вниз вертикалью и меридиональной плоскостью, проходящей через

траекторию полета. В области $(x - Br)/Br \ll 1$ это выражение можно аппроксимировать так же, как и выше, и возмущения снова даются формулами (9.67) — (9.68), в которых следует положить

$$F(\xi) = \frac{1}{2\pi} \frac{B \cos \tilde{\omega}}{\rho_0 U^2} \int_0^{\xi} \frac{L'(\eta)}{\sqrt{\xi - \eta}} d\eta. \quad (9.82)$$

Это интересная иллюстрация понятия «эквивалентного тела» для асимметричных распределений. Следует отметить, что приближения (9.67) — (9.68) справедливы при $\xi/Br \ll 1$ и их достаточно для определения ударной волны. Однако распределение давления за основной N -волной дает важный вклад в общую подъемную силу, переданную на Землю. Полное выражение имеет вид (9.81), и если потребуется подробная формула для учета подъемной силы, то следует использовать нелинейную модификацию формулы (9.81). Это иногда вызывало недоразумения в литературе, где указывалось, что распределение давления, полученное из равенств (9.68), при интегрировании по поверхности Земли не дает полной подъемной силы $\int_0^{\infty} L(x) dx$. Следует иметь в виду, что выражение (9.68)

применимо только в области основной N -волны, а формула, выведенная из (9.81), суммирует все возмущения и дает полную подъемную силу.

Обобщения на тела, движущиеся с ускорением, и на неоднородные атмосферы (последнее всегда важно в реальной ситуации) можно до некоторой степени провести аналитически. Здесь теория существенно опирается на геометрическую акустику (см. Фридман, Кейн и Синьялла [1] и цитируемую там литературу). Дальнейшие исследования и результаты сравнения с данными испытаний в аэродинамической трубе и с данными наблюдений описаны в серии обзорных статей, опубликованных в *Journal of the Acoustical Society of America* за 1965 г. Подробные сравнения были проведены различными правительственными лабораториями и авиационными компаниями. (Популярный отчет, доступный для неспециалиста и содержащий ряд интересных сопоставлений теории с практикой, представлен в Boeing Document D6A10598-1.) Выводы, по-видимому, состоят в том, что теория дает хорошие результаты и ценный подход к чрезвычайно сложным практическим задачам.

Глава 10

ИЕРАРХИЯ ВОЛН

Свойства семейства гиперболических волн одинаковой природы изучены теперь довольно подробно, включая различные эффекты геометрии, диффузии и затухания. Для завершения этой первой части обсудим ситуацию, когда в одной и той же задаче получаются волны различных порядков. Типичные примеры указывались в гл. 3, где были сделаны некоторые предварительные замечания. Например, потоку транспорта на одном из уровней описания соответствует система уравнений

$$\begin{aligned}\rho_t + (\rho v)_x &= 0, \\ \tau(v_t + vv_x) + \frac{v}{\rho}\rho_x + v - V(\rho) &= 0.\end{aligned}\tag{10.1}$$

Эта система имеет два семейства характеристик с характеристическими скоростями

$$v + \sqrt{v/\tau}, \quad v - \sqrt{v/\tau}.\tag{10.2}$$

Как следствие волны с этими скоростями должны сыграть свою важную роль. Однако упрощенные уравнения

$$\rho_t + (\rho v)_x = 0, \quad v = V(\rho),\tag{10.3}$$

которые считаются хорошим приближением при достаточно малых значениях v и τ , имеют одно семейство характеристик, причем характеристическая скорость не совпадает ни с одной из двух скоростей (10.2), а составляет

$$V(\rho) + \rho V'(\rho).\tag{10.4}$$

Для того чтобы не было противоречия между двумя уровнями описания, волны со скоростью (10.4) также должны играть важную роль в решениях системы (10.1), хотя они больше и не связаны с характеристиками. Наша цель здесь состоит в том, чтобы глубже выяснить роль «волн высшего порядка» (10.2) и «волн низшего порядка» (10.4) и посмотреть, как каждое из этих семейств волн модифицируется наличием другого семейства.

Рассмотрим сначала линеаризованные варианты систем типа (10.1), поскольку в этом случае можно найти (при помощи преобразования Фурье) общие решения типичных задач и затем использовать их для выяснения наиболее характерных черт таких систем. Подобные аналитические решения полных нелинейных систем

редко удается найти, но линейные результаты можно использовать для оценки соответствующего поведения различных нелинейных волн, чтобы на этой основе ввести упрощающие предположения для их приближенного описания.

Когда системы типа (10.1) линеаризованы, то удобнее работать с эквивалентным уравнением второго порядка. Оно имеет общий вид

$$\eta \left(\frac{\partial}{\partial t} + c_1 \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + c_2 \frac{\partial}{\partial x} \right) \varphi + \left(\frac{\partial}{\partial t} + a \frac{\partial}{\partial x} \right) \varphi = 0, \quad (10.5)$$

где коэффициенты постоянны и для определенности принято, что $c_1 > c_2$. С точностью до обозначений это совпадает с уравнением (3.4) для потока транспорта; c_1 и c_2 являются линеаризованными формами выражений (10.2), а именно значениями в невозмущенном потоке, и a — линеаризованной формой (10.4).

Нелинейная система (3.37) для паводковых волн аналогична системе (10.1). Характеристические скорости равны $v \pm \sqrt{g'h}$, но приведенная система (3.38) указывает также на наличие волн низшего порядка со скоростью $3v/2$. Линеаризованное уравнение (3.41) имеет тот же вид, что и уравнение (10.5). Линейное уравнение (3.74), описывающее химические процессы обмена, является точным и соответствует частному виду уравнения (10.5), где одна из скоростей c положена равной нулю. Другие примеры будут упомянуты ниже.

Если рассматриваемая система имеет порядок выше второго, то число сомножителей в левой части уравнения (10.5) соответственно возрастает.

Волны высшего порядка, очевидно, описываются факторизованным оператором в (10.5). Действительно, если бы отсутствовали члены низшего порядка ($\eta = \infty$), то общее решение имело бы вид

$$\varphi = \varphi_1 (x - c_1 t) + \varphi_2 (x - c_2 t). \quad (10.6)$$

С другой стороны, если бы отсутствовали члены высшего порядка ($\eta = 0$), то это решение имело бы вид

$$\varphi = \varphi_0 (x - at). \quad (10.7)$$

Последнее, конечно, соответствует упрощенному уровню описания, линеаризованный вариант которого дается уравнением

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + a \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0. \quad (10.8)$$

Наши вопросы касаются комбинированных систем, различных ролей, которые играют волны на двух уровнях описания, и модификаций выражений (10.6) и (10.7).

Мы можем заранее представить себе, что должно произойти. Поскольку характеристики уравнения (10.5) определяются чле-

нами высшего порядка, то первые сигналы и волновые фронты *должны* перемещаться со скоростями c_1 и c_2 . Но чтобы не возникло противоречие с упрощенным описанием, часть возмущения должна перемещаться со скоростью a . Это изображено на (x, t) -диаграмме, приведенной на рис. 10.1. Когда параметр η уменьшается, первые сигналы должны становиться малыми, основное возмущение должно распространяться со скоростью a и с разумной точностью аппроксимироваться выражением (10.7).

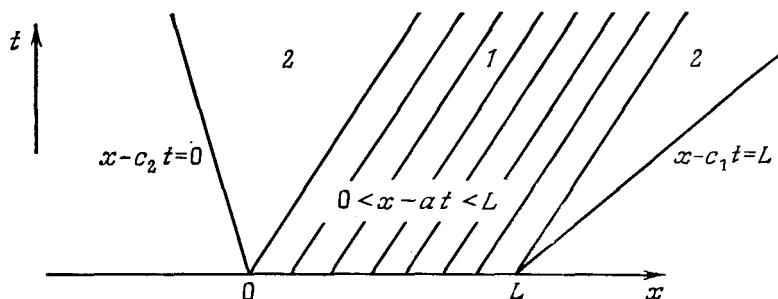


Рис. 10.1. (x, t) -диаграмма для задачи Коши.
1 — основное возмущение, 2 — малые возмущения.

Эта картина имеет смысл только в том случае, когда a лежит между c_1 и c_2 . Но, как мы видели в гл. 3, именно это условие необходимо для устойчивости, так что условие устойчивости тесно связано с идеями распространения волн. Трудно удержаться от высказывания, что неустойчивость, возникающая при a , не лежащем в интервале между c_1 и c_2 , объясняется тем, что в соревновании двух множеств волн волны, распространяющиеся со скоростью a , не могут одержать победу.

Здесь также возникает вопрос о подходящих граничных условиях, так как число граничных условий определяется числом характеристик, направленных в интересующую нас (x, t) -область. Однако число характеристик может меняться при переходе от (10.1) к (10.3) или от (10.5) к (10.8), и требуется разъяснить это кажущееся несоответствие. В силу неравенства

$$c_1 > a > c_2, \quad (10.9)$$

накладываемого устойчивостью, уравнение (10.5) может потребовать лишь *больше* граничных условий, чем (10.8). Когда это имеет место, то между двумя уровнями описания не будет противоречия, если дополнительная информация для уравнения (10.5) будет влиять на решение только в пограничном слое, тонком для малых η , а вне этого слоя решение уравнения (10.5) будет хорошо аппрок-

симироваться решением уравнения (10.8). Соответствующее решение уравнения (10.8) будет удовлетворять только части граничных условий, согласование же с дополнительными граничными условиями будет происходить в пограничном слое.

Детали всех этих рассуждений подтверждаются точными решениями уравнения (10.5). Затем подходящие идеи можно частично перенести на нелинейную ситуацию. В нелинейном случае имеется возможность возникновения ударных волн, и на различных уровнях описания эти волны будут иметь различную структуру. Понимание связей между ударными волнами различных типов приводит к простому критерию, предсказывающему, когда структура ударной волны все еще будет включать разрыв. Примерами таких условий являются неравенства (3.17) и (3.52). Теперь мы сможем рассмотреть эти условия с более общей точки зрения и привести ральнейшие примеры.]

10.1. Точные решения линеаризованной задачи

Исследуем сначала уравнение (10.5) на устойчивость. Элементарное решение имеет вид

$$\varphi = Ae^{ikh - i\omega t},$$

если

$$\eta(\omega - kc_1)(\omega - kc_2) + i(\omega - ka) = 0. \quad (10.10)$$

Для сравнительно коротких волн $kc_1\eta \gg 1$ имеем

$$\omega \simeq \begin{cases} kc_1 - \frac{i}{\eta} \frac{c_1 - a}{c_1 - c_2}, \\ kc_2 - \frac{i}{\eta} \frac{a - c_2}{c_1 - c_2}. \end{cases} \quad (10.11)$$

$$(10.12)$$

Если не будут выполнены условия

$$\eta > 0, \quad c_1 > a > c_2, \quad (10.13)$$

то одно из этих выражений будет иметь положительную мнимую часть, что свидетельствует о неустойчивости. Обратно, легко проверить, что при выполнении этих условий $\text{Im } \omega < 0$ при всех k , так что они полностью обеспечивают устойчивость. Будем теперь считать, что неравенства (10.13) выполнены, и рассмотрим более общие решения.

Основные моменты одинаково хорошо можно выявить как на решении задачи Коши при помощи преобразования Фурье, так и на решении задачи о распространении сигнала при помощи преобразования Лапласа. Мы выбрали последнюю, поскольку она содержит большее число различных частных случаев, зависящих от знаков c_1 , c_2 и a .

Случай $c_1 > a > 0$, $c_2 < 0$. Это простейший случай: поскольку $c_2 < 0$, возникает только c_1 -семейство волн высшего порядка, а поскольку $a > 0$, не существует противоречия между числом граничных условий, накладываемых при $x = 0$. Для уравнения (10.5) корректно поставленная задача в этом случае имеет вид

$$\begin{aligned}\varphi &= \varphi_t = 0, & x > 0, & t = 0, \\ \varphi &= f(t), & x = 0, & t > 0.\end{aligned}\tag{10.14}$$

Для упрощенного уравнения (10.8) начальное условие $\varphi_t = 0$ следовало бы опустить, но в любом случае решение остается тождественно равным нулю для $x > 0$ в течение некоторого интервала времени, так что никакой разницы нет. Используя преобразование Лапласа, будем искать решение уравнения (10.5) в следующем виде:

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{B}} \frac{\tilde{\varphi}(p, x) e^{pt}}{p} dp, \quad t > 0, \tag{10.15}$$

где $\mathcal{B}$ — контур $\operatorname{Re} p = \text{const}$, проходящий правее всех особенностей подынтегрального выражения в комплексной p -плоскости. Подстановка в (10.5) дает

$$\eta c_1 c_2 \tilde{\varphi}_{xx} + \{\eta(c_1 + c_2)p + a\} \tilde{\varphi}_x + p(\eta p + 1) \tilde{\varphi} = 0,$$

и общее решение $\tilde{\varphi}$ имеет вид

$$\tilde{\varphi} = F(p) e^{xP_1(p)} + G(p) e^{xP_2(p)}, \tag{10.16}$$

где P_1 и P_2 — корни уравнения

$$\eta c_1 c_2 P^2 + \{\eta(c_1 + c_2)p + a\} P + p(\eta p + 1) = 0, \tag{10.17}$$

а F и G — произвольные функции. Для больших p

$$P_1 \sim -\frac{p}{c_1}, \quad P_2 \sim -\frac{p}{c_2}.$$

В этом случае, когда $c_1 > 0$, $c_2 < 0$, второй член в (10.16) неограничен для больших значений $\operatorname{Re} p$, так что следует положить $G(p) = 0$; этот член соответствовал бы приходящим волнам со скоростью $c_2 < 0$ и поэтому исключается. Вторая функция $F(p)$ полностью определяется одним граничным условием $\varphi = f(t)$ при $x = 0$. Фактически это требование состоит в том, что $F(p)$ должна быть преобразованием Лапласа функции $f(t)$. Окончательное решение, следовательно, имеет вид

$$\varphi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{B}} \frac{F(p)}{p} e^{pt + P_1(p)x} dp, \tag{10.18}$$

где

$$\begin{aligned} F(p) &= p \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt, \\ f(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{B}} \frac{F(p) e^{pt}}{p} dp, \end{aligned} \quad (10.19)$$

а $P_1(p)$ — корень уравнения (10.17), имеющий асимптотику $-p/c_1$ при $p \rightarrow \infty$.

Когда $t - x/c_1 < 0$, контур можно замкнуть большой полуокружностью в правой полуплоскости и показать, что $\varphi = 0$. Таким образом, волновой фронт описывается уравнением $x - c_1 t = 0$. Поведение φ вблизи волнового фронта определяется более подробным асимптотическим представлением подынтегрального выражения в (10.18) при $p \rightarrow \infty$. Если контур $\mathcal{B}$ сдвинуть достаточно далеко вправо, то в (10.18) можно подставить разложение

$$P_1 = -\frac{p}{c_1} - \frac{1}{\eta c_1} \frac{c_1 - a}{c_1 - c_2} + O\left(\frac{1}{p}\right)$$

и получить приближенное выражение

$$\varphi \simeq f\left(t - \frac{x}{c_1}\right) \exp\left\{-\frac{c_1 - a}{c_1 - c_2} \frac{x}{c_1 \eta}\right\}. \quad (10.20)$$

Данный результат совпадает с первым членом разложения геометрической оптики (см. § 7.7); дальнейшие члены этого ряда можно получить, продолжив разложение функции $e^{P_1 x}$ для больших p . Общий вид разложения можно найти, подставив разложение геометрической оптики непосредственно в (10.5), но (10.20), кроме того, связывает функцию от $t - x/c_1$ с граничными условиями. Выражение (10.20) справедливо вблизи волнового фронта. Оно показывает, что первое возмущение распространяется с c_1 -волной, но это возмущение экспоненциально затухает и становится пренебрежимо малым на расстоянии порядка $c_1 \eta$. При $\eta \rightarrow 0$ это возмущение становится пренебрежимо малым для всех $x > 0$ в соответствии с упрощенным описанием.

Спросим теперь, где находится основное возмущение, описываемое формулой (10.18). Для получения ответа на этот вопрос исследуем поведение данного выражения на семействе прямых $x/t = \text{const}$ в (x, t) -плоскости, поскольку каждая из них является траекторией волны, движущейся с постоянной скоростью. Следует соблюдать разумную осторожность при вычислении пределов, и поэтому целесообразно ввести безразмерные величины

$$q = \eta p, \quad Q(q) = \eta c_1 P_1(p), \quad m = \frac{x}{c_1 t}.$$

Вообще говоря, граничная функция $f(t)$ вводит другой масштаб времени, скажем T , и $F(p)$ следует записать в виде

$$F(p) = \mathcal{F}\left(q \frac{T}{\eta}\right).$$

Тогда (10.18) преобразуется в следующее выражение:

$$\Psi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{B}} \frac{\mathcal{F}(qT/\eta)}{q} e^{(q+mQ)t/\eta} dq, \quad (10.21)$$

где $Q(q)$ — подходящий корень уравнения

$$\frac{c_2}{c_1} Q^2 + \left\{ \left(1 + \frac{c_2}{c_1}\right) q + \frac{a}{c_1} \right\} Q + q(q+1) = 0.$$

Рассмотрим теперь асимптотическое поведение выражения (10.21), когда $t/\eta \rightarrow \infty$ при фиксированном m . Согласно методу перевала, доминирующий вклад дается окрестностью точки $q = q^*$, для которой

$$\frac{d}{dq}(q + mQ) = 0,$$

или

$$1 + mQ'(q^*) = 0. \quad (10.22)$$

Первый член асимптотического разложения находится деформированием контура интегрирования в кривую скорейшего спуска $\mathcal{C}$, проходящую через точку $q = q^*$, и разложением величины $q + mQ$ по $q - q^*$ с точностью до квадратичных членов включительно. Таким образом, имеем

$$\Psi \sim \exp\left(\frac{t}{\eta} \{q^* + mQ(q^*)\}\right) \times \\ \times \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{\mathcal{F}(qT/\eta)}{q} \exp\left\{\frac{1}{2} \frac{t}{\eta} mQ''(q^*) (q - q^*)^2\right\} dq \quad (10.23)$$

при $t/\eta \rightarrow \infty$.

В обычном методе перевала оставшаяся часть подынтегрального выражения также раскладывается в ряд Тейлора с центром в точке $q = q^*$ и $\mathcal{F}(qT/\eta)/q$ заменяется на $\mathcal{F}(q^*T/\eta)/q^*$. Этот дальнейший шаг будет справедлив для предела $t/\eta \rightarrow \infty$, T/η фиксировано, что соответствует случаю, когда $t \gg \eta$, $t \gg T$. Но нас интересует случай $t \gg \eta$, $T \gg \eta$ независимо от величины t/T . Для того чтобы включить этот случай, в формуле (10.23) следует допустить возможность $T/\eta \rightarrow \infty$ и сохранить более общее выражение.

При исследовании поведения функции (10.23) удобно вернуться к исходным переменным. Имеем

$$\varphi \sim \exp \{t p^* + x P_1(p^*)\} \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{F(p)}{p} \exp \left\{ \frac{1}{2} x P_1''(p^*) (p - p^*)^2 \right\} dp, \quad (10.24)$$

где p^* — функция от x и t , определяемая равенством

$$t + x P_1'(p^*) = 0. \quad (10.25)$$

Это выражение дает асимптотическое поведение функции φ , когда $t/\eta \rightarrow \infty$, $x/(c_1 t)$ фиксировано. Простоты ради предположим, что $\int_0^\infty f(t) dt$ сходится, так что $F(p)/p$ конечно при $p \rightarrow 0$ и полюс отсутствует. (Случай, когда $f(t)$ стремится к постоянной при $t \rightarrow \infty$, также представляет интерес, но его очень легко исследовать, переформулировав задачу в терминах функции φ_t .) В асимптотическом выражении (10.24) доминирует экспоненциальный множитель, стоящий перед интегралом. Стационарные точки экспоненты находятся из уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x} \{t p^* + x P_1(p^*)\} = 0,$$

которое, в силу равенства (10.25), определяющего $p^*(x, t)$, сводится к равенству

$$P_1(p^*) = 0.$$

Согласно (10.17), равенство $P_1(p^*) = 0$ должно соответствовать либо $p^* = 0$, либо $p^* = -1/\eta$, и легко проверить, что правильным выбором для P_1 является $p^* = 0$. Следовательно, экспоненциальный множитель в (10.24) имеет стационарное значение (в действительности локальный максимум) для тех значений x и t , для которых $p^* = 0$ является решением уравнения (10.25). Таким образом, максимум определяется из равенства

$$[t + P_1'(0) x = 0.$$

При помощи (10.17) легко проверить, что $P_1'(0) = [-a^{-1}$. Поэтому максимум экспоненциального множителя лежит на прямой

$$x = at$$

и этот максимум является единственным. Возмущение (в рассматриваемом пределе) экспоненциально мало всюду, за исключением окрестности прямой $x = at$. Таким образом, *основная часть возмущения со временем начинает распространяться со скоро-*

стью a . При $\eta \rightarrow 0$ это будет происходить все раньше и раньше, поскольку рассматриваемое приближение получено для $t \gg \eta$.

Можно получить и дальнейшую информацию о поведении основного возмущения. В окрестности прямой $x = at$ соответствующие значения переменной p^* малы. Детали возмущения можно найти, взяв дальнейшие члены разложения выражения (10.24) около точки $p^* = 0$. Но тогда интеграл (10.18) мы аппроксимировали бы в два этапа: сначала разложили $pt + P_1(p)x$ вблизи $p = p^*$, а затем полученное выражение разложили вблизи $p^* = 0$. Очевидно, окончательный результат можно получить, просто разложив $pt + P_1(p)x$ вблизи $p = 0$. Имеем

$$P_1(p) \sim -\frac{p}{a} + \frac{p^2 \eta (c_1 - a)(a - c_2)}{a^3} + \dots$$

Следовательно,

$$\varphi \sim \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{F(p)}{p} \exp \left\{ p \left(t - \frac{x}{a} \right) + \frac{p^2 \eta (c_1 - a)(a - c_2)x}{a^3} \right\} dp \quad (10.26)$$

в окрестности прямой $x - at = 0$ при $t/\eta \rightarrow \infty$. В первом приближении

$$\varphi \sim \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{F(p)}{p} \exp \left\{ p \left(t - \frac{x}{a} \right) \right\} dp = f \left(t - \frac{x}{a} \right),$$

что в точности совпадает с решением уравнения первого порядка (10.8). Таким образом, мы убедились в том, что формулировка низшего порядка дает правильное описание основного возмущения.

Чтобы понять роль квадратичного члена в экспоненте в (10.26), целесообразнее найти уравнение, которому удовлетворяет интеграл (10.26), а не исследовать сам интеграл. Действительно, это выражение совпадает с решением уравнения

$$\varphi_t + a\varphi_x = \frac{\eta (c_1 - a)(a - c_2)}{a^2} \varphi_{tt}, \quad (10.27)$$

удовлетворяющим тому же самому граничному условию $\varphi = f(t)$ при $x = 0$. Правая часть уравнения (10.27) уже является малой поправкой (порядка η/t по сравнению с другими членами), так что имеет смысл использовать в ней первое приближение $\partial/\partial t \simeq \simeq -a(\partial/\partial x)$ и перейти к эквивалентной форме

$$\varphi_t + a\varphi_x = \eta (c_1 - a)(a - c_2) \varphi_{xx}. \quad (10.28)$$

Это уравнение нагляднее¹⁾; оно показывает, что основная часть возмущения распространяется со скоростью a и диффундирует

¹⁾ Представляется, что было бы «нагляднее» оставить уравнение в виде (10.27) и переобозначить независимые переменные: $t \leftrightarrow x$, $x \leftrightarrow t$. Полная задача Коши для уравнения (10.28) с φ и φ_x , заданными при $x = 0$, является некорректной. — Прим. ред.

за счет членов высшего порядка в уравнении. Но последний эффект мал, когда η мало.

Результаты для случая $c_1 > a > 0$, $c_2 < 0$ можно резюмировать следующим образом. Первые сигналы распространяются со скоростью c_1 , но затухают, как показано в (10.20). Основное возмущение отстает и движется со скоростью волны низшего порядка a . В рассматриваемом случае нет противоречия между числом граничных условий, накладываемых при $x = 0$; условие $\varphi = f(t)$ годится как для (10.5), так и для (10.8). Начиная со значения времени порядка η , первые сигналы становятся экспоненциально малыми и основная часть решения уравнения (10.5) хорошо описывается уравнением (10.8) с тем же самым граничным условием при $x = 0$. Влияние членов высшего порядка заключается в диффузии волн низшего порядка, как показывает уравнение (10.28), но эта диффузия мала, если η достаточно мало.

Случай $c_1 > 0$, $c_2 < a < 0$. В этом случае максимальное значение экспоненциального множителя в (10.24) все еще достигается на прямой $x = at$, но при $a < 0$ это происходит вне области $x > 0$. Выражение (10.24) экспоненциально мало по всей области $x > 0$. Метод перевала неприменим при $x = 0$, поскольку, согласно (10.25), седловая точка, очевидно, отсутствует; однако при помощи (10.18) легко показать, что решение экспоненциально убывает от значения $\varphi = f(t)$ при $x = 0$ и возмущение сосредоточено в пограничном слое толщиной η/c_1 . В этом случае первый сигнал экспоненциально затухает, а основное возмущение не распространяется.

Упрощенное уравнение (10.8) не позволяет задавать значения φ при $x = 0$ и имеет решение $\varphi \equiv 0$. Это согласуется с предыдущим описанием в области вне пограничного слоя, и различие в граничных условиях поглощается пограничным слоем.

Случай $c_1 > a > c_2 > 0$. В этом случае обе характеристики уравнения (10.5) направлены в область $x > 0$ и следует наложить два условия

$$\varphi = f(t), \quad \varphi_x = g(t) \quad \text{при } x = 0, \quad t > 0. \quad (10.29)$$

Заметим, однако, что только одно из них или, может быть, их комбинацию можно сохранить для (10.8). Два условия (10.29) в точности соответствуют положительности c_1 и c_2 ; оба члена в (10.16) следует сохранить, так что имеем две произвольные функции, которые надо определить. Пусть $\tilde{f}(p)$ и $\tilde{g}(p)$ — преобразования Лапласа функций $f(t)$ и $g(t)$; тогда произвольные функции, входящие в решение (10.16), определяются из уравнений

$$F + G = \tilde{f}, \quad P_1 F = P_2 G = \tilde{g}. \quad (10.30)$$

Исследование слагаемого вида (10.18) выполняется точно так же, как и выше, и приводит к тому же заключению, а именно: первые сигналы распространяются со скоростью c_1 , но затухают; основное возмущение распространяется со скоростью a и диффундирует под действием эффектов высшего порядка. Основное возмущение опять хорошо описывается уравнением (10.8), и единственный новый вопрос связан с выбором подходящего граничного условия. Функция $F(p)$, фигурирующая в соответствующем решении (10.26), находится из уравнений (10.30):

$$F = \frac{P_2 \tilde{f} - \tilde{g}}{P_2 - P_1}. \quad (10.31)$$

Но при выводе формулы (10.26) P_1 аппроксимируется для малых значений ηp , и P_2 тоже следует аппроксимировать аналогичным образом. Из (10.17) легко получить, что

$$\eta P_1 = -\frac{\eta p}{a} + O(\eta^2 p^2), \quad \eta P_2 = -\frac{a}{c_1 c_2} + O(\eta p);$$

в этом приближении равенство (10.31) сводится к

$$F = \tilde{f}.$$

Следовательно, граничное условие $\varphi = f(t)$ действительно выполняется; его следует использовать для упрощенного уравнения.

Второй член полного решения имеет вид

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{B}} \frac{G(p)}{p} \exp\{pt + P_2(p)x\} dp. \quad (10.32)$$

Поскольку $P_2 \sim -p/c_2$ при $p \rightarrow \infty$, это выражение равно нулю при $x > c_2 t$; следовательно, второй волновой фронт связан с волнами, распространяющимися со скоростью c_2 . Как и ранее, легко показать, что эти волны экспоненциально затухают и становятся пренебрежимо малыми при $x/(c_2 \eta) \gg 1$. Метод перевала затем показывает, что вклад интеграла (10.32) мал всюду, за исключением окрестности прямой $x = 0$. Чтобы исследовать поведение решения вблизи $x = 0$, можно использовать асимптотическое разложение, соответствующее предельному переходу

$$\frac{t}{\eta} \rightarrow \infty, \quad \frac{x}{c_2 \eta} \text{ фиксировано.}$$

Известно, что эта асимптотика определяется видом подынтегрального выражения в (10.32) при малых ηp . Имеем

$$P_2 \sim -\frac{a}{c_1 c_2 \eta}, \quad G(p) \sim -\left(\tilde{g} + \frac{p}{a} \tilde{f}\right) \frac{c_1 c_2 \eta}{a}.$$

Следовательно, интеграл (10.32) имеет асимптотику

$$-\left\{g(t) + \frac{1}{a}f'(t)\right\} \frac{c_1 c_2}{a} \eta \exp\left(-\frac{a}{c_1 c_2} \frac{x}{\eta}\right). \quad (10.33)$$

Таким образом, первый вклад от интеграла (10.32) распространяется с c_2 -волнами, но затухает, а его основной вклад соответствует пограничному слою и определяется выражением (10.33).

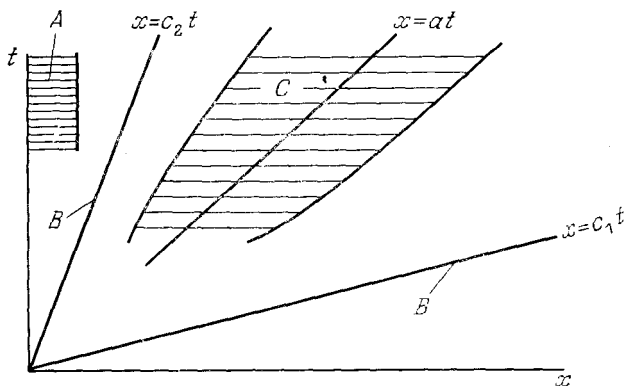


Рис. 10.2. (x, t) -диаграмма для задачи о распространении сигнала. A — пограничный слой, B — экспоненциальное затухание, C — основное возмущение.

Полное решение при $t/\eta \gg 1$ получается сложением двух основных вкладов и имеет вид

$$\varphi = f\left(t - \frac{x}{a}\right) - \left\{g(t) + \frac{1}{a}f'(t)\right\} \frac{c_1 c_2}{a} \eta \exp\left(-\frac{a}{c_1 c_2} \frac{x}{\eta}\right). \quad (10.34)$$

В первом приближении это выражение удовлетворяет обоим граничным условиям. Второй член необходим для удовлетворения второго граничного условия, но быстро затухает вне пограничного слоя толщиной порядка $\eta c_1 c_2 / a$. Полученные результаты удобно изобразить на (x, t) -диаграмме, как показано на рис. 10.2.

10.2. Упрощенный подход

Другие линейные уравнения с постоянными коэффициентами всегда можно рассмотреть аналогичным образом при помощи преобразований Фурье и Лапласа и подходящих асимптотических разложений. Однако существует более простой интуитивный подход, который позволяет не только обойтись без утомительных

подробностей, но и глубже понять суть дела. Продемонстрируем этот подход на примере предыдущей задачи.

Прежде всего в любом волновом профиле, движущемся со скоростью, близкой к V , производные по t и x связаны приближенным равенством

$$\frac{\partial}{\partial t} \simeq -V \frac{\partial}{\partial x}. \quad (10.35)$$

Этот факт можно использовать в уравнении (10.5) и исследовать поочередно волны, движущиеся со скоростями c_1 , c_2 , a . Для c_1 -волн положим $\partial/\partial t \simeq -c_1 \partial/\partial x$ во всех производных, выделив предварительно главный член, содержащий множитель $\partial/\partial t + c_1 \partial/\partial x$, и получим

$$\eta (c_2 - c_1) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial t} + c_1 \frac{\partial}{\partial x} \right) \varphi + (a - c_1) \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0.$$

Оператор $\partial/\partial x$ можно проинтегрировать без потерь, поскольку он соответствует вкладу других волн. В соответствии с этим имеем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + c_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{c_1 - a}{\eta (c_1 - c_2)} \varphi = 0. \quad (10.36)$$

Решение в точности совпадает с выражением (10.20). Аналогично для c_2 -волн находим

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + c_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{a - c_2}{\eta (c_1 - c_2)} \varphi = 0.$$

Решение выражается формулой, аналогичной (10.20), и может быть строго обосновано при помощи (10.32).

Для волн низшего порядка, распространяющихся со скоростью a , в членах второго порядка в (10.5) мы полагаем $\partial/\partial t \simeq -a \partial/\partial x$ и получаем соответствующее приближенное уравнение

$$\varphi_t + a \varphi_x = \eta (c_1 - a) (a - c_2) \varphi_{xx}. \quad (10.37)$$

Это находится в точном соответствии с (10.28). Если в членах второго порядка предпочесть производные по t , то получим альтернативное уравнение (10.27).

Возможность существования пограничного слоя вблизи $x = 0$ можно исследовать в том же духе, считая, что производные по x будут гораздо больше производных по t , так что следует ввести соотношение

$$\frac{\partial}{\partial x} \gg \frac{\partial}{\partial t}. \quad (10.38)$$

Это можно интерпретировать как частный случай приближения (10.35) с $V = 0$, что соответствует неподвижным волнам. В таком приближении (10.5) сводится к уравнению

$$\eta c_1 c_2 \varphi_{xx} + a \varphi_x = 0, \quad (10.39)$$

общее решение которого имеет вид

$$\varphi = A(t) + B(t) \exp\left(-\frac{a}{c_1 c_2} \frac{x}{\eta}\right), \quad (10.40)$$

и согласуется с решением (10.34). Конечно, экспоненциальное решение исключается, если не выполнено условие $a/(c_1 c_2 \eta) > 0$, и только в случае экспоненциального убывания возможно существование пограничного слоя.

Для слоя вблизи $t = 0$, где в полном уравнении задаются начальные значения для φ и φ_t при $t = 0$, рассмотрим уравнение в приближении $\partial/\partial t \gg \partial/\partial x$. Для уравнения (10.5) имеем

$$\eta \varphi_{tt} + \varphi_t = 0, \quad \varphi = C(x) + D(x) e^{-t/\eta}.$$

Это показывает, как полное решение переходит в приближенное решение, учитывающее только начальные значения φ .

Указанный подход позволяет быстро дать оценку различных представляющих интерес областей и получить соответствующие приближенные формулы. На этой основе легко развить более строгую процедуру рядов теории возмущений. Например, непосредственное разложение

$$\varphi = \varphi_0(x, t) + \eta \varphi_1(x, t) + \eta^2 \varphi_2(x, t) + \dots$$

приводит к уравнению (10.8) для φ_0 ; разложение

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_0(\xi, t) + \eta^{1/2} \varphi_1(\xi, t) + \dots, \\ \xi &= \eta^{-1/2}(x - at) \end{aligned}$$

приводит к уравнению (10.28) для φ_0 ; разложение

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_0(X, t) + \eta \varphi_1(X, t) + \dots, \\ X &= \eta^{-1}x \end{aligned}$$

приводит к уравнению пограничного слоя (10.39) для φ_0 .

10.3. Системы высокого порядка, нелинейные эффекты и ударные волны

В случае нелинейных систем уравнений, описывающих плоские волны различных порядков, мы, как правило, не имеем полного точного решения уравнений и при аналитическом анализе приходится опираться на аналоги приближенных выражений из предыдущего параграфа. Детали процедуры будут меняться от задачи к задаче, но можно отметить некоторые общие путеводные нити. Для удобства ссылок будем называть полную систему уравнений системой I, а упрощенную систему, получаемую при равенстве нулю некоторого параметра η , системой II.

Теория характеристик дает характеристические скорости $c_1, \dots, c_n$ для системы I и характеристические скорости $a_1, \dots, a_m$ ($m < n$) для системы II. В случае произвольной нелинейной задачи они будут функциями от независимых переменных. Однако линеаризованная теория для малых возмущений около некоторого однородного состояния оказывается полезной для подготовки арены дальнейших действий и является источником информации об устойчивости. Если имеются только два порядка, то линеаризованная теория для плоских волн в однородной среде сводится к одному уравнению

$$\eta \left(\frac{\partial}{\partial t} + c_1 \frac{\partial}{\partial x} \right) \dots \left(\frac{\partial}{\partial t} + c_n \frac{\partial}{\partial x} \right) \varphi + \left(\frac{\partial}{\partial t} + a_1 \frac{\partial}{\partial x} \right) \dots \left(\frac{\partial}{\partial t} + a_m \frac{\partial}{\partial x} \right) \varphi = 0 \quad (10.41)$$

для некоторого потенциала возмущения φ , где постоянные скорости распространения равны своим значениям в однородном состоянии. Стандартное исследование устойчивости приводит к следующему интересному результату: в устойчивом случае порядки связаны формулами $m = n - 1$ или $m = n - 2$. В первом случае полные требования имеют вид

$$m = n - 1, \quad \eta \geq 0, \quad c_1 > a_1 > c_2 > a_2 > \dots > a_{n-1} > c_n. \quad (10.42)$$

Это как раз те условия, которые допускают удовлетворительную интерпретацию процесса аппроксимации решений полной системы II решениями системы I. Второй случай $m = n - 2$ вводит эффекты, более типичные для диспергирующих волн, и его обсуждение переносится во вторую часть книги. (Условия устойчивости для этого случая были получены Ву [1], исправившим неправильное утверждение автора, считавшего, что (10.42) — единственный допустимый случай.)

Уравнение (10.41) можно решить при помощи преобразования Фурье, но набросок общей картины можно сделать на основе подхода, описанного в предыдущем параграфе. Каждая из c_i -волн удовлетворяет приближенному уравнению

$$\eta (\varphi_t + c_i \varphi_x) + \gamma_i \varphi = 0, \quad (10.43)$$

где γ_i выражается через скорости a и c подобно тому, как это имело место в уравнении (10.36). Из условий устойчивости следует, что $\gamma_i > 0$, так что происходит экспоненциальное затухание. Аналогичным образом a_i -волны удовлетворяют приближенному уравнению

$$\varphi_t + a_i \varphi_x = \eta \alpha_i \varphi_{xx}, \quad (10.44)$$

аналогичному уравнению (10.28), причем $\alpha_i > 0$.

Для учета нелинейных эффектов следует стремиться получить взамен уравнения (10.43) уравнение вида

$$\varphi_t + c_i(\varphi) \varphi_x + \beta_i \varphi = 0. \quad (10.45)$$

Теперь между волнами каждого из порядков существует нетривиальное взаимодействие, и вывод уравнения (10.45) потребует рассуждений типа «обоснования простой волны». В нелинейных задачах обычно удобнее работать с n зависимыми переменными и системой уравнений первого порядка. Метод использования для c_i -волн приближенного равенства $\partial/\partial t \simeq -c_i \partial/\partial x$, грубо говоря, эквивалентен предположению, что $n - 1$ римановы переменные, соответствующие $n - 1$ остальным c -волнам, постоянны.

К уравнению (10.45) применима теория, изложенная в гл. 2. Волны, переносящие возрастание $c_i(\varphi)$, могут опрокидываться (см. обсуждение формулы (2.72)), и потребуется введение ударных волн. Эти ударные волны будут разрывами системы I, и условия на разрыве выводятся стандартным образом из соответствующей системы уравнений сохранения. Для $\beta_i > 0$ даже при наличии ударных волн возмущение обычно затухает и основное возмущение фактически переносится волнами низшего порядка.

Если $\eta = 0$, то нелинейная простая волна на a_i -характеристике будет удовлетворять уравнению вида

$$\varphi_t + a_i(\varphi) \varphi_x = 0. \quad (10.46)$$

Ударные волны, входящие в решение этого уравнения, будут удовлетворять условиям на разрыве, выведенным для упрощенной системы II и отличающимся от условий на разрыве для системы I.

Для учета диффузионных эффектов следует стремиться получить уравнение

$$\varphi_t + a_i(\varphi) \varphi_x = \nu_i \varphi_{xx}, \quad (10.47)$$

соответствующее уравнению (10.37). Можно сопоставить это уравнение с уравнением Бюргерса для a_i в том же порядке приближения и использовать результаты, изложенные в гл. 4.

10.4. Структура ударной волны

Ударная волна системы II — назовем ее S_{II} — будет до некоторой степени сглаживаться, если ее рассматривать в системе I. Это в точности задача о структуре ударной волны. Однако теперь мы можем более решительно высказаться о возникновении разрывов в этой структуре. Ударная волна S всегда будет связана с одним конкретным семейством a -волн, а каждое семейство a -волн зажато между двумя семействами c -волн. Однако ударная волна S_{II} будет перемещаться быстрее, чем a -волны впереди нее, и мед-

деннее, чем a -волны позади нее. Даже в устойчивой ситуации она может перегнать ближайшую c -волну впереди или пропустить вперед ближайшую c -волну позади.

Это нарушит характеристическое свойство c -волн, если решение остается непрерывным, но S_I -разрывы снимают это противоречие. Следовательно, при возникновении подобной ситуации S_{II} -профиль потребует разрывов в структуре ударной волны. Это будут S_I -разрывы, удовлетворяющие S_I -условиям на разрыве, и мы можем рассматривать полный профиль как комбинированную S_I - S_{II} -волну.

Пусть скорость ударной волны S_{II} , ассоциированной с a_i -семейством, равна U_i , и пусть верхние индексы (1) и (2) обозначают теперь значения впереди и позади этой ударной волны соответственно; тогда критерий непрерывности структуры ударной волны имеет вид

$$c_{i+1}^{(2)} < U_i < c_i^{(1)}. \quad (10.48)$$

Если он не выполняется, то профиль имеет разрыв, и это возможно даже в том случае, когда состояния по обеим сторонам устойчивы. Если мы рассмотрим нелинейный вариант рис. 10.1, то основное возмущение останется непрерывным при условии, что его скорость достаточно отличается от скоростей волн высшего порядка по обеим сторонам.

В нелинейном случае каждая из этих скоростей может меняться в определенном интервале, так что основная волна может комбинироваться с c -волнами впереди или позади. Когда это происходит, экспоненциальное затухание соответствующих c -волн прекращается и, поскольку c -волны опрокидываются, в общую структуру вклинивается ударная волна S_I . Критерий ограничений на скорости (10.48) дает очень простой метод предсказания, позволяющий избежать гораздо более сложного анализа интегральных кривых уравнений, описывающих структуру ударной волны. Его полезность будет показана на следующих примерах.

10.5. Примеры

Наводковые волны

Этот пример был подробно изучен в гл. 3. Отметим, что в принятых здесь обозначениях

$$c_1 = v + \sqrt{g'h}, \quad c_2 = v - \sqrt{g'h}, \quad a = 3v/2.$$

Согласно условиям (10.42), однородное течение $h = h_0$, $v = v_0$ устойчиво (как отмечено в § 3.2) при условии, что

$$v_0 - \sqrt{g'h_0} < \frac{3v_0}{2} < v_0 + \sqrt{g'h_0},$$

где нижний предел фактически не является ограничением. Согласно критерию (10.48), ударная волна S_{II} обладает непрерывной структурой при условии, что

$$v^{(2)} - \sqrt{g'h^{(2)}} < U < v^{(1)} + \sqrt{g'h^{(1)}}.$$

Эти условия на разрыве для S_{II} показывают, что $U > v^{(2)}$, так что ограничение снизу всегда выполняется. Поэтому критерий возникновения разрывов в S_{II} -структуре имеет вид

$$U > v^{(1)} + \sqrt{g'h^{(1)}}.$$

Это в точности совпадает с результатом (3.52), полученным при помощи подробного анализа.

Магнитная газовая динамика

Уравнения волн в магнитной газовой динамике приведены в примерах 10 и 10' § 5.2. Первая система — это система I, и мы имеем

$$\begin{aligned} c_1 &= (\epsilon_0 \mu)^{-1/2}, & c_2 &= u + a, & c_3 &= u, \\ c_4 &= u - a, & c_5 &= -(\epsilon_0 \mu)^{-1/2}. \end{aligned}$$

Вторая система — это система II, и

$$\begin{aligned} a_1 &= u + \left(a^2 + \frac{B^2}{\mu \rho} \right)^{1/2}, & a_2 &= a_3 = u, \\ a_4 &= u - \left(a^2 + \frac{B^2}{\mu \rho} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Реальные волны, распространяющиеся относительно жидкости, имеют чередующиеся скорости, как и требуется условиями (10.42), и устойчивы. Слияние скоростей a_2, a_3 с c_3 на траектории частицы, как легко проверяется, соответствует устойчивой ситуации.

Ударная волна S_{II} из a_1 -семейства, распространяющаяся со скоростью U , имеет непрерывную структуру при условии, что

$$u^{(2)} + a^{(2)} < U < (\epsilon_0 \mu)^{-1/2}.$$

Скорость света практически бесконечна, так что разрыв появляется на задней части профиля, когда

$$U < u^{(2)} + a^{(2)}.$$

Это простой вывод результата, полученного Маршаллом [1] с помощью подробного анализа структуры ударной волны. Дальнейшее обсуждение этого случая можно найти в статье автора (Уизем [8]).

Эффекты релаксации в газах

Уравнения невязкой газовой динамики (гл. 6) можно записать в виде

$$\begin{aligned}\rho_t + u\rho_x + \rho u_x &= 0, \\ u_t + uu_x + \frac{1}{\rho} p_x &= 0, \\ e_t + ue_x + \frac{p}{\rho} u_x &= 0.\end{aligned}$$

При быстрых изменениях параметров течения внутренняя энергия e может отставать от равновесного значения, соответствующего окружающему давлению и плотности. Поступательное движение молекул устанавливается быстро, но запаздывание вращательного и колебательного движений может быть на порядок больше. Если предположить, что α степеней свободы устанавливаются мгновенно, а остальные α_r степеней свободы требуют большего времени релаксации, то можно положить

$$e = \frac{\alpha}{2} \frac{p}{\rho} + E,$$

где E — энергия отстающих степеней свободы. В равновесном состоянии (см. (6.42)) E принимает значение

$$E_{\text{равнов}} = \frac{\alpha_r}{2} \frac{p}{\rho}.$$

Простое общее уравнение, описывающее релаксацию, имеет вид

$$E_t + uE_x = -\tau \left(E - \frac{\alpha_r}{2} \frac{p}{\rho} \right),$$

где τ — время релаксации. После несложных преобразований систему уравнений можно записать в виде

$$\begin{aligned}\rho_t + u\rho_x + \rho u_x &= 0, \\ u_t + uu_x + \frac{1}{\rho} p_x &= 0, \\ \frac{\alpha}{2} (p_t + up_x) - \left(1 + \frac{\alpha}{2} \right) \frac{p}{\rho} (\rho_t + u\rho_x) + \rho (E_t + uE_x) &= 0, \\ E_t + uE_x + \tau \left(E - \frac{\alpha_r}{2} \frac{p}{\rho} \right) &= 0.\end{aligned}$$

Характеристическими скоростями являются

$$c_1 = u + a_f, \quad c_2 = c_3 = u, \quad c_4 = u - a_f,$$

где a_f — «замороженная» скорость звука, определяемая равенством

$$a_f^2 = \left(1 + \frac{2}{\alpha} \right) \frac{p}{\rho} = \gamma_f \frac{p}{\rho}.$$

Это система I для данного случая. Однако, если время релаксации τ считается настолько малым, что $E = (\alpha_r/2) (p/\rho)$ является хорошим приближением в последнем уравнении системы, то имеем равновесную теорию

$$\begin{aligned}\rho_t + u\rho_x + \rho u_x &= 0, \\ u_t + uu_x + \frac{1}{\rho} p_x &= 0, \\ \frac{\alpha + \alpha_r}{2} (p_t + up_x) - \left(1 + \frac{\alpha + \alpha_r}{2}\right) \frac{p}{\rho} (\rho_t + u\rho_x) &= 0.\end{aligned}$$

Это упрощенная система II для нашей задачи. Характеристические скорости выражаются формулами

$$a_1 = u + a_e, \quad a_2 = u, \quad a_3 = u - a_e,$$

где a_e — равновесная скорость звука, определяемая равенством

$$a_e^2 = \left(1 + \frac{2}{\alpha + \alpha_r}\right) \frac{p}{\rho} = \gamma_e \frac{p}{\rho}.$$

Поскольку $\gamma_e < \gamma_f$, различные скорости чередуются и имеет место устойчивость; слияние скоростей со скоростью частицы снова соответствует устойчивости.

Рассматривая с точки зрения полной системы структуру ударной волны S_{II} (для которой считается, что течение между двумя однородными состояниями равновесно), видим, что она будет непрерывной, если

$$u^{(2)} - a_f^{(2)} < U < u^{(1)} + a_f^{(1)}. \quad (10.49)$$

Поскольку, согласно S_{II} -условиям на разрыве, $U > u^{(2)}$, существенно только ограничение сверху. Замороженная ударная волна S_I возникает в передней части профиля и будет сопровождаться областью непрерывной релаксации, когда

$$U > u^{(1)} + a_f^{(1)}.$$

Этот критерий можно записать в виде

$$M = \frac{U - u^{(1)}}{a_e^{(1)}} > \frac{a_f^{(1)}}{a_e^{(1)}} = \left(\frac{\gamma_f}{\gamma_e}\right)^{1/2}. \quad (10.50)$$

Для двухатомной молекулы две вращательные степени свободы могут отставать от трех поступательных степеней, и это можно описать, положив $\alpha = 3$, $\alpha_r = 2$. Замороженная и равновесные скорости звука равны соответственно

$$a_f^2 = \frac{5}{3} \frac{p}{\rho}, \quad a_e^2 = \frac{7}{5} \frac{p}{\rho}.$$

Критерий (10.50) предсказывает полностью релаксационный гладкий профиль, когда

$$M < 1,091,$$

и разрыв, сопровождаемый областью релаксации, когда M превосходит это критическое значение. При учете вязкости и теплопередачи этот разрыв переходит в тонкий подслои.

Гриффитс, Брикл, Блэкмен и Кенни (см. Гриффитс, Брикл и Блэкмен [1], а также Гриффитс и Кенни [1]) опубликовали результаты экспериментальных наблюдений за колебательной релаксацией в CO_2 . В этом случае α следует положить равным 5, чтобы включить и поступательные, и вращательные степени свободы; колебательные движения устанавливаются значительно дольше. При 300 К α_r следует положить равным 2¹⁾. Критическое значение для M равно 1,043, и экспериментальные наблюдения, описанные в цитированных выше работах, подтверждают это с достаточной точностью. (Дальнейшие детали можно найти в указанных выше статьях и в превосходной работе Лайтхилла [5].)

Таким образом, мы убедились в том, что введение в рассмотрение волн, учитывающих различного рода дополнительные эффекты, и выяснение роли, которую играет каждая из этих волн, приводит к сравнительно простым предсказаниям важных явлений в чрезвычайно сложных ситуациях.

¹⁾ При этой температуре четыре степени свободы обладают только половиной своей классической энергии, так что выбор $\alpha_r = 2$ является оправданным.

ЧАСТЬ II

ДИСПЕРГИРУЮЩИЕ ВОЛНЫ

Глава 11

ЛИНЕЙНЫЕ ДИСПЕРГИРУЮЩИЕ ВОЛНЫ

В части I рассматривались в основном гиперболические системы. Однако большая часть волновых движений, включая знакомые каждому волны на воде, на первый взгляд не имеет непосредственной связи с гиперболическими уравнениями. Эти связи обнаруживаются лишь на последующих стадиях исследования при описании процессов распространения важных усредненных величин, ассоциированных с возмущением. Для изучения же вопроса в целом необходимо развить другую систему основополагающих идей и другой математический аппарат.

Негиперболические волновые движения можно объединить во второй основной класс волн, которые мы называем *диспергирующими*. Вообще говоря, определение волн этого класса не настолько точно, как для гиперболических волн, поскольку оно основано скорее на виде решения, чем на самих уравнениях. Но можно сначала выделить некий класс задач, для которых точное определение не вызывает затруднений, а затем делать естественные обобщения или опираться на аналогии. Следует добавить, что некоторые уравнения специального вида проявляют как гиперболическое, так и диспергирующее поведение, причем форма поведения зависит от той области, где рассматривается решение. Однако это не правило, а исключение.

В первых двух главах данной части развиваются общие идеи для линейных систем. В главе 13 изучаются волны на воде; мало того, что эта тема сама по себе захватывающая, ей обязаны своим происхождением многие идеи диспергирующих волн. В этой главе впервые речь идет о нелинейных диспергирующих волнах в соответствующем конкретном плане; полученные здесь результаты служат основой для построения общей нелинейной теории в главах 14 и 15. Глава 16 посвящается различным приложениям этой теории. В главе 17 освещаются недавние работы по уединенным волнам (солитонам) и уравнениям специального вида.

11.1. Дисперсионные соотношения

В линейных задачах диспергирующие волны обычно распознают по существованию элементарных решений в виде синусоидальных волновых пакетов

$$\varphi(x, t) = Ae^{ik \cdot x - i\omega t}, \quad (11.1)$$

где k — волновой вектор, ω — частота, а A — амплитуда. В элементарном решении (11.1) величины k , ω и A являются постоянными. Поскольку уравнения линейны, множитель A сокращается и может быть выбран произвольно. Но для того чтобы уравнения удовлетворялись, k и ω должны быть связаны равенством

$$G(\omega, k) = 0.$$

Функция G определяется конкретными уравнениями задачи. Например, если φ представляет собой решение уравнения колебаний балки

$$\varphi_{tt} + \gamma^2 \varphi_{xxxx} = 0,$$

то

$$\omega^2 - \gamma^2 k^4 = 0.$$

Зависимость между ω и k называется *дисперсионным соотношением*, и, как станет очевидным ниже, зная дисперсионное соотношение, можно забыть о самом уравнении; в свою очередь, по дисперсионному соотношению можно восстановить исходное уравнение.

Будем считать, что дисперсионное соотношение имеет вещественные корни вида

$$\omega = W(k). \quad (11.2)$$

В общем случае будет несколько таких решений с различными функциями $W(k)$. Мы будем называть их различными *модами*. Например, уравнение колебаний балки имеет две моды

$$\omega = \gamma k^2, \quad \omega = -\gamma k^2.$$

Пока мы будем изучать одну моду; в линейных задачах полное решение можно получить суперпозицией мод. Линейность позволяет нам также работать с комплексными выражениями (11.1), имея в виду, что в случае необходимости следует взять вещественную часть. Фактическое решение имеет вид

$$\text{Re } \varphi = |A| \cos(k \cdot x - \omega t + \eta), \quad \eta = \arg A.$$

Величина

$$\theta = k \cdot x - \omega t \quad (11.3)$$

называется *фазой*; она определяет положение на цикле между гребнем волны, где $\text{Re } \varphi$ максимальна, и впадиной, где $\text{Re } \varphi$ ми-

нимальна. Для этого решения вида плоской волны поверхности постоянной фазы $\theta = \text{const}$ являются параллельными плоскостями. Пространственный градиент функции θ равен волновому вектору $\mathbf{k}$, направление которого нормально к плоскостям постоянной фазы, а величина k равна среднему числу гребней на 2π единиц расстояния в этом направлении. Аналогичным образом $-\theta_t$ есть частота ω , или среднее число гребней на 2π единиц времени. (Нормировка на 2π единиц удобна при работе с тригонометрическими функциями.) Длина волны λ равна $2\pi/k$, а период τ составляет $2\pi/\omega$.

Волновой характер движения виден из формулы (11.3). Каждая конкретная поверхность постоянной фазы движется с нормальной скоростью ω/k в направлении вектора $\mathbf{k}$. Поэтому мы вводим *фазовую скорость*

$$\mathbf{c} = \frac{\omega}{k} \hat{\mathbf{k}}, \quad (11.4)$$

где $\hat{\mathbf{k}}$ — единичный вектор в $\mathbf{k}$ -направлении. Для любой конкретной моды $\omega = W(\mathbf{k})$ фазовая скорость является функцией от $\mathbf{k}$. Для волнового уравнения $\varphi_{tt} = c_0^2 \nabla^2 \varphi$ дисперсионное соотношение дает $\omega = \pm c_0 k$ и $\mathbf{c} = \pm c_0 \hat{\mathbf{k}}$; фазовая скорость совпадает с обычной скоростью распространения возмущения. В общем случае $\mathbf{c}$ зависит от $\mathbf{k}$. Различные волновые векторы приводят к различным фазовым скоростям. Это и выражается термином «дисперсия». В фурье-представлении решений более общего вида компоненты с различными волновыми векторами с течением времени расплываются. Этот принципиально важный процесс будет подробно обсуждаться в следующем параграфе.

По соображениям классификации мы должны исключить из класса диспергирующих волн случай $\mathbf{c} = \text{const}$, поскольку в этом случае дисперсия отсутствует. Ясно также, что выражения (11.2) должны быть вещественными. Например, уравнение теплопроводности $\varphi_t = \nabla^2 \varphi$ имеет решения вида (11.1) с $\omega = -ik^2$, но эти решения не описывают распространение волн. Для того чтобы исключить эти нежелательные возможности, при предварительном рассмотрении диспергирующих систем ограничимся случаями, для которых

$$\text{функция } W(\mathbf{k}) \text{ вещественна и определитель } \left| \frac{\partial^2 W}{\partial k_i \partial k_j} \right| \neq 0. \quad (11.5)$$

Для одномерных задач второе условие попросту означает, что

$$W''(k) \neq 0.$$

Это требование несколько сильнее, чем условие $c'(k) \neq 0$, поскольку исключает также случай $W = ak + b$. Причина такого ограничения будет объяснена ниже, но для одномерного случая

можно заранее сказать, что групповая скорость $W'(\kappa)$ важнее, чем скорость распространения, и условие $W''(\kappa) \neq 0$ исключает случаи, когда она постоянна.

Непосредственно видно, что в случае $W = a\kappa + b$, исключенном нами из рассмотрения, дисперсия фактически отсутствует. Элементарное решение при этом равно

$$e^{-ibt} e^{i\kappa(x-at)},$$

и при помощи преобразования Фурье получаем общее решение

$$e^{-ibt} f(x-at).$$

Исходный волновой профиль $f(x)$ при распространении искажается, но дисперсии нет. Легко показать, что уравнение, описывающее соответствующий процесс, является гиперболическим.

Определитель, входящий в условие (11.5), может обращаться в нуль для некоторых частных значений волнового вектора κ , например при $\kappa \rightarrow 0$ или $\kappa \rightarrow \infty$, и окрестности таких точек должны быть исследованы отдельно из-за появления особенностей в общих формулах.

Примеры

Приведем несколько типичных примеров, которые будут использоваться в качестве иллюстрации построения общей теории:

$$\varphi_{tt} - \alpha^2 \nabla^2 \varphi + \beta^2 \varphi = 0, \quad \omega = \pm \sqrt{\alpha^2 \kappa^2 + \beta^2}; \quad (11.6)$$

$$\varphi_{tt} - \alpha^2 \nabla^2 \varphi = \beta^2 \nabla^2 \varphi_{tt}, \quad \omega = \pm \frac{\alpha \kappa}{\sqrt{1 + \beta^2 \kappa^2}}; \quad (11.7)$$

$$\varphi_{tt} + \gamma^2 \varphi_{xxxx} = 0, \quad \omega = \pm \gamma \kappa^2; \quad (11.8)$$

$$\varphi_t + \alpha \varphi_x + \beta \varphi_{xx} = 0, \quad \omega = \alpha \kappa - \beta \kappa^3. \quad (11.9)$$

Первое из этих уравнений гиперболическое, но тем не менее имеет диспергирующие решения, удовлетворяющие условию (11.5). Оно описывает колебания с дополнительной возвращающей силой, пропорциональной перемещению φ ; это также уравнение Клейна—Гордона квантовой теории поля. Другие уравнения негиперболические, что более типично для диспергирующих волн. Уравнение (11.7) встречается в теории упругости при описании продольных волн в стержнях, в теории волн на воде в приближении Буссинеска для длинных волн и при описании волн в плазме. Уравнение (11.8) описывает поперечные колебания балки. Уравнение (11.9) также применяется в теории длинных волн на воде и представляет собой линеаризованную форму уравнения Кортевега—де Фриза. Приближения для волн на воде будут подробно исследованы ниже, остальные уравнения считаются в какой-то степени известными.

Соответствие между уравнением и дисперсионным соотношением

Из приведенных примеров видно, что и в общем случае уравнения с вещественными коэффициентами приведут к вещественным дисперсионным соотношениям лишь тогда, когда они содержат либо только четные, либо только нечетные производные. Каждое дифференцирование вносит множитель i , так что у четных производных появляются вещественные коэффициенты, а у нечетных — чисто мнимые коэффициенты, и они не должны смешиваться, если мы хотим, чтобы окончательное выражение было вещественным. Уравнение Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \varphi, \quad (11.10)$$

содержащее четные и нечетную производные, приводит к вещественному дисперсионному соотношению

$$\hbar\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m},$$

но включает комплексный коэффициент.

Соответствие между уравнением и дисперсионным соотношением можно исследовать гораздо подробнее. Линейное уравнение с постоянными коэффициентами можно записать в виде

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right) \varphi = 0,$$

где P — некоторый многочлен. При подстановке в это уравнение элементарного решения (11.1) каждое дифференцирование $\partial/\partial t$ приведет к множителю $-i\omega$, а каждое дифференцирование $\partial/\partial x_j$ — к множителю ik_j . Поэтому дисперсионное соотношение имеет вид

$$P(-i\omega, ik_1, ik_2, ik_3) = 0, \quad (11.11)$$

и мы находим прямую связь между уравнением и дисперсионным соотношением, производя замену

$$\frac{\partial}{\partial t} \leftrightarrow -i\omega, \quad \frac{\partial}{\partial x_j} \leftrightarrow ik_j.$$

По соотношению (11.11) можно восстановить вид уравнения. Это служит основанием для сделанного выше замечания, что можно забыть об уравнении, если известно дисперсионное соотношение.

Видно, однако, что уравнения такого типа могут привести только к полиномиальным дисперсионным соотношениям. Возникает естественный вопрос: операторы какого вида дают более общие дисперсионные соотношения? Одна из возможностей состоит в том, что осциллирующее волновое движение, описываемое уравнением (11.1), происходит только по части пространственных координат, в то время как по остальным координатам поведе-

ние оказывается более сложным. Типичным примером является теория волн на глубокой воде, в которой, как будет показано ниже, волны распространяются горизонтально, а зависимость от вертикальной координаты не является осциллирующей. Вторую возможность, для которой волновое поведение имеет место по всем переменным, можно продемонстрировать на примере одномерного интегродифференциального уравнения

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t) + \int_{-\infty}^{\infty} K(x - \xi) \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}(\xi, t) d\xi = 0, \quad (11.12)$$

где ядро $K(x)$ — заданная функция. Это уравнение имеет элементарные решения $\varphi = Ae^{ikx - i\omega t}$ при условии, что

$$-i\omega e^{ikx} + \int_{-\infty}^{\infty} K(x - \xi) i k e^{ik\xi} d\xi = 0.$$

Это условие можно переписать в виде

$$c = \frac{\omega}{k} = \int_{-\infty}^{\infty} K(\xi) e^{-ik\xi} d\xi. \quad (11.13)$$

Правая часть представляет собой преобразование Фурье заданного ядра $K(x)$, и, согласно формуле обращения, имеем

$$K(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} c(k) e^{ikx} dk. \quad (11.14)$$

Таким образом можно построить уравнение вида (11.12) с любой желаемой функцией $c(k)$ и, следовательно, с любой дисперсионной функцией; надо просто положить $K(x)$ равным преобразованию Фурье (11.14) этой фазовой скорости $c(k)$. В частности, если

$$c(k) = c_0 + c_2 k^2 + \dots + c_{2m} k^{2m},$$

то

$$K(x) = c_0 \delta(x) - c_2 \delta''(x) + \dots + (-1)^m c_{2m} \delta^{(2m)}(x)$$

и (11.12) сводится к дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + c_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} - c_2 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} + \dots + (-1)^m c_{2m} \frac{\partial^{2m+1} \varphi}{\partial x^{2m+1}} = 0.$$

Если $c(k)$ — функция более общего вида с бесконечным рядом Тейлора по степеням k , то можно рассматривать соответствующее дифференциальное уравнение бесконечного порядка, но лучше перейти к уравнению (11.12).

Определение диспергирующих волн

Теперь мы можем дать более четкое определение диспергирующих линейных систем как систем, имеющих решения (11.1) и (11.2), которые удовлетворяют условию (11.5). Имеется некоторое пересечение с гиперболическими системами (это видно из примера (11.6)), но обычно такие системы не являются гиперболическими. Как показывает последний раздел, не следует ограничиваться рассмотрением только дифференциальных уравнений.

Сразу ясно, что это определение слишком узкое. Даже для линейных дифференциальных уравнений оно ограничено условием постоянства коэффициентов. Например, если в уравнении колебаний балки коэффициент γ зависит от x , т. е.

$$\varphi_{tt} + \gamma^2(x) \varphi_{xxxx} = 0,$$

то решений вида (11.1) не существует. Однако если $\gamma(x)$ — плавная функция от x , то можно ожидать, что решение будет во многом похоже на решение уравнения с постоянным коэффициентом γ . С этим случаем можно связать общую задачу о диспергирующих волнах в неоднородной среде. Уравнение может также иметь факторизованные решения, например

$$X(\kappa) e^{-i\omega t}, \quad \omega = W(\kappa),$$

где X — некоторая осциллирующая функция типа, скажем, функции Бесселя. Такое решение будет в некотором смысле диспергирующим, но его было бы трудно включить в общее определение. По-видимому, в настоящий момент придется ограничиться следующей неконструктивной идеей: в каждом случае, когда осцилляции в пространстве и осцилляции по времени связаны дисперсионным соотношением, можно ожидать поведения, характерного для диспергирующих волн.

Аналогичная ситуация имеет место и для нелинейных систем: можно точно определить некоторый ограниченный класс уравнений, а затем естественным образом вводить обобщения.

Более содержательный ответ, возможно, дают вариационные формулировки, о которых пойдет речь ниже. Эти формулировки позволяют развить общую теорию решений требуемого вида и, видимо, обеспечивают надлежащий общий взгляд на многие вопросы, включая классификацию. Пока этот вопрос остается открытым.

11.2. Общее решение в виде интеграла Фурье

Если формулы (11.1) — (11.2) дают элементарное решение линейного уравнения, то — по крайней мере формально — функция

$$\varphi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\kappa) e^{i\kappa \cdot x - iW(\kappa)t} d\kappa \quad (11.15)$$

также будет решением. Подбирая должным образом произвольную функцию $F(\kappa)$, можно удовлетворить заданным начальным или граничным условиям, если, конечно, эти условия достаточно разумны для того, чтобы можно было применять преобразование Фурье. Если имеется n мод с n различными функциями $W(\kappa)$, то будет n слагаемых вида (11.15) с n произвольными функциями $F(\kappa)$. В этом случае для полного определения решения естественно задавать n начальных условий. Примеры (11.6)–(11.8) включают по две моды, и естественно задавать φ и φ_t при $t = 0$. Как и в этих примерах, две моды обычно имеют вид $\omega = \pm W(\kappa)$, и в типичной одномерной задаче соответственно получаем

$$\varphi = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\kappa) e^{i\kappa x - iW(\kappa)t} d\kappa + \int_{-\infty}^{\infty} F_2(\kappa) e^{i\kappa x + iW(\kappa)t} d\kappa \quad (11.16)$$

с начальными условиями

$$\varphi = \varphi_0(x), \quad \varphi_t = \varphi_1(x) \quad \text{при} \quad t = 0.$$

Если $W(\kappa)$ — нечетная по κ функция, как, например, в примере (11.7), то в (11.16) первый член описывает волны, движущиеся вправо, а второй член — влево. Если же $W(\kappa)$ — четная функция, как, например, в примерах (11.6) и (11.8), то волны, движущиеся и вправо, и влево, содержатся в обоих членах. Накладывая начальные условия, получаем

$$\varphi_0(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \{F_1(\kappa) + F_2(\kappa)\} e^{i\kappa x} d\kappa,$$

$$\varphi_1(x) = -i \int_{-\infty}^{\infty} W(\kappa) \{F_1(\kappa) - F_2(\kappa)\} e^{i\kappa x} d\kappa.$$

Формулы обращения дают

$$F_1(\kappa) + F_2(\kappa) = \Phi_0(\kappa) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_0(x) e^{-i\kappa x} dx,$$

$$-iW(\kappa) \{F_1(\kappa) - F_2(\kappa)\} = \Phi_1(\kappa) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x) e^{-i\kappa x} dx,$$

откуда находим $F_1(\kappa)$ и $F_2(\kappa)$:

$$F_1(\kappa) = \frac{1}{2} \left\{ \Phi_0(\kappa) + \frac{i\Phi_1(\kappa)}{W(\kappa)} \right\},$$

$$F_2(\kappa) = \frac{1}{2} \left\{ \Phi_0(\kappa) - \frac{i\Phi_1(\kappa)}{W(\kappa)} \right\}.$$

Поскольку функции $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ вещественны, $\Phi_0(-\kappa) = \Phi_0^*(\kappa)$ и $\Phi_1(-\kappa) = \Phi_1^*(\kappa)$, где звездочкой отмечены комплексно сопряженные величины. Отсюда следует, что для нечетной функции $W(\kappa)$

$$\begin{aligned} F_1(-\kappa) &= F_1^*(\kappa), \\ F_2(-\kappa) &= F_2^*(\kappa), \end{aligned} \quad (11.17)$$

а для четной $W(\kappa)$

$$\begin{aligned} F_1(-\kappa) &= F_2^*(\kappa), \\ F_2(-\kappa) &= F_1^*(\kappa). \end{aligned} \quad (11.18)$$

В обоих случаях] решение (11.16) вещественно; вещественные начальные условия для вещественного уравнения должны приводить к вещественным решениям.

Стандартное решение, по которому легко построить остальные решения, можно получить, положив

$$\varphi_0(x) = \delta(x), \quad \varphi_1(x) = 0.$$

Тогда $F_1(\kappa) = F_2(\kappa) = 1/(4\pi)$ и выражение (11.16) сводится к следующему:

$$\varphi = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \kappa x \cos W(\kappa) t d\kappa. \quad (11.19)$$

Конечно, этот расходящийся интеграл следует интерпретировать как обобщенную функцию.

11.3. Асимптотическое поведение решения

Хотя интегралы Фурье дают точные решения, все же их поведение трудно определить непосредственно. Если рассматривать асимптотические выражения для больших x и t , то это поведение становится яснее, а основные свойства диспергирующих волн понятнее. Рассмотрим сначала типичный интеграл

$$\varphi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\kappa) e^{i\kappa x - iW(\kappa)t} d\kappa$$

в одномерном случае. При изучении волнового движения мы интересуемся поведением при больших значениях как x , так и t , точнее, при $t \rightarrow \infty$, x/t фиксировано. (Конкретный выбор отношения x/t позволяет изучить волны, движущиеся с заданной скоростью.) В соответствии с этим запишем интеграл в виде

$$\varphi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\kappa) e^{-i\kappa t} d\kappa, \quad (11.20)$$

где

$$\chi(\kappa) = W(\kappa) - \kappa \frac{x}{t}.$$

В данном контексте x/t — фиксированный параметр и χ зависит только от κ . Интеграл (11.20) можно теперь изучать методом стационарной фазы; в самом деле, именно для этой задачи Кельвин разработал указанный метод. Кельвин показал, что для больших t основной вклад в интеграл дает окрестность стационарных точек $\kappa = k$, таких, что

$$\chi'(k) = W'(k) - \frac{x}{t} = 0. \quad (11.21)$$

В остальных точках происходит быстрая осцилляция и суммарный вклад оказывается малым. Более поздние формулировки метода скорейшего спуска (или метода перевала) могут быть легче обоснованы и позволяют оценить ошибки. Полное обсуждение этих методов содержится, например, в книге Джеффриса и Джеффрис (Свирлс) [1, § 17.04—17.05]¹). Для наших целей достаточно найти первый член асимптотического разложения, следуя рассуждениям Кельвина.

Разложим функции $F(\kappa)$ и $\chi(\kappa)$ в (11.20) в ряды Тейлора в окрестности $\kappa = k$. Доминирующий вклад дадут члены

$$F(\kappa) \simeq F(k),$$

$$\chi(\kappa) \simeq \chi(k) + \frac{1}{2}(\kappa - k)^2 \chi''(k)$$

при условии, что $\chi''(k) \neq 0$. В таком приближении искомый вклад равен

$$F(k) \exp\{-i\chi(k)t\} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{i}{2}(\kappa - k)^2 \chi''(k)t\right\} d\kappa.$$

Оставшийся интеграл сводится к вещественному интегралу ошибок

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha z^2} dz = (\pi/\alpha)^{1/2}$$

поворотом контура интегрирования²) на $\pm\pi/4$; знак следует выбрать такой же, как знак $\chi''(k)$. Окончательно получаем

$$F(k) \sqrt{\frac{2\pi}{t|\chi''(k)|}} \exp\left\{-i\chi(k)t - \frac{i\pi}{4} \operatorname{sgn} \chi''(k)\right\}.$$

¹) См. также Лаврентьев М. А., Шабат Б. В., Методы теории функций комплексного переменного, изд. 4, М.—Л., «Наука», 1973; Федорюк М. В., Метод перевала, М.—Л., «Наука», 1977.— *Прим. ред.*

²) Это соответствует переходу к линии скорейшего спуска.

Если существует несколько стационарных точек $\kappa = k$, удовлетворяющих уравнению (11.21), то каждая дает аналогичный вклад и имеем

$$\varphi \sim \sum_{\text{стационарные точки } k} F(k) \sqrt{\frac{2\pi}{t|W''(k)|}} \times \\ \times \exp \left\{ ikx - iW(k)t - \frac{i\pi}{4} \operatorname{sgn} W''(k) \right\}. \quad (11.22)$$

Для получения следующего члена асимптотического разложения необходимо продолжить ряды Тейлора до члена $(\kappa - k)^2$ для $F(\kappa)$ и до члена $(\kappa - k)^4$ для $\chi(\kappa)$. Два следующих члена необходимы, поскольку нечетные степени при интегрировании выпадают. Когда это сделано (предпочтительнее с использованием метода скорейшего спуска), дополнительный член можно записать в виде множителя

$$1 + \frac{i}{t|W''|} \left(\frac{F''}{2F} - \frac{1}{2} \frac{W'''}{W''} \frac{F'}{F} + \frac{5}{24} \frac{W'''^2}{W''^2} - \frac{1}{8} \frac{W^{(4)}}{W''} \right) \quad (11.23)$$

при соответствующем члене в (11.22). Столь сложное выражение получается из-за необходимости работать с двумя следующими членами рядов Тейлора для F и χ . В общем случае асимптотическое поведение описывается дальнейшим разложением по отрицательным степеням t с коэффициентами, зависящими от k .

До сих пор смысл выражения «большие значения t » оставался неясен. Теперь можно потребовать, чтобы поправочный член в (11.23) был малым; t должно быть большим в шкале времени, связанной с дисперсионным соотношением и шкалой длин из начальных условий. Для начальных условий в виде четко выраженного пика с малой характерной длиной величины F' и F'' малы и требуется, чтобы t было большим по сравнению с характерным периодом для $W(k)$, что в свою очередь задается параметрами уравнения. В предельном случае начальных условий в виде δ -функции величина F постоянна и $F' = F'' = 0$.

Для частного случая с двумя модами $\omega = \pm W(\kappa)$ полное решение дается формулой (11.16). Предположим, далее, что производная $W'(\kappa)$ монотонна и положительна при $\kappa > 0$ (это обычно выполняется), и рассмотрим асимптотическое поведение выражения (11.16) для $x > 0$. Если $W(\kappa)$ — нечетная функция, то производная $W'(\kappa)$ — четная функция и уравнение (11.21) имеет два корня $\pm k$. Соответствующие два вклада в (11.22) можно объеди-

нить, поскольку $F_1(-k) = F_1^*(k)$, согласно (11.17), и получить

$$\begin{aligned} \varphi \sim 2 \operatorname{Re} \left(F_1(k) \right) \sqrt{\frac{2\pi}{t |W''(k)|}} \times \\ \times \exp \left\{ ikx - iW(k)t - i \frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} W''(k) \right\}, \\ t \rightarrow \infty, \quad \frac{x}{t} > 0, \end{aligned} \quad (11.24)$$

где $k(x, t)$ — положительный корень уравнения (11.21), определяемый соотношением

$$k(x, t): \quad W'(k) = \frac{x}{t}, \quad k > 0, \quad \frac{x}{t} > 0. \quad (11.25)$$

Для нечетной функции $W(\kappa)$ второй интеграл в (11.16) не дает вклада в решение при $x > 0$; он дает соответствующее выражение для $x < 0$.

Если $W(\kappa)$ — четная функция, то производная $W'(\kappa)$ — нечетная функция, уравнение (11.21) имеет один корень k при $x > 0$ и этот корень положителен. Поэтому первый интеграл в формуле (11.16) дает только один вклад. Однако для второго интеграла в решении (11.16) стационарные точки удовлетворяют уравнению

$$W'(\kappa) = -\frac{x}{t},$$

и $-k$ будет решением этого уравнения при $x > 0$. Таким образом, если k определяется соотношениями (11.25), то в (11.16) имеются стационарная точка $\kappa = k$ в первом интеграле и стационарная точка $\kappa = -k$ во втором интеграле. В силу (11.18), вклады снова объединяются и суммарный результат приводит к той же формуле (11.24).

Важность условия $W''(\kappa) \neq 0$ в определении диспергирующих волн для линейных систем теперь очевидна. Если производная $W'(\kappa)$ постоянна, то при любом значении отношения x/t стационарных точек нет и весь асимптотический анализ меняется. Конечно, он и не нужен, поскольку интегралы Фурье немедленно упрощаются. Важность условия $W''(k) \neq 0$ связана и с тем, что W'' стоит в знаменателе выражений (11.24) и (11.23). Если $W''(\kappa)$ не равна тождественно нулю, но обращается в нуль для некоторой стационарной точки k , то правильное асимптотическое поведение определяется с помощью дальнейших членов ряда Тейлора для χ . Если $\chi''(k) = 0$, но $\chi'''(k) \neq 0$, то вклад в (11.20) равен

$$\begin{aligned} F(k) \exp \{ -i\chi(k)t \} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{i}{6} t \chi'''(k) (\kappa - k)^3 \right\} d\kappa = \\ = \left(\frac{1}{3} \right)! 3^{5/6} 2^{1/3} \frac{F(k)}{(t |W'''(k)|)^{1/3}} \exp \{ ikx - iW(k)t \}. \end{aligned} \quad (11.26)$$

Поскольку k — функция от x/t , это выражение указывает на сингулярное поведение решения на соответствующей прямой $x/t = W'(k)$ и в ее окрестности.

Перейдем теперь к подробному обсуждению асимптотических формул (11.24) и (11.25).

11.4. Групповая скорость; распространение возмущений волнового числа и амплитуды

В каждой точке (x, t) соотношения (11.25) дают определенное значение волнового числа $k(x, t)$, а дисперсионное соотношение $\omega = W(k)$ дает и частоту $\omega(x, t)$ в этой точке. Можно ввести фазу

$$\theta(x, t) = xk(x, t) - t\omega(x, t)$$

и переписать формулу (11.24) в виде

$$\varphi = \operatorname{Re} \{ A(x, t) e^{i\theta(x, t)} \}, \quad (11.27)$$

где комплексная амплитуда равна

$$A(x, t) = 2F_1(k) \sqrt{\frac{2\pi}{t|W''(k)|}} e^{-(\pi i/4) \operatorname{sgn} W''}. \quad (11.28)$$

Выражение (11.27) имеет форму элементарного решения, но величины A , k , ω уже не постоянны. Однако это решение все еще описывает осциллирующий волновой пакет с фазой θ , представляющей изменения между локальными максимумами и минимумами. Отличие в том, что волновой пакет теперь неоднороден, расстояние и время между двумя последующими максимумами непостоянно так же, как и амплитуда.

Естественно обобщить на этот неоднородный случай понятие волнового числа и частоты, определив их как θ_x и $-\theta_t$ соответственно. Число максимумов на единицу длины является грубой и некорректно определенной величиной, в то время как величина θ_x более точно и непосредственно соответствует интуитивному представлению локального волнового числа. Более того, в рассматриваемом случае мы имеем

$$\begin{aligned} \theta(x, t) &= kx - W(k)t, \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} &= k + \{x - W'(k)t\} \frac{\partial k}{\partial x}, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} &= -W(k) + \{x - W'(k)t\} \frac{\partial k}{\partial t}. \end{aligned} \quad (11.29)$$

Члены, содержащие k_x и k_t , исключаются условием стационарности (11.25), и остается просто

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = k(x, t), \quad (11.30)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -W(k) = -\omega(x, t). \quad (11.31)$$

Таким образом, определение волнового числа k , которое было введено как специальное значение волнового числа в интеграле Фурье, согласуется с нашим расширенным определением локального волнового числа θ_x в осциллирующем неоднородном волновом пакете. Это же верно и для соответствующей локальной частоты. *Более того, локальное волновое число и локальная частота удовлетворяют дисперсионному соотношению даже в неоднородном волновом пакете.*

Такая согласованность двух определений объясняется малой неоднородностью процесса. При слишком беспорядочных осцилляциях тоже можно найти фазовую функцию θ и затем определить θ_x как волновое число, но если производная θ_x сама быстро меняется на протяжении *одной* осцилляции, то интуитивная интерпретация будет утеряна. В нашем случае $k(x, t)$ — медленно меняющаяся функция. Из соотношения (11.25) имеем

$$\frac{k_x}{k} = \frac{W'}{kW''} \frac{1}{x}, \quad \frac{k_t}{k} = -\frac{1}{kW''(k)} \frac{1}{t},$$

причем обе величины x и t относительно велики. Следовательно, относительное изменение на одну длину волны или на один период малы, и в этом смысле k — медленно меняющаяся функция; то же верно и для ω . (Снова отметим сингулярное поведение в окрестности каждой точки, где $W''(k) = 0$.) Исходя из выражения (11.28), легко показать, что A также меняется медленно.

С этими интерпретациями величин, фигурирующих в (11.27), мы вернемся к определению (11.25) для k и ω как функций от (x, t) и к определению (11.28) для A . Соотношения (11.25) определяют k как функцию от x и t , но полезно рассмотреть обратную функцию и выяснить, где можно найти конкретное значение k_0 . Ответ очевиден: в точках, где

$$x = W'(k_0) t.$$

Таким образом, наблюдатель, движущийся со скоростью $W'(k_0)$, все время будет видеть волны с волновым числом k_0 и частотой $W(k_0)$.

Величина

$$W'(k) = \frac{d\omega}{dk}$$

называется *групповой скоростью*; это понятие скорости «группы» волн с меняющимся волновым числом весьма важно. Наша интерпретация определения (11.25) показывает, что *каждое волновое число распространяется со своей групповой скоростью*; каждое конкретное волновое число k_0 за время t смещается на расстояние $W'(k_0)t$.

Распространение каждого фиксированного значения фазы θ_0 описывается уравнением

$$\theta(x, t) = \theta_0,$$

или

$$\theta_x \frac{dx}{dt} + \theta_t = 0,$$

откуда

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\theta_t}{\theta_x} = \frac{\omega}{k}.$$

Таким образом, фазовая скорость s по-прежнему равна ω/k , хотя понятия величин ω и k и были расширены. Но она не совпадает с групповой скоростью. Наблюдатель, расположенный на каком-либо выбранном гребне, движется с локальной фазовой скоростью, но видит изменяющиеся локальные волновое число и частоту, т. е. гребни исходной формы уходят от него все дальше и дальше. Наблюдатель, движущийся с групповой скоростью, видит одни и те же локальные волновое число и частоту, но гребни проходят мимо него один за другим.

Для того чтобы продемонстрировать это важное различие, рассмотрим уравнение колебаний балки. Дисперсионное соотношение имеет вид

$$W(k) = \gamma k^2.$$

Поэтому (11.25) дает

$$W'(k) = 2\gamma k = \frac{x}{t},$$

и мы имеем

$$k = \frac{x}{2\gamma t}, \quad \omega = \frac{x^2}{4\gamma t^2}, \quad \theta = \frac{x^2}{4\gamma t}.$$

Групповым линиям с постоянными k и ω соответствуют прямые

$$\frac{x}{2\gamma t} = \text{const},$$

а фазовым линиям с постоянной θ — параболы

$$\frac{x^2}{4\gamma t} = \text{const}.$$

Они построены на (x, t) -диаграмме, представленной на рис. 11.1. В данном случае групповая скорость $2\gamma k$ больше фазовой скорости γk .

Для волн на глубокой воде (см. гл. 12) дисперсионное соотношение имеет вид $W = \sqrt{gk}$. Поэтому уравнение $W'(k) = x/t$ приводит к формулам

$$k = \frac{gt^2}{4x^2}, \quad \omega = \frac{gt}{2x}, \quad \theta = -\frac{gt^2}{4x}.$$

Групповая скорость $1/2\sqrt{g/k}$ меньше фазовой скорости $\sqrt{g/k}$, и мы имеем ситуацию, изображенную на рис. 11.2.

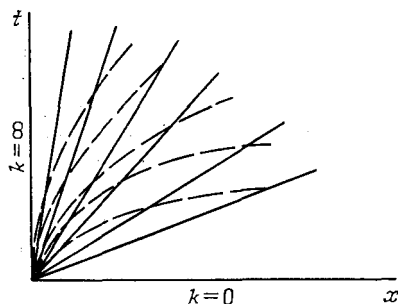
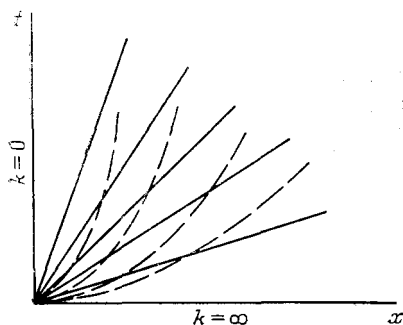


Рис. 11.1. Групповые линии (сплошные кривые) и фазовые линии (штриховые кривые) для волн в балке.

Рис. 11.2. Групповые линии (сплошные кривые) и фазовые линии (штриховые кривые) для волн на глубокой воде.

Во всех случаях (для пока что рассматривавшихся однородных сред) групповые линии являются прямыми в отличие от фазовых линий; каждое волновое число распространяется с постоянной скоростью, каждая фаза ускоряется или замедляется, проходя через различные волновые числа.

Если начальные условия взять в виде δ -функции, так что $F_1(k) = 1/(4\pi)$, то амплитуду $A(x, t)$ можно также найти в явном виде и полные асимптотические решения равны соответственно

$$\varphi \sim \frac{1}{\sqrt{4\pi\gamma t}} \cos\left(\frac{x^2}{4\gamma t} - \frac{\pi}{4}\right) \quad (11.32)$$

для балки и

$$\varphi \sim \frac{1}{2} \left(\frac{g}{\pi}\right)^{1/2} \frac{t}{x^{3/2}} \cos\left(\frac{gt^2}{4x} - \frac{\pi}{4}\right) \quad (11.33)$$

для волн на воде. (В действительности равенство (11.32) является точным, поскольку для балки $W(k)$ совпадает с квадратичной функцией.)

Вторая важная роль групповой скорости проявляется при изучении амплитуды $A(x, t)$. Формула (11.28) наводит на мысль, что удобнее рассматривать величину $|A|^2$, и это естественно с физической точки зрения, поскольку данная величина подобна энергии. Связь $|A|^2$ с истинной энергией и так называемым «волновым действием» будет выяснена ниже, а пока что $A(x, t)$ — вполне определенная величина, заданная формулой (11.28), и мы можем рассматривать $|A|^2$.

Интеграл от $|A|^2$ по отрезку $x_2 > x_1 > 0$, согласно (11.28), равен

$$Q(t) = \int_{x_1}^{x_2} A A^* dx = 8\pi \int_{x_1}^{x_2} \frac{F_1(k) F_1^*(k)}{t |W''(k)|} dx.$$

В этом интеграле k как функция от x и t определяется равенством (11.25). Поскольку k входит в подынтегральное выражение, а x в него не входит, естественно принять k за новую переменную интегрирования, проведя замену

$$x = W'(k) t.$$

При $W''(k) > 0$ имеем

$$Q(t) = 8\pi \int_{k_1}^{k_2} F_1(k) F_1^*(k) dk, \quad (11.34)$$

где k_1 и k_2 определяются равенствами

$$x_1 = W'(k_1) t, \quad x_2 = W'(k_2) t. \quad (11.35)$$

Если $W''(k) < 0$, то пределы интегрирования меняются местами.

Пусть теперь k_1 и k_2 фиксированы, а t меняется; тогда интеграл $Q(t)$ остается постоянным. Согласно равенствам (11.35), при этом точки x_1 и x_2 движутся с соответствующими групповыми скоростями. Мы, следовательно, доказали, что полный интеграл от $|A|^2$ между любой парой групповых линий остается неизменным. В этом смысле $|A|^2$ распространяется с групповой скоростью. Групповые линии расходятся на расстояние, пропорциональное t , так что $|A|$ убывает как $t^{-1/2}$.

В частном случае волнового пакета, для которого исходное возмущение локализовано в пространстве и имеет значительные амплитуды только для волновых чисел, близких к некоторому определенному значению k^* , результирующее возмущение сосредоточено в окрестности групповой линии k^* и волновой пакет как целое движется с групповой скоростью $W'(k^*)$. Описание свойств групповой скорости часто ограничивают только этим случаем. Однако предыдущие рассуждения не связаны этим ограничением и допускают произвольное распределение по всем волновым

числам с полной картиной дисперсии, изображенной на рис. 11.1 и рис. 11.2, когда в игру вступает вся область значений функции $W'(k)$.

11.5. Групповая скорость с точки зрения кинематической теории

Понятие групповой скорости настолько важно для понимания волнового движения, что возникает следующая мысль: это понятие не должно быть только конечным результатом применения преобразования Фурье и метода стационарной фазы. Для неоднородной среды или для нелинейных задач, где преобразование Фурье неприменимо, подобное понятие, несомненно, также должно существовать и играть столь же важную роль. Но каким же образом можно обойтись без преобразования Фурье?

Чтобы увидеть, как обобщить предыдущие результаты, рассмотрим их вывод, основанный на более интуитивных рассуждениях. Эти рассуждения всегда можно сравнить с предыдущим изложением или в конце концов оправдать прямыми асимптотическими методами. Преимущества огромны, поскольку при этом можно добиться успеха в приближенном подходе к задачам, для которых точные решения неизвестны. В то же самое время мы получим возможность быстрее и глубже понять даже те задачи, для которых можно найти точные решения.

Рассмотрим сначала роль групповой скорости в описании пространства волнового числа и частоты. Пересмотрев предыдущие рассуждения, видим, что нам требовалось очень мало. Прежде всего если мы предположим, что имеется медленно меняющийся волновой пакет и определена фазовая функция $\theta(x, t)$, то локальные волновое число и частоту можно определить равенствами

$$k = \theta_x, \quad \omega = -\theta_t. \quad (11.36)$$

Далее, если мы знаем или можем задать дисперсионное соотношение

$$\omega = W(k), \quad (11.37)$$

то оно дает уравнение для θ , которое можно решить и найти геометрию волнового процесса. Однако обычно удобнее исключить из равенств (11.36) функцию θ , перейти к уравнению

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0, \quad (11.38)$$

подставить в него выражение (11.37) для ω и найти сначала $k(x, t)$, а затем $\omega(x, t)$. Заметим, что такая формулировка является исходной для нелинейных волн, рассмотренных в гл. 2. Действи-

тельно, k представляет собой плотность волн, а ω — поток волн и уравнение (11.38) описывает закон сохранения волн! Подставляя в это уравнение дисперсионное соотношение (11.37), получаем

$$\frac{\partial k}{\partial t} + C(k) \frac{\partial k}{\partial x} = 0, \quad C(k) = W'(k). \quad (11.39)$$

Следовательно, групповая скорость $C(k)$ является скоростью распространения возмущений волнового числа k .

Согласно анализу, проведенному в гл. 2, общее решение уравнения (11.39) с начальным условием $k = f(x)$ при $t = 0$ имеет вид

$$k = f(\xi), \quad x = \xi + C(\xi)t, \quad (11.40)$$

где

$$C(\xi) = C\{f(\xi)\}.$$

Специфический случай центрированной простой волны возникает тогда, когда область изменения значений функции k первоначально сконцентрирована в начале координат. При этом $k(x, t)$ находится из условия²⁴

$$x = C(k)t.$$

Это совпадает с определением k , данным соотношениями (11.25) и графически представленным на рис. 11.1 и рис. 11.2. Для справедливости асимптотического разложения (11.24), согласно (11.23), требуются настолько большие значения x и t , чтобы исходное возмущение представлялось сконцентрированным в начале координат.

Однако обобщение понятий уже проведено. Медленно меняющийся волновой пакет, определяемый функцией $\theta(x, t)$, не обязан образовываться из возмущения, сконцентрированного в начале координат, и распределение $k(x, t)$ может иметь более общий вид (11.40). Далее, решение ϕ не обязательно должно быть синусоидальным по θ ; допускается любой осциллирующий волновой пакет, для которого можно выделить фазу θ и ввести дисперсионное соотношение между k и ω .

Интересно и показательно, что уравнение (11.39) для k нелинейно даже в том случае, когда исходная задача линейна, и что оно является гиперболическим, хотя исходное уравнение для ϕ в общем случае таковым не является. Это первый пример, когда гиперболические уравнения получаются при описании распространения важных общих величин типа k . В этом смысле можно сохранить связь распространения волн с гиперболическими уравнениями, но имеется и существенная негиперболическая подструктура.

Обобщения

Упрощенный вывод групповой скорости легко обобщить на линейные задачи с большим числом измерений и неоднородной средой. С обобщением на нелинейные задачи пока следует подождать, поскольку для таких задач дисперсионное соотношение будет содержать также и амплитуду. Для многомерных уравнений с постоянными коэффициентами точное решение все еще можно найти с помощью кратных интегралов Фурье, а методом стационарной фазы можно получить асимптотическое разложение. Легко показать, что в случае n пространственных измерений решение имеет следующий вид

$$\begin{aligned}\varphi &= \int_{-\infty}^{\infty} F(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - iW(\mathbf{k})t} d\mathbf{x} \sim \\ &\sim F(\mathbf{k}) \left(\frac{2\pi}{t}\right)^{n/2} \left(\det \left| \frac{\partial W}{\partial k_i \partial k_j} \right| \right)^{-1/2} \exp \{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - iW(\mathbf{k})t + i\zeta\},\end{aligned}\quad (11.41)$$

где

$$\frac{x_i}{t} = \frac{\partial W(\mathbf{k})}{\partial k_i},$$

а ζ зависит от числа множителей $\pi i/4$, получающихся при повороте контура интегрирования. Однако мы будем использовать более простой кинематический вывод и рассмотрим также случай неоднородной среды.

Описание медленно меняющейся волны, скажем в трех измерениях, включает фазовую функцию $\theta(\mathbf{x}, t)$, где $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Определим частоту ω и волновой вектор $\mathbf{k}$ формулами

$$\omega = -\frac{\partial \theta}{\partial t}, \quad k_i = \frac{\partial \theta}{\partial x_i}. \quad (11.42)$$

Будем считать, что дисперсионное соотношение известно и что его можно записать в виде

$$\omega = W(\mathbf{k}, \mathbf{x}, t).$$

Для однородной среды это соотношение можно получить при помощи элементарного решения (11.1). Для слегка неоднородной среды представляется разумным найти дисперсионное соотношение сначала для постоянных значений параметров среды и затем учесть их зависимость от $\mathbf{x}$ и t . Например, если в примерах (11.6)–(11.9) α , β и γ являются медленно меняющимися функциями от $\mathbf{x}$ или t , то можно использовать те же самые дисперсионные соотношения, что и приведенные в этих примерах, но с α , β , γ в виде заданных функций от $\mathbf{x}$ и t . Интуитивно этот метод кажется

удовлетворительным при условии, что α , β и γ мало изменяются на протяжении одной длины волны и одного периода. Это будет подтверждено в § 11.7 и 11.8.

Исключив из равенств (11.42) фазу θ , имеем

$$\frac{\partial k_i}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial k_i}{\partial x_j} - \frac{\partial k_j}{\partial x_i} = 0. \quad (11.43)$$

Подставив в первое из этих уравнений $\omega = W(\mathbf{k}, \mathbf{x}, t)$, получим

$$\frac{\partial k_i}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial k_j} \frac{\partial k_j}{\partial x_i} = - \frac{\partial W}{\partial x_i}.$$

Поскольку $\partial k_j / \partial x_i = \partial k_i / \partial x_j$, это можно переписать в виде

$$\frac{\partial k_i}{\partial t} + C_j \frac{\partial k_i}{\partial x_j} = - \frac{\partial W}{\partial x_i}, \quad (11.44)$$

где

$$C_j(\mathbf{k}, \mathbf{x}, t) = \frac{\partial W(\mathbf{k}, \mathbf{x}, t)}{\partial k_j}. \quad (11.45)$$

Для трех измерений групповая скорость $\mathbf{C}$ определяется равенством (11.45) и является скоростью распространения возмущений в уравнениях (11.44), определяющих k_i . Уравнения (11.44) можно переписать в характеристической форме

$$\frac{dk_i}{dt} = - \frac{\partial W}{\partial x_i} \quad \text{при} \quad \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial W}{\partial k_i}. \quad (11.46)$$

Заметим, что для однородной среды вектор $\mathbf{k}$ постоянен и характеристики являются прямыми в $(\mathbf{x}, t)$ -пространстве. Каждое значение вектора $\mathbf{k}$ распространяется с соответствующей постоянной групповой скоростью $\mathbf{C}(\mathbf{k})$. Но это не имеет места для неоднородной среды, поскольку в этом случае значения вектора $\mathbf{k}$ изменяются при распространении вдоль характеристик, а сами характеристики больше не являются прямыми. Стоит также заметить, что

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\partial \omega}{\partial t} + C_j \frac{\partial \omega}{\partial x_j} = \frac{\partial W}{\partial t}.$$

Частота на каждой характеристике постоянна, если свойства среды не меняются со временем, и переменна в противном случае.

Интересно, что уравнения (11.46) совпадают с уравнениями Гамильтона в механике, если $\mathbf{x}$ и $\mathbf{k}$ интерпретировать как координаты и импульсы, а $W(\mathbf{k}, \mathbf{x}, t)$ принять за гамильтониан! Если не исключать θ , а вместо этого подставить в дисперсионное соотношение ω и $\mathbf{k}$, выраженные через θ , то получим

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + W\left(\frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{x}}, \mathbf{x}, t\right) = 0. \quad (11.47)$$

Это уравнение Гамильтона — Якоби с фазой θ в качестве действия.

Если W не зависит от x и t , то решение уравнения (11.46) с начальным условием $k_i = f_i(x)$ имеет вид

$$k_i = f_i(\xi), \quad x_i = \xi_i + \mathcal{C}_i(\xi) t, \quad (11.48)$$

где

$$\mathcal{C}_i(\xi) = C_i\{f(\xi)\}.$$

Центрированное решение, соответствующее случаю, когда при $t = 0$ вся область изменения вектора $\mathbf{k}$ сосредоточена в начале координат, можно получить, определив $\mathbf{k}(x, t)$ из уравнения

$$x_i = C_i(\mathbf{k}) t. \quad (11.49)$$

Этот частный случай соответствует асимптотическому представлению (11.41) кратного интеграла Фурье.

Примеры использования полученных уравнений будут приведены в гл. 12.

11.6. Распространение энергии

Предыдущий кинематический вывод показывает одну из ролей групповой скорости и определяет геометрию волн. Другая роль групповой скорости связана с распределением амплитуды $A(x, t)$, заданным формулами (11.27)–(11.28). Хотелось бы найти — по возможности в том же стиле — непосредственный подход к описанию поведения амплитуды A и ее связи с групповой скоростью. Это представляется реальным, поскольку, очевидно, здесь затрагивается энергия и, по-видимому, можно непосредственно сформулировать закон сохранения энергии. Это действительно так. Однако дальнейшие исследования, использующие вариационные формулировки, не только уточнили и обобщили выводы, но и показали, что основным понятием данной теории является, пожалуй, не энергия, а «волновое действие». Вариационный подход — дело тонкое, и полезно подготовить почву при помощи более традиционного рассмотрения распространения энергии.

Мы начнем, как и ранее, с одномерной задачи для однородной среды и выясним, как получить информацию о распределении амплитуды, не используя интеграл Фурье. В этом первом подходе мы вынуждены работать с конкретными примерами. Уравнение Клейна — Гордона

$$\varphi_{tt} - \alpha^2 \varphi_{xx} + \beta^2 \varphi = 0$$

является одним из простейших, поскольку не содержит производных высокого порядка. Оно гиперболическое и в этом отношении исключительное, но нас интересуют только осциллирующие части решения, а не поведение волнового фронта. Соответствующее

энергетическое уравнение хорошо известно и в случае постоянных коэффициентов α и β имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \varphi_t^2 + \frac{1}{2} \alpha^2 \varphi_x^2 + \frac{1}{2} \beta^2 \varphi^2 \right) + \frac{\partial}{\partial x} (-\alpha^2 \varphi_t \varphi_x) = 0. \quad (11.50)$$

Рассмотрим теперь медленно изменяющийся волновой пакет, для которого

$$\varphi \sim \operatorname{Re} (A e^{i\theta}) = a \cos (\theta + \eta),$$

$$a = |A|, \quad \eta = \arg A,$$

и вычислим плотность энергии и поток энергии. Член типа $\frac{1}{2} \varphi_t^2$ дает

$$\frac{1}{2} \omega^2 a^2 \sin^2 (\theta + \eta),$$

а также члены, содержащие a_t и η_t . Поскольку a и η предполагаются медленно изменяющимися, этими последними членами в первом приближении можно пренебречь. Аналогичным образом находим вклады остальных членов, после чего получаем приближенное выражение для плотности энергии

$$\frac{1}{2} (\omega^2 + \alpha^2 k^2) a^2 \sin^2 (\theta + \eta) + \frac{1}{2} \beta^2 a^2 \cos^2 (\theta + \eta) \quad (11.51)$$

и соответствующее выражение для потока энергии

$$\alpha^2 \omega k a^2 \sin^2 (\theta + \eta). \quad (11.52)$$

В задачах, содержащих производные более высоких порядков, возникают дополнительные члены, включающие производные от ω и k , но ими можно пренебречь, поскольку ω и k также являются медленно изменяющимися величинами.

Поскольку нас интересуют изменения величин ω , k , a , а не детали осцилляции, рассмотрим средние значения выражений (11.51) и (11.52). Средние значения функций $\cos^2 (\theta + \eta)$ и $\sin^2 (\theta + \eta)$ по одному периоду равны одной второй, так что для средних значений плотности энергии и потока энергии имеем следующие формулы:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{4} (\omega^2 + \alpha^2 k^2 + \beta^2) a^2, \quad (11.53)$$

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \alpha^2 \omega k a^2. \quad (11.54)$$

В нашей конкретной задаче дисперсионное соотношение имеет вид

$$\omega = \sqrt{\alpha^2 k^2 + \beta^2}; \quad (11.55)$$

поэтому

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} (\alpha^2 k^2 + \beta^2) a^2, \quad \mathcal{F} = \frac{1}{2} \alpha^2 k \sqrt{\alpha^2 k^2 + \beta^2} a^2. \quad (11.56)$$

Групповая скорость выражается формулой

$$C(k) = \frac{\alpha^2 k}{\sqrt{\alpha^2 k^2 + \beta^2}}, \quad (11.57)$$

и мы получаем важный результат

$$\mathcal{F} = C(k) \mathcal{E}, \quad (11.58)$$

который, как оказывается, носит общий характер. Исходя из интуитивных предположений об общем балансе энергии, хочется ввести закон сохранения «усредненной» энергии:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (C \mathcal{E}) = 0, \quad (11.59)$$

который явится уравнением для определения модуля амплитуды a . Это уравнение представляет собой дифференциальную форму следующего утверждения: *полная энергия между двумя любыми групповыми линиями остается постоянной*. Действительно, если рассмотреть энергию

$$E(t) = \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \mathcal{E} dx \quad (11.60)$$

в интервале между точками x_1 и x_2 , движущимися с групповыми скоростями $C(k_1)$ и $C(k_2)$ соответственно, то

$$\frac{dE}{dt} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} dx + C_2 \mathcal{E}_2 - C_1 \mathcal{E}_1; \quad (11.61)$$

в силу (11.59), эта величина равна нулю. Обратно, уравнение (11.59) представляет собой просто предел соотношения (11.61) при $x_2 - x_1 \rightarrow 0$.

Такое поведение было обнаружено в § 11.4 для a^2 , а не для $\mathcal{E}$. Однако $\mathcal{E} = f(k) a^2$, и если это выражение подставить в уравнение (11.59), то результат можно записать в виде

$$f(k) \left\{ \frac{\partial a^2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (C a^2) \right\} + f'(k) a^2 \left\{ \frac{\partial k}{\partial t} + C \frac{\partial k}{\partial x} \right\} = 0. \quad (11.62)$$

Поскольку (см. (11.39))

$$\frac{\partial k}{\partial t} + C \frac{\partial k}{\partial x} = 0, \quad (11.63)$$

получаем

$$\frac{\partial a^2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (C a^2) = 0. \quad (11.64)$$

Мы видим, что если выполняется уравнение (11.63), то любую функцию от k можно внести в уравнения (11.59) и (11.64) (или

вынести из этих уравнений). Далее, согласно тем же рассуждениям, что и для $\mathcal{E}$, уравнение (11.64) можно рассматривать как дифференциальную форму следующего полученного в § 11.4 результата: интеграл

$$Q(t) = \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} a^2 dx \quad (11.65)$$

остаётся постоянным между двумя групповыми линиями. Это лишний раз подтверждает уравнения (11.64) и (11.59). Прямое доказательство будет приведено ниже.

Можно также отметить, что характеристические формы уравнений (11.63) и (11.64) имеют вид

$$\frac{dk}{dt} = 0, \quad \frac{da^2}{dt} = -C'(k) k_x a^2, \quad \frac{dx}{dt} = C(k), \quad (11.66)$$

(Во втором уравнении производную k_x можно рассматривать как известную функцию, поскольку сначала находится функция $k(x, t)$; это — исключительный случай примера 7 из § 5.2.) Групповая скорость $C(k)$ фигурирует как *двойная характеристическая скорость* в соответствии со своей двойственной ролью, отмеченной в § 11.4.

Асимптотическое решение, полученное в § 11.3, является частным случаем централизованной волны, когда $k(x, t)$ представляет собой функцию от x/t , определяемую из уравнения

$$\frac{x}{t} = C(k).$$

В этом случае уравнение для амплитуды имеет вид

$$\frac{da^2}{dt} = -\frac{a^2}{t}.$$

Поскольку k тоже можно использовать как характеристическую переменную, то решение этого уравнения можно записать в виде

$$a = t^{-1/2} \mathcal{A}(k),$$

где $\mathcal{A}(k)$ — произвольная функция. Это согласуется с выражением (11.28) и снова подтверждает справедливость нашего подхода. Конечно, функцию $\mathcal{A}(k)$ нельзя найти одними асимптотическими исследованиями, не обращаясь к начальным условиям.

В рассматриваемой задаче Коши мы знаем, что в действительности функция $\mathcal{A}(k)$ дается выражением (11.28), и интересно отметить, что, в силу этого выражения, энергия $E(t)$ между групповыми линиями $k = k_1$ и $k = k_2$, определяемая равенством (11.60),

составляет

$$\begin{aligned} E(t) &= 8\pi \int_{x_1}^{x_2} f(k) \frac{F_1(k) F_1^*(k)}{|t| W''(k)} dx = \\ &= 8\pi \int_{k_1}^{k_2} f(k) F_1(k) F_1^*(k) dk, \end{aligned} \quad (11.67)$$

где $f(k)$ — множитель $1/2 (\alpha^2 k^2 + \beta^2)$, фигурирующий в формулах (11.56). Согласно (11.50), *точная* полная энергия равна

$$E_{\text{полн}} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \varphi_t^2 + \frac{1}{2} \alpha^2 \varphi_x^2 + \frac{1}{2} \beta^2 \varphi^2 \right) dx.$$

Используя *точное* решение (11.16) и соотношения (11.18), ее можно представить в виде

$$E_{\text{полн}} = 8\pi \int_{-\infty}^{\infty} f(\kappa) F_1(\kappa) F_1^*(\kappa) d\kappa. \quad (11.68)$$

Это выражение справедливо для всех моментов времени как до дисперсии в волновом пакете, так и после нее; оно указывает, что энергия распределена по всей области изменения волновых чисел. Но *после дисперсии* область изменения волновых чисел явным образом распределяется по x . Выражение (11.67) для $E(t)$ показывает, что с интервалом $k_1 < \kappa < k_2$ продолжает ассоциироваться то же самое количество энергии. Таким образом, энергия, соответствующая любому интервалу волновых чисел, сохраняется.

Энергетические соображения, использованные при выводе соотношений (11.58) и (11.59), легко обобщить на большее число измерений. Для уравнения Клейна — Гордона, например, энергетическое уравнение принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \varphi_t^2 + \frac{1}{2} \alpha^2 \varphi_{x_j}^2 + \frac{1}{2} \beta^2 \varphi^2 \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} (-\alpha^2 \varphi_t \varphi_{x_j}) = 0,$$

и для медленно изменяющегося волнового пакета $\varphi \sim a \cos(\theta + \eta)$ получаем следующее усредненное уравнение:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{F}_j}{\partial x_j} = 0,$$

где

$$\mathcal{E} = \frac{1}{4} (\omega^2 + \alpha^2 k_j^2 + \beta^2) a^2, \quad \mathcal{F}_j = \frac{1}{2} \alpha^2 \omega k_j a^2.$$

При помощи дисперсионного соотношения можно проверить, что

$$\mathcal{F}_j = C_j \mathcal{E}, \quad (11.69)$$

и записать усредненное энергетическое уравнение так:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (C_j \mathcal{E}) = 0. \quad (11.70)$$

Полная энергия в любом объеме, точки которого движутся с групповой скоростью, остается постоянной. Действительно,

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \mathcal{E} dV = \int_{V(t)} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} dV + \int_{S(t)} \mathcal{E} C_j n_j dS,$$

где $S(t)$ — поверхность, ограничивающая объем $V(t)$, n_j — внешняя нормаль к $S(t)$, а $C_j n_j$ — нормальная скорость. В силу теоремы о дивергенции и уравнения (11.70), эта величина равна нулю. В характеристической форме уравнение (11.70) имеет вид

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = - \frac{\partial C_j}{\partial x_j} \mathcal{E} \quad \text{на} \quad \frac{dx_i}{dt} = C_i(\mathbf{k}),$$

так что плотность энергии убывает вследствие расхождения $\partial C_j / \partial x_j$ групповых линий. Для однородной среды вектор $\mathbf{k}$ остается постоянным на групповых линиях (см. уравнение (11.46)). Следовательно, поскольку $\mathcal{E} = f(\mathbf{k}) a^2$, величина a^2 удовлетворяет тем же самым уравнениям. Это можно установить и непосредственно из уравнения (11.70), обобщив надлежащим образом (11.62). Для центрированной волны, соответствующей асимптотическому выражению (11.41), вектор $\mathbf{k}$ определяется из условий

$$\frac{x_i}{t} = C_i(\mathbf{k}).$$

Таким образом, мы получили, что

$$\frac{da^2}{dt} = - \frac{na^2}{t},$$

где n — число измерений. Это согласуется с выражением для амплитуды в (11.44).

Мы видим, что усредненное энергетическое уравнение действительно дает правильное описание распределения амплитуды, согласующееся с найденным ранее. Это уравнение удовлетворительно в том смысле, что оно обеспечивает подход, не связанный с преобразованием Фурье, и таким образом позволяет надеяться на обобщение, но в своей настоящей форме оно не вполне удовлетворительно в том смысле, что представляющиеся общими результаты (11.69) и (11.70) появляются только после выкладок, основанных на специфике конкретных уравнений. Если повторить те же самые рассуждения для других линейных уравнений из примеров (11.7)–(11.9), то получатся в точности такие же окончательные результаты (11.69) и (11.70).

Например, энергетическое уравнение, соответствующее примеру (11.7), дает плотность энергии

$$\frac{1}{2} \varphi_t^2 + \frac{1}{2} \alpha^2 \varphi_{x_j}^2 + \frac{1}{2} \beta^2 \varphi_{x_j t}^2$$

и вектор потока энергии

$$- \alpha^2 \varphi_t \varphi_{x_j} - \beta^2 \varphi_t \varphi_{t x_j}.$$

Средние значения, полученные в результате: 1) подстановки $\varphi \sim a \cos(\theta + \eta)$, 2) пренебрежения производными от a , η , k_i и ω и 3) замены $\cos^2(\theta + \eta)$ и $\sin^2(\theta + \eta)$ их средними значениями, равными одной второй, таковы:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{4} (\omega^2 + \alpha^2 k_j^2 + \beta^2 \omega^2 k_j^2) a^2,$$

$$\mathcal{F}_j = \frac{1}{2} (\alpha^2 \omega k_j - \beta^2 \omega^3 k_j) a^2.$$

При помощи дисперсионного соотношения

$$\omega = \frac{\alpha k}{\sqrt{1 + \beta^2 k^2}}, \quad k = |\mathbf{k}|,$$

проверяется, что

$$\mathcal{F}_j = C_j \mathcal{E},$$

и усредненное энергетическое уравнение опять можно записать в виде

$$\frac{\delta \mathcal{E}}{\delta t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (C_j \mathcal{E}) = 0.$$

Те же самые результаты оказываются справедливыми для оставшихся примеров (11.8) и (11.9).

По-видимому, ясно, что эти важные общие результаты должны быть установлены раз и навсегда при помощи общих рассуждений, не требующих каждый раз детального вывода. Такие рассуждения (и нечто гораздо большее) дает вариационный подход.

11.7. Вариационный подход

Этот подход первоначально был развит для гораздо более сложного случая нелинейных волновых пакетов и является довольно разносторонним. Полное изложение будет дано после дальнейшего развития рассматриваемых вопросов, но здесь мы можем изложить его в степени, достаточной для того, чтобы завершить предыдущее обсуждение.

Напомним сначала некоторые детали вариационного исчисления. Вариационный принцип

$$\delta J = \delta \int_R \int L(\varphi_t, \varphi_x, \varphi) dt d\mathbf{x} = 0 \quad (11.71)$$

утверждает, что интеграл $J[\varphi]$ по конечной области R должен быть стационарным при малых изменениях функции φ в следующем смысле. Рассмотрим две близкие функции $\varphi(\mathbf{x}, t)$ и $\varphi(\mathbf{x}, t) + h(\mathbf{x}, t)$, где h «мало»; поскольку в выражении (11.71) фигурируют первые производные, обе функции считаются непрерывно дифференцируемыми. Малость функции h в этом контексте измеряется «нормой»

$$\|h\| = \max |h| + \max |h_t| + \max |h_{x_i}|.$$

Функция L обычно довольно проста, и заведомо можно считать, что она имеет ограниченные непрерывные вторые производные. Разложив ее в ряд Тейлора, получим

$$J[\varphi + h] - J[\varphi] = \int_R \int \{L_{\varphi_t} h_t + L_{\varphi_{x_j}} h_{x_j} + L_{\varphi} h\} dt d\mathbf{x} + O(\|h\|^2), \quad (11.72)$$

где символ $\varphi_{,j}$ означает $\partial\varphi/\partial x_j$. Линейное по h выражение называется первой вариацией $\delta J[\varphi, h]$. Вариационный принцип (11.71) требует, чтобы $\delta J[\varphi, h] = 0$ для всех допустимых функций h . Если ограничиться функциями h , обращающимися в нуль на границе области R , то после интегрирования по частям (с использованием теоремы о дивергенции) мы получим

$$\delta J[\varphi, h] = \int_R \int \left\{ -\frac{\partial}{\partial t} L_{\varphi_t} - \frac{\partial}{\partial x_j} L_{\varphi_{x_j}} + L_{\varphi} \right\} h dt d\mathbf{x}. \quad (11.73)$$

Потребуем теперь, чтобы выражение (11.73) обращалось в нуль для всех таких h . Согласно обычным соображениям непрерывности, отсюда следует, что

$$-\frac{\partial}{\partial t} L_{\varphi_t} + \frac{\partial}{\partial x_j} L_{\varphi_{x_j}} - L_{\varphi} = 0. \quad (11.74)$$

(Если выражение (11.74) отлично от нуля, скажем положительно, в какой-либо точке, то найдется малая окрестность, в которой оно оставалось бы положительным; выбрав функцию h положительной в этой области и равной нулю в остальных точках, получим противоречие с требованием обращения в нуль выражения (11.73).)

Эти рассуждения естественным образом обобщаются на случай, когда L содержит производные функции φ второго или более

высокого порядка. Соответствующее вариационное уравнение ¹⁾ имеет вид

$$L_{\varphi} - \frac{\partial}{\partial t} L_{\varphi_t} - \frac{\partial}{\partial x_j} L_{\varphi_j} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} L_{\varphi_{tt}} + \\ + \frac{\partial^2}{\partial t \partial x_j} L_{\varphi_{t,j}} + \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} L_{\varphi_{j,k}} - \dots = 0, \quad (11.75)$$

в котором легко узнать результат повторного интегрирования по частям. Уравнения (11.74) и (11.75) являются уравнениями в частных производных для $\varphi(x, t)$, причем уравнениям такого вида можно дать эквивалентную вариационную формулировку. Вариационный принцип в случае нескольких функций $\varphi^{(\alpha)}(x, t)$ приведет к уравнению (11.75) для каждой $\varphi^{(\alpha)}(x, t)$ (поскольку их можно варьировать независимо) и, следовательно, к системе уравнений. Вопрос о нахождении вариационного принципа для данной системы уравнений может оказаться трудным, но обычно тривиален, когда имеется только одно уравнение. Отметим, что лагранжианы L для примеров (11.6) — (11.8) соответственно равны

$$L = \frac{1}{2} \varphi_t^2 - \frac{1}{2} \alpha^2 \varphi_{x_i}^2 - \frac{1}{2} \beta^2 \varphi^2, \\ L = \frac{1}{2} \varphi_t^2 - \frac{1}{2} \alpha^2 \varphi_{x_i}^2 + \frac{1}{2} \beta^2 \varphi_{ix_i}^2, \quad (11.76) \\ L = \frac{1}{2} \varphi_t^2 - \frac{1}{2} \gamma^2 \varphi_{xx}^2,$$

а пример (11.9) включается в эту схему подстановкой $\varphi = \psi_x$ и выбором

$$L = \frac{1}{2} \psi_t \psi_x + \frac{1}{2} \alpha \psi_x^2 - \frac{1}{2} \beta \psi_{xx}^2.$$

Для изучения медленно меняющихся волновых пакетов, для которых

$$\varphi \sim a \cos(\theta + \eta), \quad (11.77)$$

вычислим теперь лагранжиан L в точности таким же образом, как в предыдущем параграфе вычислялись плотность и поток энергии. Это значит, что в лагранжиан подставляется выражение (11.77), производными от a , η , ω , $\mathbf{k}$ пренебрегают как малыми и осуществляется усреднение по периоду. Результат в каждом случае будет функцией $\mathcal{L}(\omega, \mathbf{k}, a)$; в частности, для примеров (11.76) имеем

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} (\omega^2 - \alpha^2 k^2 - \beta^2) a^2, \\ \mathcal{L} = \frac{1}{4} (\omega^2 - \alpha^2 k^2 + \beta^2 \omega^2 k^2) a^2, \quad (11.78) \\ \mathcal{L} = \frac{1}{4} (\omega^2 - \gamma^2 k^4) a^2.$$

¹⁾ Обычно это уравнение называют уравнением Эйлера. — *Прим. перев.*

Постулируем теперь «усредненный вариационный принцип»

$$\delta \int \int \mathcal{L}(-\theta_t, \theta_x, a) dt dx = 0 \quad (11.79)$$

для функций $a(x, t)$, $\theta(x, t)$. Мы поступили аналогичным образом, рассматривая закон сохранения (11.59), но предложенный принцип гораздо менее нагляден и его еще нужно детально изучить. Однако, приняв этот принцип, мы немедленно увидим, что он дает общий и чрезвычайно мощный подход.

Поскольку производные от a отсутствуют, вариационное уравнение (11.75) для вариации функции a сводится к следующему:

$$\delta a: \mathcal{L}_a = 0.$$

Вариационное уравнение для θ имеет вид

$$\delta \theta: \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{L}_{\theta_t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \mathcal{L}_{\theta_{x_j}} = 0.$$

В эти выражения входят только производные от θ . Вследствие этого, *после того как получены вариационные уравнения*, обычно удобно работать снова с ω , $\mathbf{k}$ и a , взяв за основу систему уравнений

$$\mathcal{L}_a = 0, \quad (11.80)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{L}_\omega - \frac{\partial}{\partial x_j} \mathcal{L}_{k_j} = 0, \quad (11.81)$$

$$\frac{\partial k_i}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial k_i}{\partial x_j} - \frac{\partial k_j}{\partial x_i} = 0. \quad (11.82)$$

Уравнения (11.82) являются условиями совместности и необходимы для существования фазы θ .

Уравнение (11.80) является функциональным соотношением между ω , $\mathbf{k}$, a и не может быть ничем, кроме дисперсионного соотношения. Для примеров (11.78) легко проверить, что это действительно так. Для любой линейной задачи лагранжиан L является квадратичной функцией от φ и ее производных, и как следствие $\mathcal{L}$ выглядит так:

$$\mathcal{L} = G(\omega, \mathbf{k}) a^2. \quad (11.83)$$

Тогда, согласно (11.80), дисперсионное соотношение должно иметь вид

$$G(\omega, \mathbf{k}) = 0, \quad (11.84)$$

и функция $G(\omega, \mathbf{k})$ в $\mathcal{L}$ есть не что иное, как дисперсионная функция. Не нужно даже вычислять $\mathcal{L}$ в каждом случае!

Это все неожиданные выгоды. Основная цель — найти общий способ вывода амплитудного уравнения, и фактически мы уже включили кинематическую теорию, предложенную в § 11.5 для описания геометрии волнового процесса. Уравнения (11.80) и (11.82) дают в точности такую же теорию.

Заметим, что стационарное значение для $\mathcal{L}$, как мы показали, равно нулю. Для тех простых случаев, когда лагранжиан L равен разности кинетической и потенциальной энергий, это доказывает (с учетом последующего обоснования принципа (11.79)), что их средние значения совпадают. Это хорошо известное равномерное распределение энергии для линейных задач.

Переходя теперь к амплитудному уравнению (11.81), замечаем, что его можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} (G_{\omega} a^2) - \frac{\partial}{\partial x_j} (G_{k_j} a^2) = 0. \quad (11.85)$$

В принципе уравнение (11.84) дает нам $\omega = W(\mathbf{k})$, так что равенство

$$G\{W(\mathbf{k}), \mathbf{k}\} = 0$$

выполняется тождественно. Следовательно,

$$G_{\omega} \frac{\partial W}{\partial k_j} + G_{k_j} = 0,$$

и групповая скорость выражается формулой

$$C_j = \frac{\partial W}{\partial k_j} = -\frac{G_{k_j}}{G_{\omega}}. \quad (11.86)$$

Обозначим $G_{\omega}^{\dagger}(W, \mathbf{k})$ через $g(\mathbf{k})$; тогда уравнение (11.85), можно записать так:

$$\frac{\partial}{\partial t} \{g(\mathbf{k}) a^2\} + \frac{\partial}{\partial x_j} \{g(\mathbf{k}) C_j(\mathbf{k}) a^2\} = 0. \quad (11.87)$$

В силу (11.82), имеем

$$\frac{\partial k_i}{\partial t} + C_j \frac{\partial k_i}{\partial x_j} = 0, \quad \frac{\partial k_i}{\partial x_j} - \frac{\partial k_j}{\partial x_i} = 0.$$

Используя эти соотношения, исключим из уравнения (11.87) множитель $g(\mathbf{k})$ и получим амплитудное уравнение

$$\frac{\partial a^2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (C_j a^2) = 0.$$

Таким образом вариационная система (11.80) — (11.82) дает в точности систему уравнений, рассмотренную в последних двух параграфах.

На первый взгляд можно ожидать, что уравнение (11.87) представляет собой усредненное энергетическое уравнение (11.70). Но примеры показывают, что множитель $f(\mathbf{k})$ в $\mathcal{E}$ и множитель $g(\mathbf{k})$ не совпадают. В то же время существует стандартный метод, ассоциирующий с вариационным принципом соответствующее энергетическое уравнение. Теорема Нётер утверждает, что каждой группе преобразований, относительно которой лагранжиан инва-

риантен, соответствует свое уравнение сохранения (см. Гельфанд и Фомин [1], стр. 177). Если лагранжиан инвариантен относительно сдвига по t , то соответствующее уравнение всегда является энергетическим уравнением или кратным ему. Поскольку лагранжиан в (11.79) инвариантен относительно сдвига по t , это утверждение к нему применимо и соответствующее энергетическое уравнение оказывается таким:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\omega \mathcal{L}_\omega - \mathcal{L}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (-\omega \mathcal{L}_{k_j}) = 0. \quad (11.88)$$

В данном случае вместо того, чтобы проследить во всех деталях применение теоремы Нётер, достаточно заметить, что уравнение (11.88) вытекает из системы (11.80) — (11.82). Это и есть энергетическое уравнение. Легко проверить, что оно согласуется с предыдущими примерами.

Для рассматриваемых здесь линейных задач мы обнаружили, что стационарное значение $\mathcal{L}$ равно нулю. Отсюда для плотности энергии $\mathcal{E}$ и вектора потока энергии $\mathcal{F}$ имеем

$$\mathcal{E} = \omega \mathcal{L}_\omega, \quad \mathcal{F}_j = -\omega \mathcal{L}_{k_j}. \quad (11.89)$$

Поэтому величина $\mathcal{L}_\omega$ фактически равна

$$\mathcal{L}_\omega = \frac{\mathcal{E}}{\omega}, \quad (11.90)$$

и уравнение (11.81) или (11.87) можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathcal{E}}{\omega} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{C_j \mathcal{E}}{\omega} \right) = 0. \quad (11.91)$$

Из (11.83) и (11.89) имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \omega G_\omega a^2, \\ \mathcal{F}_j &= -\omega G_{k_j} a^2 = C_j \mathcal{E}, \end{aligned}$$

что является общим доказательством соотношения между $\mathcal{F}$ и $\mathcal{E}$.

Рассматриваемый общий подход имеет еще одно преимущество. Он привлекает особое внимание к величине (11.90) и к уравнениям (11.81) и (11.91). Величина $\mathcal{E}/\omega$ хорошо известна в классической механике как адиабатический инвариант для медленных модуляций линейной колебательной системы. В дальнейшем мы покажем, что $\mathcal{L}_\omega$ является аналогичной величиной в нелинейном случае. Таким образом, эти понятия обобщаются на случай волнового движения. Вместо инварианта мы имеем уравнение сохранения (11.81), характеризуемое времениподобной адиабатической величиной $\mathcal{L}_\omega$ и пространственноподобными величинами $-\mathcal{L}_{k_j}$. Это уравнение сохранения получило название закона сохранения «волнового действия».

Существует также уравнение сохранения «волнового импульса», аналогичное уравнению (11.88), где x_i и t поменялись ролями

$$\frac{\partial}{\partial t} (k_i \mathcal{L}_\omega) + \frac{\partial}{\partial x_j} (-k_i \mathcal{L}_{k_j} + \mathcal{L} \delta_{ij}) = 0. \quad (11.92)$$

Его легко проверить при помощи системы (11.80) — (11.82). Отметим, что плотность импульса равна

$$k_i \mathcal{L}_\omega = \frac{k_i}{\omega} \mathcal{E}; \quad (11.93)$$

это вектор, направленный вдоль $\mathbf{k}$ и имеющий длину $\mathcal{E}/c$, где c — фазовая скорость. Мы опять получили общее доказательство знакомого результата, который трудно установить другими методами.

Неоднородная среда

Другое преимущество вариационного подхода состоит в том, что основные уравнения (11.80) — (11.82) остаются неизменными, если среда медленно изменяется с изменением x и t . Это имеет место, например, в том случае, когда параметры α , β , γ в выражениях (11.76) зависят от x и t . Если изменение за один период мало, то усредненный лагранжиан можно получить так же, как и раньше, пренебрегая изменениями параметров α , β и γ за один период (и вкладами производных от ω , $\mathbf{k}$, a и η). Тогда усредненный вариационный принцип (11.79) предлагается в прежнем виде с единственным исключением: теперь $\mathcal{L}$ зависит от x и t явно, а не только через функции $a(x, t)$ и $\theta(x, t)$. Однако вариационные уравнения остаются без изменения; следует только быть внимательным и учитывать дополнительные производные, возникающие при преобразованиях уравнений. В частности, энергетическое уравнение, как легко проверить, принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} (\omega \mathcal{L}_\omega - \mathcal{L}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (-\omega \mathcal{L}_{k_j}) = -\mathcal{L}_t. \quad (11.94)$$

Аналогичным образом в правой части уравнения (11.92) для импульса добавляется член $\mathcal{L}_{x_i}$. Если параметры среды зависят от t , то энергия уже не сохраняется. Если они зависят от x , то импульс уже не сохраняется. Заметим, однако, что волновое действие сохраняется во всех случаях. Это снова указывает на преимущество уравнения (11.81) над энергетическим уравнением в теории модуляций.

Нелинейные волновые пакеты

Отметим в заключение, что в вариационном подходе требуются лишь очень незначительные изменения при изучении модуляций нелинейных волновых пакетов. Основные вопросы связаны с видом функционального выражения, заменяющего (11.77), с деталями

усреднения для нахождения функции $\mathcal{L}$ и в общем случае с появлением в полном описании других общих величин, аналогичных ω , $\mathbf{k}$ и a . В простейших случаях, однако, последние не появляются и, как только функция $\mathcal{L}(\omega, \mathbf{k}, a)$ найдена, система (11.80)–(11.82) остается применимой. Основное существенное отличие состоит в том, что функция $\mathcal{L}$ уже не пропорциональна a^2 и уравнения (11.80) и (11.82) неотделимы от (11.81). Этим вопросам и тщательному обоснованию изложенной выше теории будет посвящена гл. 14.

11.8. Непосредственное использование асимптотических разложений

Более очевидный способ избежать интегралов Фурье и найти путь к обобщению на задачи с неоднородной средой и на нелинейные системы состоит в подстановке соответствующих асимптотических рядов непосредственно в исследуемые уравнения. Для рассматриваемых сейчас линейных задач подходят ряды вида

$$\varphi \sim e^{i\theta(\mathbf{x}, t)} \sum_{n=0}^{\infty} A_n(\mathbf{x}, t), \quad (11.95)$$

где A_n — последовательные члены разложения по характерному малому параметру. В данном случае целесообразность такого выбора следует из асимптотической формулы (11.27). Ряд (11.95) является также обобщением ряда геометрической оптики (7.62). В рассмотренных в части I гиперболических задачах производные θ_t и θ_x были связаны однородным соотношением, так что для фиксированной частоты ω можно было положить $\theta(\mathbf{x}, t) = \omega S(\mathbf{x}, t)$, как там и было сделано. Теперь дисперсионное соотношение между θ_t и θ_x имеет более общий вид и допускается непрерывное распределение частот.

Подход, использующий разложение (11.95), вполне пригоден для ряда линейных задач, включая задачи с неоднородной средой. Но (даже в большей степени, чем это было обнаружено при обсуждении усредненного энергетического уравнения в § 11.6) после длительных вычислений, связанных со спецификой данной задачи, мы в конце концов обнаруживаем, что полученные результаты имеют общий характер. В случае обобщений на нелинейные задачи корректная форма разложения не сразу очевидна, выкладки могут стать угрожающими и общие результаты снова окажутся погребенными под ненужными деталями. Эти недостатки устраняются применением разложений, подобных (11.95), непосредственно к вариационной формулировке задачи. В сущности именно так оправдывается вариационный подход. Но для этого требуется известная изобретательность, и в качестве подготовки полезно

обсудить здесь прямое применение разложения (11.95) к изучаемым уравнениям. Достаточно рассмотреть одномерный случай.

Разложение, изученное в § 11.3, справедливо при $t \rightarrow \infty$, x/t фиксировано. В этом случае $\theta(x, t)$ и $A_n(x, t)$ имели вид

$$\theta(x, t) = t\tilde{\theta}(x/t), \quad A_n(x, t) = t^{-n-1/2} B_n(x/t). \quad (11.96)$$

Разложение (11.95) проводится по возрастающим степеням t^{-1} (или, строго говоря, по степеням τ/t , где τ — характерный интервал времени, определяемый параметрами уравнений и начальными условиями). Чтобы техника была гибкой и были видны общие черты использования разложения (11.95) в различных ситуациях, мы не будем использовать равенства (11.96) в явном виде, а вместо этого потребуем, чтобы выполнялось следующее условие:

$$\frac{\partial A_n}{\partial t}, \frac{\partial A_n}{\partial x} = O(A_{n+1}), \quad \frac{\partial^2 A_n}{\partial t^2} = O(A_{n+2}), \dots, \quad (11.97)$$

т. е. чтобы каждое дифференцирование увеличивало порядок на единицу. Аналогичным образом θ_x и θ_t — величины порядка $O(1)$, и каждое следующее дифференцирование увеличивает их порядок на единицу. Увеличение порядка при дифференцировании означает, что θ_t , θ_x и A_n являются *медленно изменяющимися функциями*. Это общее свойство разложений (11.95) не зависит от того, по какой величине проводится разложение: по τ/t или по какой-либо другой.

Для иллюстрации возьмем одномерное уравнение Клейна — Гордона

$$\varphi_{tt} - \alpha^2 \varphi_{xx} + \beta^2 \varphi = 0.$$

Подставляя (11.95) и последовательно приравнивая нулю члены одинакового порядка, получаем

$$(\theta_t^2 - \alpha^2 \theta_x^2 - \beta^2) A_1 -$$

$$- \{2i\theta_t A_{0t} - 2i\alpha^2 \theta_x A_{0x} + i(\theta_{tt} - \alpha^2 \theta_{xx}) A_0\} = 0,$$

$$(\theta_t^2 - \alpha^2 \theta_x^2 - \beta^2) A_2 -$$

$$- \{2i\theta_t A_{1t} - 2i\alpha^2 \theta_x A_{1x} + i(\theta_{tt} - \alpha^2 \theta_{xx}) A_1\} = A_{0tt} - \alpha^2 A_{0xx}$$

и т. д. Первое уравнение исключает соответствующий член в последующих уравнениях. Если теперь ввести

$$k = \theta_x, \quad \omega = -\theta_t,$$

то цепочка примет вид

$$\omega^2 - \alpha^2 k^2 - \beta^2 = 0, \quad (11.98)$$

$$2\omega A_{0t} + 2\alpha^2 k A_{0x} + (\omega_t + \alpha^2 k_x) A_0 = 0, \quad (11.99)$$

$$2\omega A_{1t} + 2\alpha^2 k A_{1x} + (\omega_t + \alpha^2 k_x) A_1 = -i(A_{0tt} - \alpha^2 A_{0xx}) \quad (11.100)$$

и т. д.

Первое уравнение является дисперсионным соотношением между ω и k , и если мы предпочитаем работать с этими величинами, а не с фазой θ , то следует добавить еще условие совместности

$$k_t + \omega_x = 0. \quad (11.101)$$

Эти уравнения определяют θ , ω , k в точности так, как описано в § 11.5.

Уравнение для A_0 можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \omega A_0 A_0^* \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} \alpha^2 k A_0 A_0^* \right) = 0. \quad (11.102)$$

Поскольку $|A_0|^2 = a^2$, и в этом случае

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} (\omega^2 - \alpha^2 k^2 - \beta^2) a^2,$$

уравнение (11.102) совпадает с уравнением для волнового действия (11.81). Интересно, что естественным образом получается именно уравнение для волнового действия, а не энергетическое уравнение, хотя, конечно, из (11.99) можно получить и энергетическое уравнение. Заметим, что без использования лагранжиана этот момент остался бы незамеченным.

Обычно интересуются только первым членом разложения и, следовательно, первыми двумя уравнениями, а именно (11.98) и (11.99). Однако после того, как θ и A_0 определены, A_1 находится из уравнения (11.100), A_2 — из следующего уравнения цепочки и т. д.

Легко проверить, что эти уравнения имеют частные решения вида (11.96), и в этом случае разложение согласуется с разложением, полученным в § 11.3 при помощи интегралов Фурье. Подходящим решением уравнений (11.98) и (11.101) является функция $k(x/t)$, определяемая из уравнения

$$\frac{x}{t} = C(k).$$

Тогда уравнение (11.102) в любой из форм дает

$$A_0 = t^{-1/2} B_0 \left(\frac{x}{t} \right).$$

Поскольку k есть функция от x/t , этот результат можно также записать в виде

$$A_0 = t^{-1/2} \mathcal{B}_0(k),$$

что согласуется с (11.28). Конечно, вид функции $\mathcal{B}_0(k)$ определяется только по начальным условиям. В этом конкретном случае разложение неприменимо на ранних стадиях и использование преобразования Фурье или его эквивалента неизбежно. После того как функция A_0 найдена, из (11.100) можно найти A_1 , причем

в результате получится (11.23). Фактически последующие члены разложения гораздо проще находить этим прямым методом, чем распространением метода стационарной фазы на высшие порядки.

Разложения не ограничиваются центрированной волной, они применимы к любому волновому пакету, медленно изменяющемуся в смысле (11.97). Например, можно рассмотреть волновой пакет, образованный модулированным источником с медленными изменениями частоты и амплитуды. Если x и t — нормированные переменные, полученные делением исходных x и t на характерные длину волны и период соответственно, то генерируемые источником модуляции будут функциями от εt и соответствующие выражения для θ и A_n будут иметь вид

$$\theta = \varepsilon^{-1} \tilde{\theta}(\varepsilon x, \varepsilon t), \quad A_n = \varepsilon^n \tilde{A}_n(\varepsilon x, \varepsilon t), \quad (11.103)$$

где ε — отношение характерного периода к временному масштабу модуляций. Эти величины медленно изменяются в смысле (11.97), причем ε является соответствующим малым параметром. Для уравнения Клейна — Гордона результирующие уравнения имеют вид (11.98) — (11.100). Они отвечают последовательным членам порядков 1, ε , ε^2 соответственно, но нет необходимости в явном виде выписывать зависимость от ε , раз мы следуем упорядочиванию (11.97).

Неоднородная среда

Более интересен подобный предыдущему случай, когда модуляции возникают за счет медленных изменений среды. Например, можно рассмотреть первоначально однородный волновой пакет, входящий в неоднородную среду, параметры которой медленно изменяются на характерной длине L . Если λ — характерная длина волны (скажем, длина волны исходного волнового пакета), то малым параметром будет $\varepsilon = \lambda/L$. В нормированных переменных среда описывается функциями от εx и для описания модулированного волнового пакета подходят выражения (11.103). Аналогичная формулировка применима и к среде, медленно меняющейся во времени.

Для иллюстрации опять обратимся к уравнению Клейна — Гордона. Для неоднородной среды это уравнение обычно получается в самосопряженной форме

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \alpha^2(x, t) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right\} + \beta^2(x, t) \varphi = 0. \quad (11.104)$$

Будем считать, что x , t уже нормированы на характерные длину волны и период (можно использовать характерные значения для $\alpha\beta^{-1}$ и β^{-1}), и чтобы включить пространственные и временные вариации в общий анализ, предположим, что

$$\alpha = \tilde{\alpha}(\varepsilon x, \varepsilon t), \quad \beta = \tilde{\beta}(\varepsilon x, \varepsilon t). \quad (11.105)$$

Как и ранее, мы не вводим зависимость от ε в явном виде, а работаем непосредственно с выражениями (11.95) и (11.104), подразумевая, что все функции

$$k = \theta_x, \quad \omega = -\theta_t, \quad A_0, \quad \alpha, \quad \beta$$

имеют порядок $O(1)$ и что каждое дифференцирование или увеличение индекса у A повышает порядок на единицу. В полученной цепочке уравнений первые два таковы:

$$\omega^2 - \alpha^2 k^2 - \beta^2 = 0, \quad (11.106)$$

$$2\omega A_{0t} + 2\alpha^2 k A_{0x} + (\omega_t + \alpha^2 k_x + 2k\alpha\alpha_x) A_0 = 0; \quad (11.107)$$

к ним следует добавить условие совместности

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0. \quad (11.108)$$

Система уравнений (11.106) и (11.108) для функций k , ω и θ совпадает с уравнениями, полученными сначала на основании более интуитивных соображений в § 11.5, а затем при помощи вариационного подхода в § 11.7. Как уже было отмечено в § 11.5, значения волнового числа k распространяются с групповой скоростью $\partial\omega/\partial k$, определенной из (11.106), но ни групповая скорость, ни значения k не обязаны оставаться постоянными на групповой линии.

В данном случае групповая скорость равна $\alpha^2 k/\omega$, так что характеристики для уравнения (11.107) те же, что и для уравнения (11.108), и A_0 в принципе можно найти интегрированием вдоль этих характеристик.

Однако основной момент состоит в том, что уравнение (11.107) все еще можно записать в виде уравнения сохранения

$$\left(\frac{1}{2}\omega A_0 A_0^*\right)_t + \left(\frac{1}{2}\alpha^2 k A_0 A_0^*\right)_x = 0. \quad (11.109)$$

Таким образом, уравнение для волнового действия (11.102) остается справедливым и в неоднородной среде, когда и α , и соотношение между ω и k зависят от x и t . Это согласуется с тем, что утверждается в вариационном подходе.

Действительно, рассмотрим выражение

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x},$$

в котором плотность и поток энергии определены формулами (11.53) и (11.54). При помощи (11.106)–(11.108) находим, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{4}(\omega^2 + \alpha^2 k^2 + \beta^2) A_0 A_0^* \right\} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{2} \alpha^2 \omega k A_0 A_0^* \right\} = \\ = \frac{1}{4} \left\{ k^2 \frac{\partial \alpha^2}{\partial t} + \frac{\partial \beta^2}{\partial t} \right\} A_0 A_0^*. \end{aligned} \quad (11.110)$$

Это согласуется с (11.94), так как

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} (\omega^2 + \alpha^2 k^2 - \beta^2) \alpha^2.$$

Прямая подстановка в уравнения разложения (11.95) приводит к требуемым результатам, но без общности и глубины вариационного подхода. Оба метода будут объединены в гл. 14. Рассмотрим сначала приложения развитой выше теории и уточним изложенные идеи на конкретных задачах.

Глава 12

КАРТИНЫ ВОЛН

Целый ряд наиболее интересных волновых движений связан с волнами на воде. Некоторые из них, такие, как, например, V-образная система волн от движущегося корабля или расходящиеся от брошенного в воду камня кольца, хорошо известны каждому; другие сравнительно легко наблюдать. Мы начнем с них. Дисперсионное соотношение, единственное, что нам здесь понадобится, будет принято без объяснений. В дальнейшем нам придется глубже вникнуть в теорию волн на воде, поскольку она явилась первым и наиболее плодотворным источником идей теории диспергирующих волн. Тогда мы и выведем дисперсионное соотношение.

12.1. Дисперсионное соотношение для волн на воде

Вертикальные отклонения η поверхности спокойной воды описываются элементарными решениями вида (11.1):

$$\eta = Ae^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t},$$

причем

$$\omega^2 = (gk \operatorname{th} kh) \left(1 + \frac{T}{\rho g} k^2 \right), \quad k = |\mathbf{k}|. \quad (12.1)$$

Здесь h — невозмущенная глубина, g — ускорение свободного падения, ρ — плотность, T — поверхностное натяжение. На спокойной воде волны изотропны и дисперсионные соотношения содержат только модуль k волнового вектора. Существует несколько интересных предельных случаев, которые при соответствующих обстоятельствах принято использовать в качестве аппроксимаций.

Гравитационные волны

В системе единиц CGS $g = 981$, $\rho = 1$ и $T = 74$, так что $\lambda_m = 2\pi (T/\rho g)^{1/2} = 1,73$ см. Поэтому эффекты поверхностного натяжения становятся пренебрежимо малыми для волн, длины которых в несколько раз больше этой величины. Тогда имеем обычную формулу для гравитационных волн

$$\omega^2 = gk \operatorname{th} kh, \quad \lambda \gg \lambda_m. \quad (12.2)$$

Для таких волн фазовая и групповая скорости соответственно равны

$$c(k) = \left(\frac{g}{k} \operatorname{th} kh \right)^{1/2}, \quad (12.3)$$

$$C(k) = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{1}{2} c(k) \left(1 + \frac{2kh}{\operatorname{sh} 2kh} \right). \quad (12.4)$$

В этом приближении имеем следующие предельные случаи:

$$\omega \sim (gk)^{1/2}, \quad c \sim \left(\frac{g}{k} \right)^{1/2}, \quad C \sim \frac{1}{2} \left(\frac{g}{k} \right)^{1/2}, \quad kh \rightarrow \infty, \quad (12.5)$$

$$\omega \sim (gh)^{1/2} k, \quad c \sim (gh)^{1/2}, \quad C \sim (gh)^{1/2}, \quad kh \rightarrow 0. \quad (12.6)$$

Таким образом, при фиксированной глубине h как c , так и C возрастают с ростом $\lambda = 2\pi/k$, причем $C < c$; в длинноволновом пределе (12.6) $C \rightarrow c$ и дисперсионные эффекты становятся малыми. Конечно, коротковолновое приближение (12.5) справедливо лишь при условии, что $\lambda_m \ll \lambda \ll h$.

Капиллярные волны

При $\lambda \ll \lambda_m$ эффект поверхностного натяжения может стать доминирующим, и тогда соотношение (12.1) будет аппроксимироваться выражением

$$\omega^2 = \frac{T}{\rho} k^3 \operatorname{th} kh. \quad (12.7)$$

В этом случае

$$c(k) = \left(\frac{T}{\rho} k \operatorname{th} kh \right)^{1/2}, \quad (12.8)$$

$$C(k) = \frac{3}{2} c \left(1 + \frac{2kh}{3 \operatorname{sh} 2kh} \right). \quad (12.9)$$

В предельных ситуациях имеем

$$\omega \sim \left(\frac{T}{\rho} \right)^{1/2} k^{3/2}, \quad c \sim \left(\frac{T}{\rho} \right)^{1/2} k^{1/2}, \quad C \sim \frac{3}{2} \left(\frac{T}{\rho} \right)^{1/2} k^{1/2}, \quad kh \rightarrow \infty \quad (12.10)$$

и

$$\omega \sim \left(\frac{Th}{\rho} \right)^{1/2} k^2, \quad c \sim \left(\frac{Th}{\rho} \right)^{1/2} k, \quad C \sim 2 \left(\frac{Th}{\rho} \right)^{1/2} k, \quad kh \rightarrow 0. \quad (12.11)$$

Для капиллярных волн c и C убывают с ростом λ , причем $C > c$.

Комбинированные эффекты гравитации и поверхностного натяжения

Когда важны оба эффекта, обычно достаточно рассмотреть относительно короткие волны с $kh \gg 1$. При этом

$$\omega^2 = gk + \frac{T}{\rho} k^3, \quad (12.12)$$

а фазовая и групповая скорости выражаются формулами

$$c = \left(\frac{g}{k} + \frac{T}{\rho} k \right)^{1/2}, \quad (12.13)$$

$$C = \frac{1}{2} c \frac{1 + (3T/\rho g) k^2}{1 + (T/\rho g) k^2}. \quad (12.14)$$

Фазовая скорость имеет минимум при $k = k_m$, где

$$k_m = \left(\frac{\rho g}{T} \right)^{1/2}, \quad \lambda_m = \frac{2\pi}{k_m} = 1,73 \text{ см}; \quad (12.15)$$

соответствующие значения c и C совпадают и равны

$$c_m = 23,2 \text{ см/с.}$$

В области $\lambda > \lambda_m$, часто называемой гравитационной ветвью, $C < c$, тогда как в области $\lambda < \lambda_m$, называемой капиллярной ветвью, $C > c$. Для любого значения $c > c_m$ существуют две допустимые длины волны. Минимум групповой скорости достигается при $\lambda = 2,54 \lambda_m = 4,39 \text{ см}$ и составляет $C = 0,77 c_m = 17,9 \text{ см/с}$.

Теория мелкой воды с учетом дисперсии

При $kh \rightarrow 0$ выражение (12.1) можно разложить в ряд

$$\omega^2 \sim ghk^2 \left\{ 1 + \left(\frac{T}{\rho gh^2} - \frac{1}{3} \right) k^2 h^2 + \dots \right\} \quad (12.16)$$

и получить

$$c \sim (gh)^{1/2} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{T}{\rho gh^2} - \frac{1}{3} \right) k^2 h^2 + \dots \right\}. \quad (12.17)$$

Когда дисперсией полностью пренебрегают, уравнения для *нелинейной теории* мелкой воды становятся гиперболическими и уподобляются уравнениям газовой динамики; эта так называемая гидравлическая аналогия используется в экспериментах. При гидравлическом моделировании дисперсия должна быть минимальной и h выбирается из условия

$$\frac{T}{\rho gh^2} - \frac{1}{3} = 0,$$

или

$$h = \left(\frac{3T}{\rho g} \right)^{1/2} = 0,48 \text{ см.}$$

Магнитная гидродинамика

В проводящей жидкости, к которой приложено горизонтальное магнитное поле и через которую протекают горизонтальные токи, можно ввести третью вертикальную возвращающую силу. Этот случай был исследован Шерклифом [1], установившим, что дисперсионное соотношение имеет вид

$$\rho \omega^2 = k \operatorname{th} kh (\rho g + k^2 T + J_s B_n),$$

где B_n — магнитное поле, нормальное к гребням волн, и J_s — ток вдоль них. Член $J_s B_n$ описывает вертикальную компоненту силы Лоренца. Интересно, что распространение волн зависит от их ориентации относительно поля и становится анизотропным. Выражения для фазовой и групповой скоростей, включая различные предельные случаи, можно найти в указанной выше статье. Мы не будем заниматься здесь этим случаем, хотя соответствующие картины волн можно изучать развиваемыми ниже методами.

12.2. Дисперсия от мгновенного точечного источника

Волны от точечного источника распространяются изотропно, и различные значения модуля k волнового вектора, возбужденные в начальный момент, распространяются с соответствующими групповыми скоростями $C(k)$. В момент времени t каждое конкретное значение k будет находиться на расстоянии $r = C(k)t$. Следовательно, $k(r, t)$ удовлетворяет соотношению

$$C(k) = \frac{r}{t}. \quad (12.18)$$

Поэтому для гравитационных волн на глубокой воде (12.5) мы имеем

$$k = \frac{gt^2}{4r^2}, \quad \omega = \frac{gt}{2r}. \quad (12.19)$$

Это осесимметричный аналог одномерной задачи, рассмотренной в § 11.4. Указанная весьма простая формула для ω сравнивалась Снодграссом и его сотрудниками [1] с данными наблюдения за волнением, вызываемым штормами в южной части Тихого океана. Оказалось, что на расстояниях порядка 2000 миль частота линейно зависит от t и коэффициент пропорциональности позволяет с большой точностью определить расстояние до шторма.

То же явление в меньших масштабах — это характерные кольца, расходящиеся от брошенного в пруд камня или от другого всплеска. Для них удовлетворяется равенство (12.18), где групповая скорость $C(k)$ определяется формулой (12.14). Поскольку $C(k)$ имеет минимальное значение около 18 см/с, существует круг спокойной воды радиуса $18t$ см. Вне этого круга для каждого r/t допускаются два значения k : одно на гравитационной ветви, другое на капиллярной, так что возникают два накладываются волновых пакета. Конечно, энергия, соответствующая различным волновым числам, определяется исходным возмущением. Волны, длины которых имеют тот же порядок, что и размеры объекта, обладают наибольшими амплитудами и наиболее заметны. Для объекта с характерной длиной l главные кольца будут иметь радиусы порядка $r = C(\pi/l)t$.

12.3. Волны на поверхности стационарного потока

Волны, создаваемые препятствием в стационарном потоке со скоростью U вдоль оси x_1 , можно рассматривать как волны, создаваемые препятствием, движущимся со скоростью U в отрицательном направлении оси x_1 . В случае двумерного препятствия и постоянного по x_2 потока не отрываются от препятствия и представляются стационарными при наблюдении с препятствия только те волны, для которых

$$c(k) = U. \quad (12.20)$$

Мы снова рассматриваем ситуацию, когда применимы соотношения (12.12) — (12.14). При $U < c_m$ уравнение (12.20) не имеет решений и, следовательно, стационарный волновой пакет отсутствует. В этом случае локальные возмущения затухают вдали от препятствия и не дают вклада в асимптотическую картину волн. При $U > c_m$ уравнение (12.20) имеет два решения: одно из них, k_g , соответствует гравитационной ветви, а другое, k_T , — капиллярной ветви. При этом $k_g < k_m$ и $k_T > k_m$, откуда, в силу равенств (12.13) — (12.14), имеем

$$C(k_g) < c(k_g) = U, \quad (12.21)$$

$$C(k_T) > c(k_T) = U. \quad (12.22)$$

Следовательно, гравитационные волны k_g имеют групповую скорость, меньшую U , и находятся за препятствием, а капиллярные волны k_T имеют групповую скорость, большую U , и находятся впереди препятствия. Соответствующая картина волн изображена на рис. 12.1.

Полученный результат можно интерпретировать как вывод условий излучения в задаче о стационарном потоке на основе

понятия групповой скорости. Поэтому интересно вывести данный результат во всех деталях непосредственно из точного решения в виде интеграла Фурье и посмотреть, каким образом условие, накладываемое групповой скоростью, следует из обычного условия излучения, принятого в стандартном методе решения задач с граничными условиями. Кроме того, такое полное решение дает

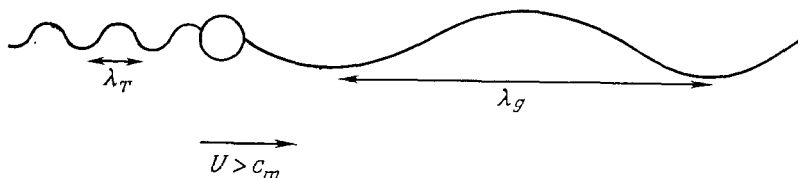


Рис. 12.1. Схема капиллярных волн (вверх по течению) и гравитационных волн (вниз по течению) на поверхности потока, создаваемых препятствием.

амплитуды волн. Асимптотическое приближение устанавливает только, что амплитуда остается постоянной для каждого волнового пакета, а найти значения этих постоянных можно лишь на основе детального анализа начальных условий. Чтобы не прерывать обсуждение кинематики, не будем приводить здесь детали, а отложим их до § 13.9.

12.4. Корабельные волны

Если препятствие имеет конечный размер вдоль оси x_2 , то на поверхности воды образуется двумерная картина волн и анализ усложняется. Мы ограничимся задачей о гравитационных волнах на глубокой воде и используем дисперсионное соотношение (12.5). Этот случай охватывает картины волн, создаваемые объектами длиной $l \gg \lambda_m$, движущимися по воде глубиной $h \gg l$ (что обычно выполняется для корабельных волн).

Наиболее удивительный результат, полученный впервые Кельвином, состоит в том, что на глубокой воде волны сосредоточены в клинообразной области с углом полураствора $\arcsin \frac{1}{3} = 19,5^\circ$. Этот угол не зависит ни от скорости (при условии, что скорость постоянна), ни от формы объекта и определяется тем, что для глубокой воды $C/c = 1/2$.

Приведенное ниже простое доказательство принадлежит Лайтхиллу [6]. Рассмотрим «корабль», движущийся со скоростью U и переместившийся из точки Q в точку P (см. рис. 12.2) за время t . Гребень волны будет оставаться неподвижным относительно корабля в том случае, когда

$$U \cos \psi = c(k), \quad (12.23)$$

где ψ — угол между нормалью (направлением вектора $\mathbf{k}$) и линией движения QP . Это условие легче всего понять, перейдя в систему отсчета, в которой поток со скоростью U обтекает неподвижный

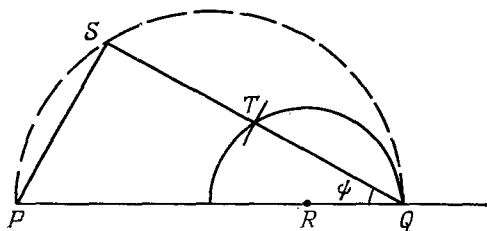


Рис. 12.2. Построение элементов волны в задаче о корабельных волнах.

корабль. В этой движущейся системе отсчета нормальная к элементу волны компонента $U \cos \psi$ скорости потока должна компенсироваться фазовой скоростью рассматриваемого элемента. Указанное условие позволяет определить величину k в направлении ψ .

Геометрически (см. рис. 12.2) это можно изобразить, построив полуокружность диаметром PQ и заметив, что $PQ = Ut$, $SQ = = Ut \cos \psi = ct$. Следовательно, для элементов волны, параллельных хорде PS , будем иметь $ct = QS$. Далее, c — фазовая

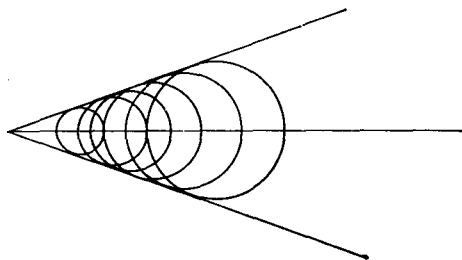


Рис. 12.3. Огибающая возмущений, возникающих в последовательные моменты времени.

скорость, соответствующая условию (12.23), но расположение рассматриваемых волн определяет именно групповая скорость $C = \frac{1}{2}c$. Волны, образующиеся в точке Q , должны пройти расстояние $Ct = \frac{1}{2}ct$. Следовательно, в направлении ψ они будут обнаружены в точке T — средней точке отрезка QS . Рассмотрев все значения ψ , получим, что волны, возникающие в точке Q и дающие вклад в стационарную картину, лежат на окружности радиуса $\frac{1}{4}Ut$ с центром в точке R , причем $PR = \frac{3}{4}Ut$. Наконец, фиксируя точку P и меняя t , мы получаем набор окружно-

стей, изображенный на рис. 12.3. В силу построения, проведенного на рис. 12.2, каждая окружность имеет радиус, равный одной трети расстояния от ее центра до точки P . Следовательно, эти окружности заполняют клинообразную область с углом полураствора $\arcsin 1/3 = 19,5^\circ$. Любопытно, что построение на рис. 12.3 соответствует сверхзвуковому обтеканию с числом Маха, равным 3; все плавающие объекты имеют эффективное число Маха, равное 3.

Дальнейшее исследование картины волн

Более детальное рассмотрение картины волн удобно провести в системе отсчета, в которой источник находится в неподвижной точке P , а скорость U однородного потока направлена вдоль оси x_1 (см. рис. 12.4 на стр. 397). При этом возникает ряд общих вопросов описания стационарных волновых процессов, которые оказываются полезными и в иных контекстах. Дисперсионные соотношения из § 12.1 применимы к волнам, распространяющимся по неподвижной воде, но можно перейти в систему отсчета, движущуюся с относительной скоростью $-U$, заметив, что частота ω относительно движущейся системы следующим образом выражается через частоту ω_0 относительно неподвижной системы:

$$\omega = U \cdot \mathbf{k} + \omega_0(\mathbf{k}). \quad (12.24)$$

Это дисперсионное соотношение между ω и $\mathbf{k}$ для волн, накладывающихся на поток со скоростью U . Конечно, распространение больше не изотропно, поскольку в соотношение входит вектор U . В такой системе отсчета для стационарной картины волн $\omega = 0$ и выражение (12.24) становится соотношением между компонентами k_1 и k_2 волнового вектора $\mathbf{k}$. Для $\omega_0(\mathbf{k}) = \sqrt{gk}$ имеем

$$G(k_1, k_2) = Uk_1 + \sqrt{gk} = 0. \quad (12.25)$$

Поскольку $\cos \psi = -k_1/k$ и $c(k) = \sqrt{g/k}$, это согласуется с (12.23). Представив вектор $\mathbf{k}$ в полярных координатах (k, ψ) , равенство (12.25) можно переписать в виде

$$\mathcal{G}(k, \psi) = Uk \cos \psi - \sqrt{gk} = 0. \quad (12.26)$$

Так как частота ω равна нулю и $\mathbf{k}$ не зависит от t , кинематические соотношения (11.43) сводятся к условию совместности

$$\frac{\partial k_2}{\partial x_1} - \frac{\partial k_1}{\partial x_2} = 0. \quad (12.27)$$

Согласно (12.25), $k_1 = f(k_2)$ и уравнение (12.27) дает

$$\frac{\partial k_2}{\partial x_1} - f'(k_2) \frac{\partial k_2}{\partial x_2} = 0.$$

Поэтому компоненты k_1 и k_2 постоянны на характеристиках

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -f'(k_2).$$

Для точечного источника P характеристики, несущие возмущения, проходят через точку P , так что имеем центрированную волну

$$\frac{x_2}{x_1} = -f'(k_2). \quad (12.28)$$

Это равенство определяет k_2 как функцию от x_2/x_1 , и соотношение $k_1 = f(k_2)$ завершает нахождение вектора $\mathbf{k}$.

Основное соотношение (12.28) можно записать в симметричном относительно k_1 и k_2 виде. Если $k_1 = f(k_2)$ тождественно удовлетворяет соотношению (12.25), то

$$f'(k_2) G_{k_1} + G_{k_2} = 0$$

и (12.28) можно переписать в виде

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{G_{k_2}(k_1, k_2)}{G_{k_1}(k_1, k_2)}, \quad G(k_1, k_2) = 0. \quad (12.29)$$

Решая эти уравнения, находим k_1 и k_2 как функции от $\mathbf{x}$. Зная вид функции $\mathbf{k}$, уже можно нарисовать картину волн, но можно найти также и фазу $\theta(x_1, x_2)$ и получить линии гребней.

Полезно отметить, что соотношения (12.29) получаются из выражения для нестационарной центрированной волны в пределе при $\omega \rightarrow 0$. Для центрированной волны, согласно (11.49), имеем

$$\frac{x_i}{t} = C_i = -\frac{G_{k_i}}{G_\omega}, \quad G(\mathbf{k}, \omega) = 0.$$

Взяв отношение первых двух уравнений системы, исключим t и G_ω и, перейдя к пределу при $\omega \rightarrow 0$, получим соотношения (12.29). Можно считать, что возмущение распространяется с групповой скоростью C_i , хотя это не приводит к изменениям картины волн. Данное соображение позволяет продолжать использовать понятие групповой скорости, хотя в формулах фигурирует только ее направление $\partial G / \partial k_i$.

Далее заметим, что иногда удобно пользоваться полярными координатами, как это сделано в равенстве (12.26). В полярных координатах градиент $\partial G / \partial \mathbf{k}$ имеет компоненту $\partial \mathcal{G} / \partial k$ в направлении $\mathbf{k}$ и компоненту $\partial \mathcal{G} / k \partial \psi$, ортогональную $\mathbf{k}$. Отсюда для угла μ на рис. 12.4 получаем

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{1}{k} \frac{\partial \mathcal{G} / \partial \psi}{\partial \mathcal{G} / \partial k}. \quad (12.30)$$

Уравнения (12.29) эквивалентны условиям

$$\xi = \pi - \mu - \psi, \quad \mathcal{G}(k, \psi) = 0. \quad (12.31)$$

Уравнения (12.30) и (12.31) определяют k и ψ (а следовательно, и $\mathbf{k}$) для заданного направления ξ .

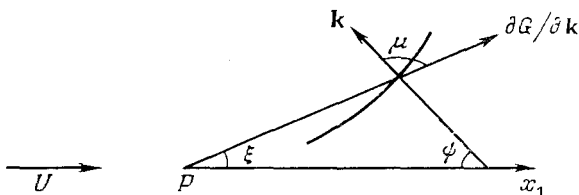


Рис. 12.4. Геометрия гребней волн в задаче о корабельных волнах.

Эти построения применимы к любой двумерной стационарной картине, и теперь мы применим их к корабельным волнам. Подставляя выражения (12.25) в соотношения (12.29), получаем

$$\operatorname{tg} \xi = \frac{x_2}{x_1} = \frac{\frac{k_2}{2k} \sqrt{\frac{g}{k}}}{U + \frac{k_1}{2k} \sqrt{\frac{g}{k}}}, \quad Uk_1 + \sqrt{gk} = 0.$$

Очевидно, удобнее перейти к представлению (k, ψ) вектора $\mathbf{k}$ в полярных координатах и записать эту формулу так:

$$\operatorname{tg} \xi = \frac{\operatorname{tg} \psi}{1 + 2 \operatorname{tg}^2 \psi}, \quad k = \frac{g}{U^2 \cos^2 \psi}. \quad (12.32)$$

Если предпочтительнее подход (12.30) — (12.31), то имеем

$$\operatorname{tg} \mu = -2 \operatorname{tg} \psi, \quad (12.33)$$

откуда следуют соотношения (12.32).

Теперь, изменяя угол ψ , мы можем нарисовать типичную линию гребня. Согласно (12.25) или (12.26), $k_1 < 0$ и $\cos \psi > 0$, так что допустим лишь интервал $-\pi/2 < \psi < \pi/2$. Картина волн, очевидно, симметрична, и достаточно рассмотреть интервал $0 < \psi < \pi/2$. Первая из формул (12.32) показывает, что при $\psi \rightarrow 0$ и $\psi \rightarrow \pi/2$ получаем $\xi = 0$, и, следовательно, на интервале $(0, \pi/2)$ переменная ξ должна иметь максимум. Легко проверить, что этот максимум равен

$$\xi_m = \arctg \frac{1}{2\sqrt{2}} = 19,5^\circ \quad \text{для} \quad \psi_m = \arctg \frac{1}{\sqrt{2}} = 35,3^\circ.$$

Полученное значение совпадает с углом полураствора клина, найденным раньше, и показывает, что все волны сосредоточены внутри этого клина. В точке максимума $\psi \neq \pi/2$, и поэтому линия гребня не может повернуть назад гладко; на границе клина при $\psi = \psi_m$ эта линия имеет заострение. Таким образом, видим,

что линия гребня имеет форму, изображенную на рис. 12.5; в целом картина волн представлена на рис. 12.6.

Выражение для фазы $\theta(x)$ можно найти как

$$\theta = \int_0^x \mathbf{k} \cdot d\mathbf{x}, \quad (12.34)$$

интегрируя по любой удобной кривой, поскольку $\mathbf{k}$ — безвихревой вектор. Очевидно, удобны лучи $\xi = \text{const}$, поскольку на них вектор $\mathbf{k}$ остается постоянным. Имеем

$$\theta = (k \cos \mu) r, \quad (12.35)$$

где $r = |\mathbf{x}|$ — расстояние от начала координат. Здесь k и μ — функции от ξ , определяемые формулами (12.32) и (12.33). Кривая

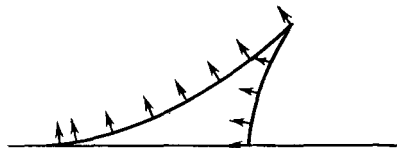


Рис. 12.5. Линия гребня в задаче о корабельных волнах.

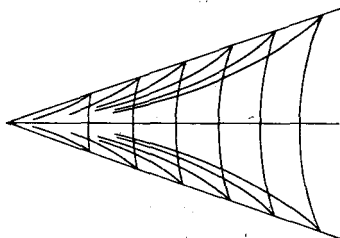


Рис. 12.6. Полная картина корабельных волн.

постоянной фазы $\theta = \text{const}$ в параметрическом виде с углом ψ в качестве параметра описывается уравнениями

$$r = \frac{\theta}{k \cos \mu} = -\frac{U^2 \theta}{g} \cos^2 \psi \{1 + 4 \operatorname{tg}^2 \psi\}^{1/2},$$

$$\operatorname{tg} \xi = \frac{\operatorname{tg} \psi}{1 + 2 \operatorname{tg}^2 \psi},$$

так что фаза θ отрицательна. Эти соотношения можно переписать и в декартовых координатах:

$$x_1 = -\frac{U^2 \theta}{g} \cos \psi (1 + \sin^2 \psi),$$

$$x_2 = -\frac{U^2 \theta}{g} \cos^2 \psi \sin \psi. \quad (12.36)$$

12.5. Капиллярные волны на тонком слое воды

Аналогичным образом можно изучать стационарные картины капиллярных волн. В этой связи особенно интересно исследование Тейлора [6] волн на тонких слоях воды. Поверхностное натяжение

доминирует, и слой настолько тонок, что приближение $h/\lambda \ll 1$ удовлетворительно. Для одной моды слой деформируется как целое, сохраняя примерно постоянную толщину, и для этой моды (антисимметричное возмущение обеих поверхностей) волны не диспергируют. Однако для симметричной моды, в которой обе поверхности симметрично осциллируют относительно центральной плоскости, имеется дисперсия. Можно применить соотношение (12.7), положив $2h$ равным толщине невозмущенного слоя, так как для каждой половины слоя плоскость симметрии эквивалентна твердой поверхности. Поскольку слой очень тонок, допустимо использовать приближения (12.11). Картину волн от точечного источника в потоке со скоростью U можно анализировать при помощи общей теории, изложенной в предыдущем параграфе, используя дисперсионное соотношение

$$G = Uk_1 + \left(\frac{Th}{\rho} \right)^{1/2} k^2 = 0. \quad (12.37)$$

Для однородного слоя в однородном потоке величины U и h постоянны. В этом случае из (12.29) сразу следует, что

$$\frac{x_2}{x_1} = \operatorname{tg} \xi = \frac{2\alpha k_2}{U + 2\alpha k_1}, \quad \alpha = \left(\frac{Th}{\rho} \right)^{1/2}. \quad (12.38)$$

Согласно (12.37), для вектора $\mathbf{k}$, записанного в полярных координатах (k, ψ) , имеем $k = U \cos \psi / \alpha$ и характеристическое соотношение (12.38) дает

$$\operatorname{tg} \xi = \frac{2 \operatorname{tg} \psi}{\operatorname{tg}^2 \psi - 1}, \quad \text{т.е.} \quad \xi = \pi - 2\psi. \quad (12.39)$$

Далее, из (12.31) следует, что угол μ равен ψ . На этот раз ψ меняется от 0 до $\pi/2$, ξ меняется от $-\pi$ до 0, и мы приходим к выводу, что линии гребней имеют примерно параболическую форму, как показано на рис. 12.7. Для фазы имеем

$$\theta = (k \cos \mu) r = \left(\frac{\rho U}{Th} \right)^{1/2} r \sin^2 \frac{\xi}{2}, \quad (12.40)$$

и последовательность линий гребня описывается кривыми $r \sin^2 (\xi/2) = \text{const.}$

Тейлор провел также эксперименты и развил соответствующую теорию для волн на радиально растягивающемся слое. Для невозмущенного состояния слоя радиальную скорость V можно считать постоянной, поскольку градиенты давления не превосходят $O(h)$ и ими можно пренебречь. Вследствие этого полутолщина слоя h является функцией расстояния R от центра симметрии (источника течения), заданной в виде

$$h = \frac{Q}{4\pi VR}, \quad (12.41)$$

где Q — суммарная мощность источника. Поскольку h зависит от R , мы имеем пример волн на неоднородной среде. Достаточно

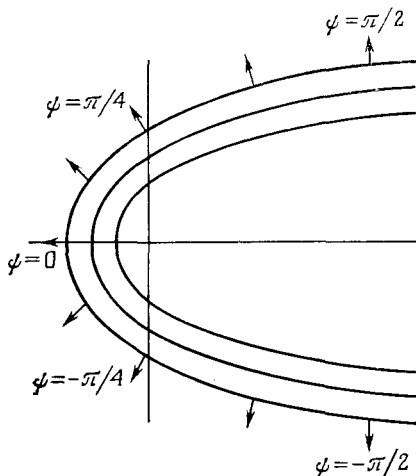


Рис. 12.7. Картина гребней на тонком слое воды.

далеко от центра $R = 0$ параметры среды мало изменяются на расстоянии порядка характерной длины волн, и можно применить

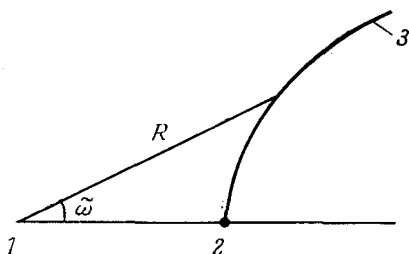


Рис. 12.8. Геометрия волн на радиально растягивающемся слое.
1 — источник течения, 2 — источник волн, 3 — характеристика.

и проиллюстрировать идеи § 11.5 и 11.7, связанные с неоднородностью среды. В полярных координатах $(R, \tilde{\omega})$ с центром в источнике течения, а не в источнике волн (см. рис. 12.8),

$$\mathbf{k} = \left(\theta_R, \frac{1}{R} \theta_{\tilde{\omega}} \right), \quad \mathbf{U} = (V, 0).$$

Для радиального течения дисперсионное соотношение (12.37), преобразуется к виду

$$V \theta_R + \left\{ \frac{T h(R)}{\rho} \right\}^{1/2} \left(\theta_R^2 + \frac{1}{R^2} \theta_{\tilde{\omega}}^2 \right) = 0.$$

Используя выражение (12.41), дисперсионное соотношение можно записать так:

$$G = \frac{1}{2} \left(\theta_R^2 + \frac{1}{R^2} \theta_{\omega}^2 \right) + \beta R^{1/2} \theta_R = 0, \quad \beta = \left(\frac{\pi \rho V^3}{T Q} \right)^{1/2}. \quad (12.42)$$

Это уравнение можно решить методом характеристик, но вычисления гораздо сложнее, чем для соотношений (12.27) — (12.29), поскольку теперь вектор $\mathbf{k}$ не постоянен на характеристиках и характеристики не прямолинейны. Однако характеристическую форму можно найти при помощи общих формул, приведенных в § 2.13. Положим $p = \theta_R$, $q = \theta_{\omega}$; тогда

$$\begin{aligned} \frac{dR}{d\tau} &= G_p = p + \beta R^{1/2}, & \frac{d\tilde{\omega}}{d\tau} &= G_q = \frac{q}{R^2}, \\ \frac{dp}{d\tau} &= -G_R - p G_{\theta} = \frac{q^2}{R^3} - \frac{1}{2} \beta p, \\ \frac{dq}{d\tau} &= -G_{\tilde{\omega}} - q G_{\theta} = 0, \end{aligned}$$

где τ — параметр характеристики. Поскольку q постоянна на каждой характеристике, она становится удобной характеристической переменной, и, согласно (12.42),

$$p = \beta R^{1/2} \left(1 - \frac{q^2}{\beta^2 R^3} \right)^{1/2} - \beta R^{1/2}. \quad (12.43)$$

Характеристики определяются уравнением

$$\frac{d\tilde{\omega}}{dR} = \frac{q/R^2}{p + \beta R^{1/2}} = \frac{q}{\beta R^{5/2} (1 - q^2/(\beta^2 R^3))^{1/2}}.$$

Они проходят через источник волн (скажем, $R = R_0$, $\tilde{\omega} = 0$), и соответствующее интегрирование дает

$$\left(\frac{R_0}{R} \right)^{3/2} = \frac{\sin(\sigma - 3/2 \tilde{\omega})}{\sin \sigma}, \quad \sin \sigma = \frac{q}{\beta R_0^{3/2}}. \quad (12.44)$$

Из этого уравнения для характеристик можно выразить q как функцию от R и $\tilde{\omega}$, а затем, используя (12.43), найти p . Имеем

$$\begin{aligned} q = \theta_{\omega} &= \frac{\beta R^{3/2} \sin(3/2 \tilde{\omega})}{\{(R/R_0)^3 - 2(R/R_0)^{3/2} \cos(3/2 \tilde{\omega}) + 1\}^{1/2}}, \\ p = \theta_R &= \frac{\beta R^{1/2} \{(R/R_0)^3 - \cos(3/2 \tilde{\omega})\}}{\{(R/R_0)^3 - 2(R/R_0)^{3/2} \cos(3/2 \tilde{\omega}) + 1\}^{1/2}} - \beta R^{1/2}, \end{aligned}$$

и, наконец,

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{2}{3} \beta R_0^{3/2} \left\{ \left(\frac{R}{R_0} \right)^3 - 2 \left(\frac{R}{R_0} \right)^{3/2} \cos \left(\frac{3}{2} \tilde{\omega} \right) + 1 \right\}^{1/2} + \\ &\quad + \frac{2}{3} \beta R_0^{3/2} \left\{ 1 - \left(\frac{R}{R_0} \right)^{3/2} \right\}. \quad (12.45) \end{aligned}$$

Этот результат впервые был получен Урселлом [2], уточнившим рассуждения Тейлора. Для малых $\tilde{\omega}$ имеем

$$\theta \simeq \frac{3}{4} \beta R_0^{3/2} \tilde{\omega}^2 \left\{ 1 - \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3/2} \right\}^{-1}; \quad (12.46)$$

это согласуется с уравнением Тейлора для линий гребней и хорошо подтверждается экспериментом.

Этот конкретный пример показывает силу кинематической теории, поскольку любая попытка прямого подхода к получающейся здесь краевой задаче представляется совершенно безнадежной.

12.6. Волны во вращающейся жидкости

Для малых возмущений в несжимаемой жидкости, поступательно движущейся со скоростью U вдоль оси x_3 и вращающейся как твердое тело вокруг этой оси с угловой скоростью Ω , линеаризованные уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{Du_1}{Dt} - 2\Omega u_2 &= -\frac{\partial P}{\partial x_1}, & \frac{Du_2}{Dt} + 2\Omega u_1 &= -\frac{\partial P}{\partial x_2}, \\ \frac{Du_3}{Dt} &= -\frac{\partial P}{\partial x_3}, & \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} &= 0, \end{aligned}$$

где

$$P = \frac{p - p_0}{\rho} - \frac{1}{2} \Omega^2 (x_1^2 + x_2^2), \quad \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x_3}.$$

Исключив возмущения скорости, получим для P уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x_3} \right)^2 \nabla^2 P + 4\Omega^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x_3^2} = 0. \quad (12.47)$$

В случае $U = 0$ приведенное уравнение для периодических возмущений $P = \mathcal{P} e^{-i\omega t}$ имеет вид

$$\frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial x_2^2} + \left(1 - \frac{4\Omega^2}{\omega^2} \right) \frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial x_3^2} = 0. \quad (12.48)$$

Переход типа этого уравнения из эллиптического при $\omega > 2\Omega$ в гиперболический при $\omega < 2\Omega$ приводит как к интересному физическому явлению, так и к интересным математическим задачам. При $\omega > 2\Omega$ возмущение от источника затухает как $1/r^2$, что характерно для дипольного решения уравнения Лапласа, тогда как при $\omega < 2\Omega$ оно сосредоточено внутри характеристического конуса, ось которого совпадает с осью x_3 , а угол полураствора равен $\arcsin \operatorname{tg} (4\Omega^2/\omega^2 - 1)^{-1/2}$. Для течения внутри сосуда граничные условия являются эллиптическими, что приводит к необычным задачам на собственные значения в гиперболическом случае

$\omega < 2\Omega$. Решения были найдены для специальных форм сосудов (Гринспэн [1], Барсилон [1], Франклин [1])¹⁾.

Когда существует поступательное течение со скоростью U , дисперсионное соотношение для уравнения (12.47) принимает вид

$$(\omega - Uk_3)^2 k^2 - 4\Omega^2 k_3^2 = 0. \quad (12.49)$$

Волны возможны лишь в том случае, когда $(\omega - Uk_3)^2 < 4\Omega^2$; для $U = 0$ это согласуется с условием гиперболичности уравнения (12.48). Две моды определяются как

$$\omega = Uk_3 \pm \frac{2\Omega k_3}{k}, \quad (12.50)$$

а групповая скорость имеет компоненты

$$\begin{aligned} C_1 &= \mp 2\Omega \frac{k_1 k_3}{k^3}, \quad C_2 = \mp 2\Omega \frac{k_2 k_3}{k^3}, \\ C_3 &= U \pm 2\Omega \frac{(k_1^2 + k_2^2)}{k^3}. \end{aligned} \quad (12.51)$$

Для точечного источника с постоянной частотой ω на оси x_3 распределение волнового вектора $\mathbf{k}$ находится из уравнения

$$\frac{x_3}{(x_1^2 + x_2^2)^{1/2}} = \frac{C_3}{(C_1^2 + C_2^2)^{1/2}}. \quad (12.52)$$

При $U = 0$ это дает

$$\frac{x_3}{(x_1^2 + x_2^2)^{1/2}} = \pm \frac{(k^2 - k_3^2)^{1/2}}{k_3} = \pm \left(\frac{4\Omega^2}{\omega^2} - 1 \right)^{1/2}. \quad (12.53)$$

Возмущение находится на характеристическом конусе в соответствии с уравнением (12.48).

При $U \neq 0$ имеется дисперсия даже для фиксированной частоты ω , и различные значения вектора $\mathbf{k}$, удовлетворяющие соотношению (12.49), распределены по различным конусам. Описанным выше методом можно получить полную картину волн; результаты приведены в статье Нигема и Нигема [1]. Но, пожалуй, самые интересные вопросы распространения волн связаны с задачей, поставленной Тейлором (столб Тейлора).

В своем знаменитом эксперименте Тейлор [2] обнаружил, что если сфера медленно проталкивается вдоль оси вращения, то весь цилиндрический столб жидкости, в который вписана эта сфера, движется вместе с ней. Полный анализ этого явления сложен (см. Гринспэн [1], стр. 192), но некоторую информацию о нем может дать кинематика волнового процесса. Выберем стационарную систему отсчета, связанную с основным течением U . Для того

¹⁾ Основополагающей здесь является работа С. Л. Соболева «Об одной новой задаче математической физики», *Изв. АН СССР, сер. матем.*, 18, № 1 (1954), 3—50.— *Прим. ред.*

чтобы впереди по течению могли возникнуть волны, необходимо выполнение неравенства $C_3 < 0$, или — что то же самое — неравенства

$$\frac{2\Omega(k_1^2 + k_2^2)}{k^3} > U.$$

Наиболее благоприятный случай получается при $k_3 = 0$, что соответствует поверхности столба Тейлора. Чтобы волны распространялись вверх по течению, они должны иметь $2\Omega/k > U$, или, эквивалентно, $\lambda > U\pi/\Omega$. Следует ожидать, что главными являются волны с $\lambda = O(a)$, где a — радиус сферы. Действительно, Тейлор обнаружил столб при $\Omega a/(\pi U) > 1$, и это в точности согласуется с выбором $\lambda = a$. Дальнейшие исследования (как экспериментальные, так и теоретические) показывают, что резкого перехода нет, а существует переходная область, и сформулированный выше результат следует рассматривать как первое приближение, когда столб Тейлора выражен достаточно отчетливо.

12.7. Волны в стратифицированной жидкости

Гравитационные волны в жидкости со стратифицированной плотностью представляют большой интерес в метеорологии и океанографии. Градиент плотности может возникать за счет перепада температур, изменения содержания соли или других факторов, но часто желательно исключить сжимаемость и звуковые волны в последующем движении. Для этого уравнение неразрывности расщепляется на две части:

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0,$$

и обе сохраняются! Плотность не постоянна, но считается неизменной вдоль траектории частицы в волновом движении. К этим уравнениям добавляются уравнения сохранения импульса

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p - \rho \mathbf{g}.$$

Двойное использование уравнения неразрывности делает ненужным уравнение сохранения энергии, так что мы имеем полную систему. Результаты и приближения можно сопоставить с более полными описаниями; основное требование состоит в том, что скорость звука должна намного превышать волновые скорости, которые получаются в данной теории.

Для двумерного течения в (x, y) -плоскости со стратификацией в направлении оси y положим невозмущенные параметры рав-

ными $u = v = 0$, $\rho = \rho_0(y)$, $p = p_0(y)$, причем

$$\frac{dp_0}{dy} + \rho_0 g = 0, \quad (12.54)$$

и проведем линеаризацию для малых возмущений этого состояния. Обозначим возмущения параметров ρ и p через ρ_1 и p_1 соответственно; тогда линеаризованные уравнения примут вид

$$\begin{aligned} \rho_{1t} + v\rho'_0 &= 0, & u_x + v_y &= 0, \\ \rho_0 u_t + p_{1x} &= 0, & \rho_0 v_t + p_{1y} + g\rho_1 &= 0. \end{aligned}$$

Введя функцию тока Ψ , определяемую равенствами $u = \Psi_y$, $v = -\Psi_x$, эту систему можно заменить уравнением

$$\rho_0 \Psi_{xxt} + (\rho_0 \Psi_{yt})_{yt} - g\rho'_0 \Psi_{xx} = 0. \quad (12.55)$$

При изучении волнового движения удобно иметь уравнение с производными только четных порядков, и этого можно достичь подстановкой $\Psi = \rho^{-1/2} \chi$:

$$\chi_{xxtt} + \chi_{yytt} + \left(\frac{\rho_0'^2}{4\rho_0^2} - \frac{\rho_0''}{2\rho_0} \right) \chi_{tt} - \frac{g\rho'_0}{\rho_0} \chi_{xx} = 0. \quad (12.56)$$

Частный случай экспоненциального распределения $\rho \propto e^{-\alpha y}$ привлекателен постоянными коэффициентами, и его можно достаточно хорошо сращивать с другими распределениями. Для этого случая дисперсионное соотношение имеет вид

$$\omega^2 \left(k_1^2 + k_2^2 + \frac{1}{4} \alpha^2 \right) - \alpha g k_1^2 = 0. \quad (12.57)$$

Во многих ситуациях представляющие интерес длины волн расположены в области $k \gg \alpha$ и соотношение (12.57) аппроксимируется равенствами

$$\omega^2 = \frac{\omega_0^2 k_1^2}{k_1^2 + k_2^2}, \quad \omega_0^2 = \alpha g = -\frac{g\rho'_0}{\rho_0}. \quad (12.58)$$

Частота ω_0 называется частотой Вейсала — Бранта, она постоянна для экспоненциального распределения и зависит от y в более общем случае.

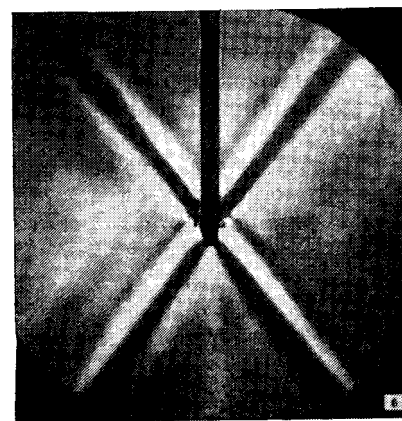
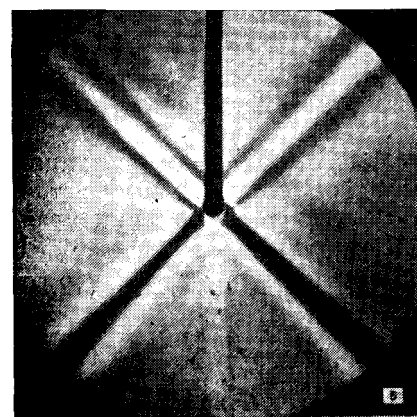
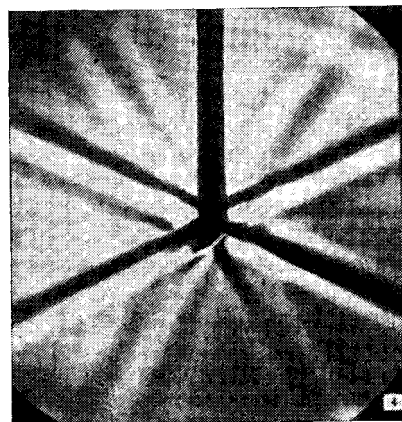
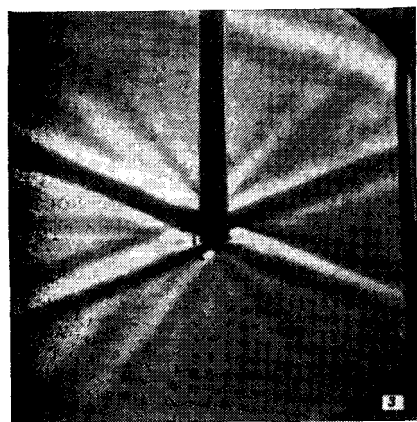
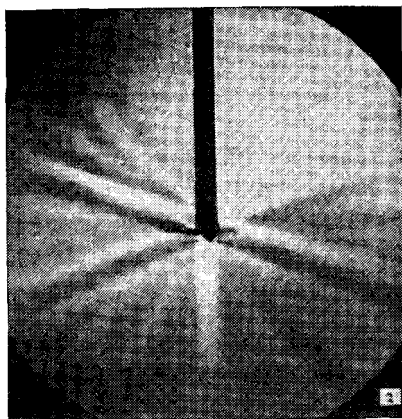
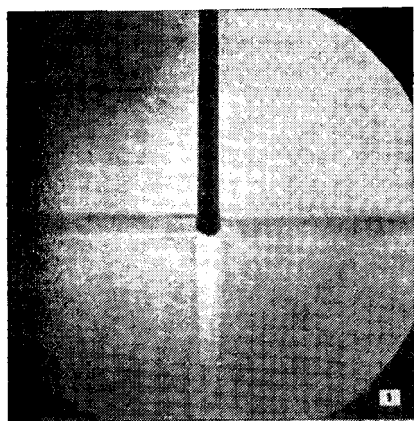
Заметим, что волны возможны только при $\omega < \omega_0$ и ситуация в чем-то аналогична случаю вращающейся жидкости. Для источника с фиксированной частотой $\omega < \omega_0$ одно из решений уравнения (12.58) имеет вид

$$k_1 = k \cos \psi, \quad k_2 = -k \sin \psi, \quad (12.59)$$

где

$$\psi = \arccos(\omega/\omega_0) \quad (12.60)$$

для любой величины k ; следовательно, все волны образуют с осью x фиксированный угол ψ . Соответствующая групповая ско-



рость имеет компоненты

$$C_1 = \frac{\omega_0 k_2^2}{k^3}, \quad C_2 = -\frac{\omega_0 k_1 k_2}{k^3}. \quad (12.61)$$

Поскольку $\mathbf{k} \cdot \mathbf{C} = 0$, фазовая и групповая скорости ортогональны. Поэтому групповая скорость направлена под углом $\xi = \pi/2 - \psi$ к оси x . Направление групповой скорости указывает, где следует искать волны. В силу (12.60), это направление одно и то же для всех волн и составляет угол

$$\xi = \frac{\pi}{2} - \psi = \arcsin \frac{\omega}{\omega_0} \quad (12.62)$$

с осью x . С учетом всех возможных знаков компонент k_1 и k_2 получается крестообразная картина возмущений. Линии гребней также лежат на кресте, но локально движутся по нормали к его образующим, постепенно затухая по мере удаления, причем их место занимают новые линии гребней. (Само собой разумеется, что каждая образующая креста практически имеет конечную толщину вследствие конечных размеров источника.)

Превосходные фотографии, полученные Моубреем и Рерити [1], воспроизведены на рис. 12.9. Источником служит цилиндр, нормальный к плоскости фотографии и осциллирующий в горизонтальном направлении (вертикальный стержень является зондом). Источник вводит также слабую, но различимую вторую гармонику с частотой 2ω . Это дает линии под углом $\arcsin(2\omega/\omega_0)$. В этой и в следующих статьях (Рерити [1], Моубрей и Рерити [2]) авторы подробно исследуют теоретические картины, а также изу-

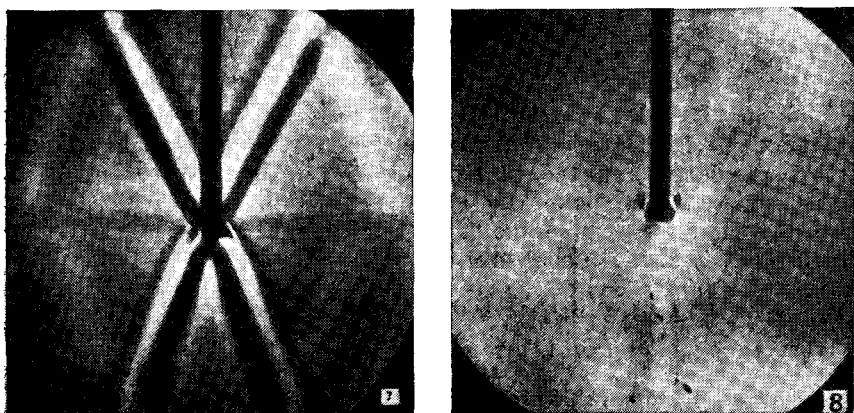


Рис. 12.9. 1: изображение невозмущенной жидкости; 2: $\omega/\omega_0 = 0,318$; 3: $\omega/\omega_0 = 0,366$; 4: $\omega/\omega_0 = 0,419$; 5: $\omega/\omega_0 = 0,615$; 6: $\omega/\omega_0 = 0,699$; 7: $\omega/\omega_0 = 0,900$; 8: $\omega/\omega_0 = 1,11$. (Моубрей и Рерити [1].)

чают картину волн, создаваемых движущейся сферой. Практически распределение плотности несколько отличается от экспоненциального, и на некоторых фотографиях можно заметить искривление групповых линий, обусловленное зависимостью ω_0 от y . Это иллюстрирует эффекты неоднородности среды, причем различные ситуации можно анализировать кинематическими методами, развитыми в предыдущей главе и примененными в § 12.5.

12.8. Кристаллооптика

Анизотропность среды зачастую приводит к удивительным следствиям для картин волн в кристаллах. Благодаря кристаллической структуре существуют выделенные направления для диэлектрических свойств, и поэтому связь между электрической индукцией $\mathbf{D}$ и электрическим полем $\mathbf{E}$ должна описываться тензорным соотношением. Для магнитного поля справедливо обычное соотношение $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$. Указанные эффекты можно учесть, положив в уравнения Максвелла

$$D_i = \varepsilon_{ij} E_j, \quad B_i = \mu_0 H_i. \quad (12.63)$$

В общем случае тензор диэлектрической проницаемости ε_{ij} будет зависеть от частоты ω . Это можно учесть, используя соотношения (12.63) только после исключения зависимости от времени $e^{-i\omega t}$. Для плоских волн, когда все компоненты описывающих поля векторов пропорциональны $e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t}$, уравнения Максвелла сводятся к следующим:

$$\begin{aligned} -i\omega \mathbf{B} + i\mathbf{k} \times \mathbf{E} &= 0, \\ -i\omega \mathbf{D} + i\mathbf{k} \times \mathbf{H} &= 0. \end{aligned} \quad (12.64)$$

Поскольку $\mathbf{B} \propto \mathbf{H}$, векторы $\mathbf{k}$, $\mathbf{D}$ и $\mathbf{H}$ взаимно ортогональны, так что векторы $\mathbf{D}$ и $\mathbf{H}$ лежат в плоскости, ортогональной направлению распространения волн. Поскольку вектор $\mathbf{E}$ ортогонален $\mathbf{B}$, он лежит в одной плоскости с векторами $\mathbf{D}$ и $\mathbf{k}$, но в общем случае не ортогонален направлению распространения. Исключив из уравнений (12.64) $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$, получим

$$\omega^2 \mu_0 \mathbf{D} + \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) = 0.$$

С учетом зависимости $\mathbf{D}$ от $\mathbf{E}$ это дает

$$\omega^2 \mu_0 \varepsilon_{ij} E_j + k_i k_j E_j - k^2 E_i = 0.$$

Дисперсионное соотношение получается теперь из условия обращения в нуль определителя

$$G(\omega, \mathbf{k}) \equiv |\omega^2 \mu_0 \varepsilon_{ij} + k_i k_j - k^2 \delta_{ij}| = 0. \quad (12.65)$$

При выяснении деталей картин волн удобно выбрать в качестве осей координат главные оси тензора ϵ_{ij} . Если соответствующие главные значения равны $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$, то равенство (12.65) принимает вид

$$G(\omega, \mathbf{k}) \equiv \omega^6 \mu_0^3 \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3 - \omega^4 \mu_0^2 \{ \epsilon_2 \epsilon_3 (k_2^2 + k_3^2) + \epsilon_3 \epsilon_1 (k_3^2 + k_1^2) + \epsilon_1 \epsilon_2 (k_1^2 + k_2^2) \} + \omega^2 \mu_0 k^2 \{ \epsilon_1 k_1^2 + \epsilon_2 k_2^2 + \epsilon_3 k_3^2 \} = 0. \quad (12.66)$$

В случае источника с фиксированной частотой ω уравнение (12.66) описывает поверхность в $\mathbf{k}$ -пространстве, определяющую возможные значения волнового вектора $\mathbf{k}$ для элементов возбуждаемых волн. Для каждого допустимого значения вектора $\mathbf{k}$ соответствующая групповая скорость равна

$$C_i(\mathbf{k}) = - \frac{G_{ki}}{G_\omega} \quad (12.67)$$

и, следовательно, направлена по нормали к поверхности (12.66), как показано на рис. 12.10, *a*. Это геометрическое соответствие между $\mathbf{C}$ и $\mathbf{k}$ полезно при построении картин волн.

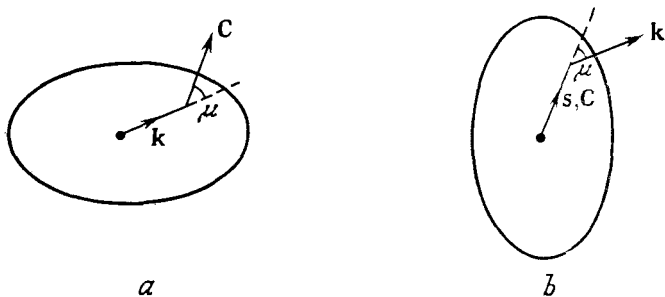


Рис. 12.10. *a* — дисперсионная поверхность в $\mathbf{k}$ -пространстве, *b* — фазовая поверхность в $\mathbf{x}$ -пространстве.

Двойственная поверхность также полезна. Ее можно построить при помощи фазовых поверхностей, образованных периодическим точечным источником, расположенным в начале координат. Этот частный случай не представляет особого интереса в кристаллооптике (поскольку трудно представить себе источник, внедренный внутрь кристалла), но может быть полезен при построении и анализе анизотропных волн общего вида.

Элементы волны с волновым вектором $\mathbf{k}$ находятся в направлении $\mathbf{C}(\mathbf{k})$ от источника. Следовательно, для каждого направления $\mathbf{C}$ от источника можно определить соответствующее этому направлению значение вектора $\mathbf{k}$ (см. рис. 12.10, *b*). Но в общем случае скорость движения фазовой поверхности вдоль групповых линий

не совпадает со скоростью C . Фазовая скорость в направлении $\mathbf{k}$ имеет величину ω/k . Поэтому точка пересечения фазовой поверхности и групповой линии движется со скоростью $\omega/(k \cos \mu)$, где μ — угол между $\mathbf{C}$ и $\mathbf{k}$. За время t фазовая поверхность проходит путь от начала координат до точки

$$x = \frac{\omega}{k \cos \mu} \frac{C}{C} t = \frac{\omega}{k \cdot C} Ct. \quad (12.68)$$

Варьируя $\mathbf{k}$ по всем допустимым значениям (12.66), получаем фазовую поверхность.

Другой вывод можно получить, заметив, что фаза $\theta(x, t)$ выражается формулой

$$\theta(x, t) = -\omega t + \int_0^x \mathbf{k} \cdot d\mathbf{x}, \quad (12.69)$$

где интеграл можно взять вдоль групповой линии, проходящей через $\mathbf{x}$. Следовательно,

$$\theta = -\omega t + k \cos \mu |\mathbf{x}|. \quad (12.70)$$

Фазовая поверхность $\theta = 0$, покинувшая начало координат при $t = 0$, к моменту времени t пройдет путь

$$|\mathbf{x}| = \frac{\omega}{k \cos \mu} t$$

вдоль групповой линии с направлением $\mathbf{C}$. Отсюда следует соотношение (12.68).

В оптике обычно вводят *лучевой вектор* $\mathbf{s}$, определяемый формулой

$$\mathbf{s} = \frac{\omega}{c_0 k \cdot \mathbf{C}} \mathbf{C}, \quad (12.71)$$

где c_0 — скорость света в вакууме. Тогда фазовые поверхности даются соотношением

$$\mathbf{x} = s c_0 t. \quad (12.72)$$

Таким образом, лучевой вектор $\mathbf{s}$ пропорционален групповой скорости, но имеет приведенную величину, чтобы определять распространение фазы вдоль луча (групповой линии) в долях от c_0 . Поскольку $\mathbf{s}$ есть функция от $\mathbf{k}$ и обратно, дисперсионное соотношение (12.66) можно использовать для нахождения соответствующей поверхности в $\mathbf{s}$ -пространстве. Поскольку эта $\mathbf{s}$ -поверхность является канонической формой фазовой поверхности, нормаль к ней в любой точке направлена вдоль $\mathbf{k}$. Таким образом, используя $\mathbf{s}$ вместо $\mathbf{C}$, получаем двойственные свойства $\mathbf{k}$ - и $\mathbf{s}$ -поверхностей.

В оптике также принято работать с коэффициентом преломления $n = c_0 k / \omega$ вместо k . Тогда имеем дополнительное соотношение $s \cdot n = 1$. Для любой точки на n -поверхности соответствующий вектор s направлен вдоль нормали, и его величина равна обратной величине к расстоянию от начала координат до касательной плоскости в данной точке. Обратно, на двойственной s -поверхности соответствующий вектор n направлен вдоль нормали, и его величина равна обратной величине к расстоянию до касательной плоскости.

В частном случае, когда дисперсионное соотношение однородно по ω , k_1 , k_2 и k_3 , дисперсионная функция обладает свойством

$$G(\rho\omega, \rho k_1, \rho k_2, \rho k_3) = 0$$

для произвольного числа ρ . Тогда, дифференцируя по ρ и полагая затем $\rho = 1$, имеем

$$\omega G_\omega + k_i G_{k_i} = 0.$$

Следовательно, $k \cdot C = \omega$. В этом случае, *но только в этом случае*, формула (12.68) сводится к равенству

$$x = Ct$$

и фазовые поверхности распространяются вдоль групповых линий со скоростью C . Различие между групповой и фазовой скоростями в точности компенсируется характеризующим наклон множителем $\cos \mu$. Этот частный случай применим, например, к соотношению (12.66), если тензор ε_{ij} не зависит от ω .

Одноосные кристаллы

В случае одноосного кристалла с осью симметрии x_1 имеем $\varepsilon_2 = \varepsilon_3$, и это общее значение обозначается через $\varepsilon_\perp$. Тогда дисперсионное соотношение (12.66) факторизуется, так что возникает две возможности:

$$\omega^2 = \frac{k^2}{\varepsilon_\perp \mu_0}, \quad (12.73)$$

$$\omega^2 = \frac{k_1^2}{\varepsilon_\perp \mu_0} + \frac{k_2^2 + k_3^2}{\varepsilon_1 \mu_0}. \quad (12.74)$$

Казалось бы, анизотропия должна искажать волны, и несколько неожиданно, что происходит расщепление и одно семейство остается изотропным. Интересное явление кристаллооптики связано прежде всего с этим расщеплением.

Теперь мы имеем две поверхности в k -пространстве, как показано на рис. 12.11, *а*. Волны, описываемые соотношением (12.73), изотропны, имеют скорость $(\varepsilon_\perp \mu_0)^{-1/2}$ и называются *обыкновенными*

волнами. Соответствующая поверхность в $\mathbf{k}$ -пространстве является сферой, групповая скорость направлена вдоль $\mathbf{k}$, и дисперсия возникает только тогда, когда $\varepsilon_{\perp}$ зависит от ω . Второе семейство волн, описываемое соотношением (12.74), называется *необыкновенным*, и поверхность в $\mathbf{k}$ -пространстве является эллипсоидом; эти волны диспергируют. Поверхности изображены на рис. 12.11, а для

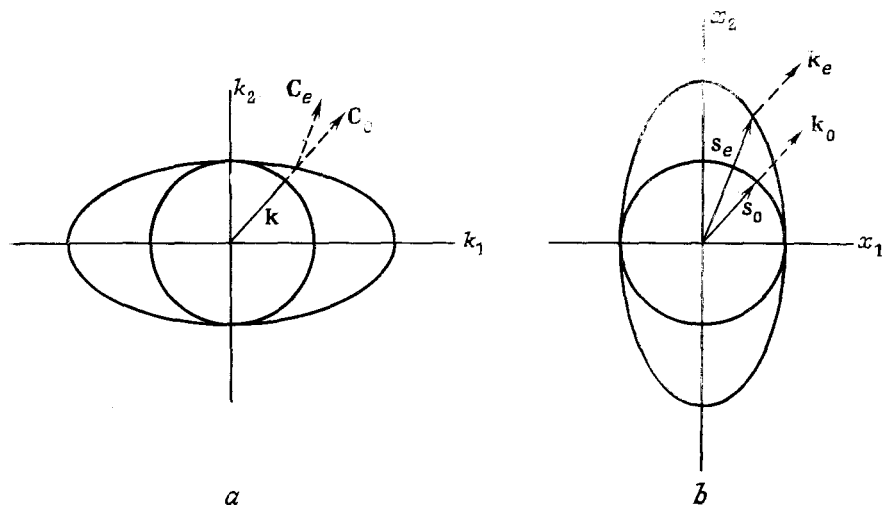


Рис. 12.11. *a* — дисперсионные поверхности в $\mathbf{k}$ -пространстве для одноосного кристалла, *b* — фазовые поверхности в $\mathbf{x}$ -пространстве для одноосного кристалла.

случая $\varepsilon_1 > \varepsilon_{\perp}$. Для каждого $\mathbf{k}$ существуют две групповые скорости C_0 и C_e . Как следствие получаются *две* фазовые поверхности, изображенные на рис. 12.11, *b*. Для обыкновенных волн $C_0 \propto \mathbf{k}$ и уравнение фазовой поверхности (12.68) имеет вид

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{k}}{\varepsilon_{\perp} \mu_0 \omega} t. \quad (12.75)$$

Используя для исключения вектора $\mathbf{k}$ соотношение (12.73), находим фазовые поверхности

$$\varepsilon_{\perp} \mu_0 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = t^2; \quad (12.76)$$

это обыкновенные сферические волны, распространяющиеся со скоростью $(\varepsilon_{\perp} \mu_0)^{-1/2}$. Для необыкновенных волн

$$C_e \propto \left(\frac{k_1}{\varepsilon_{\perp}}, \frac{k_2}{\varepsilon_1}, \frac{k_3}{\varepsilon_1} \right), \quad (12.77)$$

и уравнение фазовой поверхности (12.68) имеет вид

$$\mathbf{x} = \left(\frac{k_1}{\varepsilon_{\perp} \mu_0 \omega}, \frac{k_2}{\varepsilon_1 \mu_0 \omega}, \frac{k_3}{\varepsilon_1 \mu_0 \omega} \right) t. \quad (12.78)$$

Согласно (12.74), фазовые поверхности являются эллипсоидами

$$\varepsilon_{\perp} \mu_0 x_1^2 + \varepsilon_1 \mu_0 (x_2^2 + x_3^2) = t^2. \quad (12.79)$$

Канонические s-поверхности получаются из (12.76) и (12.79) заменой $\mathbf{x} = s \mathbf{c}_0 t$.

Для необыкновенных волн направление распространения волн с волновым вектором $\mathbf{k}$ определяется соотношением (12.77). Волны

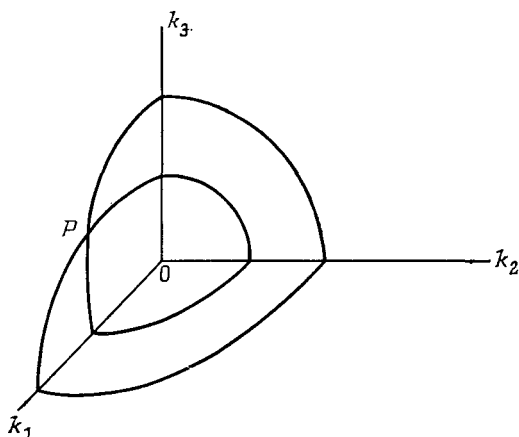


Рис. 12.12. Дисперсионные поверхности в $\mathbf{k}$ -пространстве для двухосного кристалла.

с вектором $\mathbf{k}$, составляющим угол ψ с осью симметрии, распространяются под углом ξ , определяемым из уравнения

$$\operatorname{tg} \xi = \frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon_1} \operatorname{tg} \psi. \quad (12.80)$$

Вследствие этого расщепления луч, падающий на одноосный кристалл, как правило, при преломлении расщепляется на два отдельных луча. Преломленные лучи определяются из условия непрерывности касательной составляющей k_t вектора $\mathbf{k}$. Но для заданной составляющей k_t существуют два допустимых волновых вектора $\mathbf{k}$, удовлетворяющих соотношениям (12.73) и (12.74) соответственно. Преломленные лучи распространяются по направлениям соответствующих групповых скоростей.

Двухосные кристаллы

Для двухосных кристаллов с неравными главными значениями ϵ_1 , ϵ_2 , ϵ_3 поверхность (12.66) состоит из двух листов с четырьмя изолированными точками пересечения вместо *окружности* касания сферы и эллипсоида на рис. 12.11, а. Один октант этой поверхности изображен на рис. 12.12 для случая $\epsilon_1 < \epsilon_2 < \epsilon_3$. Точка P является одной из точек пересечения, остальные расположены симметрично в других квадрантах (k_1, k_3) -плоскости. В особой точке нормаль может принимать любое значение, лежащее на конусе направлений в данной точке. Если луч света падает на кристалл нормально в этом направлении, образуется конус преломленных лучей.

Дальнейшие детали становятся сложными и требуют длительного исследования. Эти (и многие другие) сведения можно найти в превосходных монографиях Зоммерфельда ([1], гл. 4) и Ландау и Лифшица ([4], гл. 11).

Глава 13

ВОЛНЫ НА ВОДЕ

Многие общие методы теории диспергирующих волн были разработаны при изучении волн на воде. Это увлекательный предмет, поскольку физическая сторона широко известна, а математические задачи разнообразны¹⁾. Мы обратимся теперь непосредственно к этой теме. Сначала мы докажем результаты, на которые мы ссылались выше, уточним отдельные детали и рассмотрим ряд задач, характерных для данного предмета. Затем перейдем к нелинейной теории, которая впервые позволила понять, как нелинейность влияет на диспергирующие волны, что со временем привело к общей точке зрения на такие вопросы. И здесь она будет служить той же цели, мотивируя общие рассуждения и изучение аналогичных явлений в различных контекстах.

13.1. Уравнения для волн на воде

Рассмотрим невязкую несжимаемую жидкость (воду) в однородном поле тяжести. Пространственные координаты обозначим через (x_1, x_2, y) , а соответствующие компоненты вектора скорости $\mathbf{u}$ через (u_1, u_2, v) . Ускорение свободного падения g направлено по отрицательной полуоси y . Уравнения движения невязкой жидкости были приведены в гл. 6 (см. уравнения (6.49)). Теперь предположим дополнительно, что плотность ρ остается постоянной и что поле внешних сил имеет вид $\mathbf{F} = -\rho g \mathbf{j}$, где $\mathbf{j}$ — единичный вектор, направленный вдоль оси y . Тогда уравнения примут следующий вид:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (13.1)$$

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - g \mathbf{j}. \quad (13.2)$$

В большинстве задач теории волн на воде течение можно считать безвихревым, так что $\text{rot } \mathbf{u} = 0$ и можно ввести потенциал скорости ϕ , определяемый равенством $\mathbf{u} = \nabla \phi$. Для доказательства

¹⁾ Читатель, интересующийся математической стороной дела, может обратиться, например, к следующим книгам: Теория поверхностных волн, сборник, М., ИЛ, 1959; Лаврентьев М. А., Шабат Б. В., Проблемы гидродинамики и их математические модели, М., «Наука», 1973; Налимов В. И., Пухначев В. В., Неустановившиеся движения идеальной жидкости со свободной границей, Новосибирск, Изд-во НГУ, 1975.— *Прим. ред.*

можно, как обычно, воспользоваться уравнением для вихря $\omega = \text{rot } \mathbf{u}$. Сначала уравнение (13.2) записывается в виде

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{1}{2} \mathbf{u}^2 \right) + \omega \times \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - g \mathbf{j}. \quad (13.3)$$

Для того чтобы исключить давление, применим к этому уравнению оператор rot и получим уравнение Гельмгольца

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \nabla \times (\omega \times \mathbf{u}) = 0. \quad (13.4)$$

Поскольку $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, последнее уравнение можно переписать так:

$$\frac{D\omega}{Dt} = \frac{\partial \omega}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \omega = (\omega \cdot \nabla) \mathbf{u}. \quad (13.5)$$

Далее, $\omega = 0$ — допустимое решение и это решение единственно, например, при условии, что все компоненты $\nabla \mathbf{u}$ ограничены. Следовательно, если $\omega = 0$ первоначально, то это справедливо и для всех последующих моментов времени. В теории волн на воде типичные задачи связаны с распространением волн на покоящейся воде или в однородном потоке. В обоих случаях в исходном состоянии $\omega = 0$ и приведенные выше рассуждения применимы. Мы ограничимся исследованием безвихревых течений.

Когда $\mathbf{u} = \nabla \varphi$, уравнение (13.3) интегрируется, и мы находим

$$\frac{p - p_0}{\rho_0} = B(t) + \varphi_t - \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 - gy, \quad (13.6)$$

где $B(t)$ — произвольная функция, а p_0 — произвольная постоянная, выделенная из $B(t)$ для удобства учета условия на свободной поверхности. Ясно, что $B(t)$ можно включить в φ , выбрав новый потенциал $\varphi' = \varphi - \int B(t) dt$. Обычно мы предполагаем, что это сделано, и получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \nabla \varphi, \\ \frac{p - p_0}{\rho_0} &= -\varphi_t - \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 - gy. \end{aligned} \quad (13.7)$$

Согласно (13.4), потенциал φ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\nabla^2 \varphi = 0. \quad (13.8)$$

После того как найдено решение уравнения (13.8) с соответствующими граничными условиями, представляющие интерес физические величины $\mathbf{u}$, p определяется равенствами (13.7). Это выглядит довольно просто и кажется мало относящимся к волнам, поскольку фигурирует уравнение Лапласа. Такое впечатление ошибочно, потому что условия на свободной поверхности обладают удивительными свойствами.

Рассмотрим случай, когда над поверхностью воды находится воздух (хотя, очевидно, можно было бы рассматривать две любые жидкости). Поверхность раздела, описываемая уравнением

$$f(x_1, x_2, y, t) = 0. \quad (13.9)$$

определяется условием, что частицы жидкости не пересекают ее. Поэтому компонента скорости жидкости, нормальная к поверхности раздела, должна совпадать с нормальной компонентой скорости самой поверхности раздела. Нормальная компонента скорости поверхности, определяемой уравнением (13.9), равна

$$\frac{-f_t}{\sqrt{f_{x_1}^2 + f_{x_2}^2 + f_y^2}}.$$

Нормальная компонента скорости жидкости составляет

$$\frac{u_1 f_{x_1} + u_2 f_{x_2} + v f_y}{\sqrt{f_{x_1}^2 + f_{x_2}^2 + f_y^2}}.$$

Условие равенства этих компонент дает

$$\frac{Df}{Dt} = f_t + u_1 f_{x_1} + u_2 f_{x_2} + v f_y = 0. \quad (13.10)$$

Оно показывает, что частицы, находящиеся на поверхности, остаются на ней, и часто вводится непосредственно на этих основаниях. Однако прямое утверждение может внушать недоверие и, по-видимому, предпочтительнее вывести его, как было сделано выше, исходя из основного свойства поверхности раздела.

В дальнейшем удобно описывать поверхность раздела уравнением $y = \eta(x_1, x_2, t)$, положив в (13.10)

$$f(x_1, x_2, y, t) \equiv \eta(x_1, x_2, t) - y.$$

Тогда граничное условие принимает вид

$$\frac{D\eta}{Dt} = \eta_t + u_1 \eta_{x_1} + u_2 \eta_{x_2} = v. \quad (13.11)$$

Уравнение (13.10) или (13.11) является кинематическим условием на границе. Существует также динамическое условие. Поскольку поверхность раздела не обладает массой, силы, приложенные к обеим ее сторонам, должны быть равны. Отсюда, пренебрегая на время поверхностным натяжением, получаем, что давление в воде и давление в воздухе у поверхности должны совпадать.

Любое возмущение поверхности, очевидно, приводит к некоторому движению воздуха, но можно считать, что связанное с этим изменение давления пренебрежимо мало и давление воздуха можно аппроксимировать его невозмущенной величиной. При этом исходим из того, что плотность воздуха очень мала по сравнению

с плотностью воды и изменения давления имеют порядок ρu^2 . Это предположение можно детально подтвердить с учетом движения воздуха в типичных примерах (см. § 13.7).

Если на указанных основаниях пренебречь движением воздуха, то второе граничное условие принимает вид $p = p_0$, где p — давление в воде, определяемое вторым уравнением (13.7), а p_0 — постоянное значение в невозмущенном воздухе. Таким образом, два граничных условия на свободной поверхности записываются в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \eta_t + \Phi_{x_1}\eta_{x_1} + \Phi_{x_2}\eta_{x_2} &= \Phi_y, \\ \Phi_t + \frac{1}{2}(\Phi_{x_1}^2 + \Phi_{x_2}^2 + \Phi_y^2) + g\eta &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ на } y = \eta(x_1, x_2, t). \quad (13.12)$$

Обычно для уравнения Лапласа задается одно граничное условие, но при этом считается, что граница известна. На свободной поверхности необходимы два условия, поскольку кроме Φ надо определить еще положение поверхности η .

На твердой неподвижной границе нормальная компонента скорости жидкости должна обращаться в нуль, т. е. $\mathbf{n} \cdot \nabla \Phi = 0$. В частности, если дно задано уравнением $y = -h_0(x_1, x_2)$, то имеем

$$\Phi_y + \Phi_{x_1}h_{0x_1} + \Phi_{x_2}h_{0x_2} = 0 \text{ при } y = -h_0(x_1, x_2). \quad (13.13)$$

Это частный случай условия на поверхности раздела (13.10) при $f(x_1, x_2, y, t) = y + h_0(x_1, x_2)$. Для горизонтального плоского дна h_0 постоянна и

$$\Phi_y = 0 \text{ при } y = -h_0. \quad (13.14)$$

13.2. Вариационная формулировка

В связи с общим использованием вариационных принципов, введенных в гл. 11, важно иметь вариационную формулировку задачи о волнах на воде. В явном виде ее, по-видимому, до последнего времени не было, и лишь сравнительно недавно она была дана в статье Льюка [2]. Конечно, хорошо известно, что уравнение Лапласа можно получить из принципа Дирихле

$$\delta \iiint \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 dx dy dt = 0, \quad (13.15)$$

но Льюк показал, что вариационный принцип

$$\delta \int_R L dx dt = 0, \quad (13.16)$$

$$L = -\rho \int_{-h_0}^{\eta} \left\{ \Phi_t + \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 + gy \right\} dy \quad (13.17)$$

дает, кроме того, и требуемые граничные условия. Здесь R — произвольная область в (x, t) -пространстве. Когда выражение (13.17) подставлено в (13.16), интегрирование проводится по области R_1 в (x, y, t) -пространстве, состоящей из точек, для которых $(x, t) \in R$ и $-h_0 \leq y \leq \eta$. Входящие в выражение (13.17) члены φ_t и gy , дополнительные по сравнению с принципом Дирихле (13.15), влияют только на граничные условия, поскольку они интегрируются и дают вклад лишь на границе области R_1 .

Для малых отклонений $\delta\varphi$ от φ имеем

$$\begin{aligned} -\delta \iint \frac{L}{\rho} dx dt &= \iint_R \left\{ \int_{-h_0}^{\eta} (\delta\varphi_t + \nabla\varphi \cdot \nabla \delta\varphi) dy \right\} dx dt = \\ &= \iint_R \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \int_{-h_0}^{\eta} \delta\varphi dy + \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{-h_0}^{\eta} \varphi_{x_i} \delta\varphi dy \right\} dx dt - \\ &- \iint_R \left\{ \int_{-h_0}^{\eta} (\varphi_{x_i x_i} + \varphi_{yy}) \delta\varphi dy \right\} dx dt - \\ &- \iint_R [(\eta_t + \varphi_{x_i} \eta_{x_i} - \varphi_y) \delta\varphi]_{y=\eta} dx dt + \\ &+ \iint_R [(\varphi_{x_i} h_{0x_i} + \varphi_y) \delta\varphi]_{y=-h_0} dx dt. \end{aligned} \quad (13.18)$$

(По повторяющимся индексам i проводится суммирование с $i = 1, 2$.) Первый член после интегрирования дает вклад только на границе области R и обращается в нуль, если выбрать $\delta\varphi$ равной нулю на границе области R . Если (13.18) должно обращаться в нуль для *всех* $\delta\varphi$, то необходимо

$$\begin{aligned} \varphi_{x_i x_i} + \varphi_{yy} &= 0, & -h_0 < y < \eta, \\ \eta_t + \varphi_{x_i} \eta_{x_i} - \varphi_y &= 0, & y = \eta, \\ \varphi_{x_i} h_{0x_i} + \varphi_y &= 0, & y = -h_0. \end{aligned} \quad (13.19)$$

Чтобы получить первое уравнение, выберем $\delta\varphi = 0$ при $y = \eta$ и $y = -h_0$, а потом используем обычные вариационные рассуждения. Затем после исключения первых двух членов выражения (13.18) подходящий выбор $\delta\varphi > 0$ при $y = \eta$, $\delta\varphi = 0$ при $y = -h_0$ дает граничное условие при $y = \eta$; аналогичным образом выбор $\delta\varphi = 0$ при $y = \eta$, $\delta\varphi > 0$ при $y = -h_0$ дает граничное условие при $y = -h_0$.

Для вариации $\delta\eta$ из (13.16) — (13.17) сразу следует, что

$$\delta \iint_R L dx dt = -\rho \iint_R \left[\varphi_t + \frac{1}{2} (\nabla\varphi)^2 + gy \right]_{y=\eta} \delta\eta dx dt = 0,$$

и обычными рассуждениями получаем, что

$$\left[\varphi_t + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + gy \right]_{y=\eta} = 0. \quad (13.20)$$

Уравнения (13.19) — (13.20) совпадают с уравнениями, выведенными в предыдущем параграфе, так что приведенная там формулировка содержится в (13.16) — (13.17).

Самым существенным в функционале (13.17) является то, что величина в скобках равна $p - p_0$, и наш принцип является принципом стационарного давления! Связь этого принципа с принципом Гамильтона подробно обсуждается Селиджером и Уиземом [1].

Линейная теория

13.3. Линеаризованная формулировка

Для малых возмущений первоначально покоящейся жидкости величины η и φ малы и уравнения при первом рассмотрении можно линеаризовать. Линеаризованные условия на свободной поверхности (13.12) имеют вид

$$\eta_t = \varphi_y, \quad \varphi_t + g\eta = 0, \quad (13.21)$$

и можно провести дальнейшую линеаризацию, наложив эти условия на поверхности $y = 0$ вместо $y = \eta$. После этой дальнейшей линеаризации η можно исключить, что дает

$$\varphi_{tt} + g\varphi_y = 0 \quad \text{на } y = 0.$$

Уравнение Лапласа и граничное условие на дне (13.13) уже линейны и не зависят от η . Таким образом, мы имеем линейную задачу для одной функции φ :

$$\begin{aligned} \varphi_{x_1 x_1} + \varphi_{x_2 x_2} + \varphi_{yy} &= 0, & -h_0 < y < 0, \\ \varphi_{tt} + g\varphi_y &= 0, & y = 0, \\ \varphi_y + h_{0x_1}\varphi_{x_1} + h_{0x_2}\varphi_{x_2} &= 0, & y = -h_0. \end{aligned} \quad (13.22)$$

После того как решение φ найдено, уравнение поверхности, согласно (13.21), определяется формулой

$$\eta(x_1, x_2, t) = -\frac{1}{g} \varphi_t(x_1, x_2, 0, t). \quad (13.23)$$

Задачу (13.22) следует дополнить подходящими начальными условиями.

13.4. Линейные волны на воде постоянной глубины

На воде волны распространяются горизонтально, так что элементарные решения имеют вид

$$\eta = Ae^{i\kappa \cdot \mathbf{x} - i\omega t}, \quad \varphi = Y(y) e^{i\kappa \cdot \mathbf{x} - i\omega t};$$

они осциллируют по $\mathbf{x}$, t , но не по y . Функция φ такого вида будет решением уравнения Лапласа, если

$$Y'' - \kappa^2 Y = 0, \quad \kappa = |\kappa| = (\kappa_1^2 + \kappa_2^2)^{1/2}.$$

Для воды с постоянной глубиной h_0 должно выполняться следующее граничное условие: $Y'(y) = 0$ при $y = -h_0$. Поэтому

$$Y \propto \operatorname{ch} \kappa (h_0 + y).$$

В силу (13.23), для амплитуды функции η имеем

$$A = \frac{i\omega}{g} Y(0)$$

и соответственно

$$Y(y) = -\frac{ig}{\omega} A \frac{\operatorname{ch} \kappa (h_0 + y)}{\operatorname{ch} \kappa h_0}.$$

Тогда

$$\eta = Ae^{i\kappa \cdot \mathbf{x} - i\omega t},$$

$$\varphi = -\frac{ig}{\omega} A \frac{\operatorname{ch} \kappa (h_0 + y)}{\operatorname{ch} \kappa h_0} e^{i\kappa \cdot \mathbf{x} - i\omega t}. \quad (13.24)$$

Оставшееся условие $\varphi_{tt} + g\varphi_y = 0$ при $y = 0$ дает дисперсионное соотношение

$$\omega^2 = g\kappa \operatorname{th} \kappa h_0. \quad (13.25)$$

В § 11.1 было указано, что дифференциальные уравнения должны приводить к полиномиальным дисперсионным соотношениям при условии, что зависимость от всех независимых переменных синусоидальна. В данном случае получилось трансцендентное уравнение (13.25), поскольку зависимость от y не синусоидальна. Можно считать, что все волны распространяются в $(\mathbf{x}, t)$ -пространстве и что зависимость от y указывает на связь между волновыми движениями на различных глубинах.

13.5. Задача Коши

Дисперсионное соотношение (13.25) имеет две моды $\omega = \pm W(\kappa)$, где

$$W(\kappa) = \sqrt{g\kappa \operatorname{th} \kappa h_0}. \quad (13.26)$$

Точка $\kappa = 0$ не является точкой ветвления, поскольку $g\kappa \operatorname{th} \kappa h_0 \sim \sim gh_0\kappa^2$ при $\kappa h_0 \rightarrow 0$. Функция W , выбранная таким образом, что

$W \sim \kappa \sqrt{gh_0}$ вблизи нуля, однозначна и аналитична на вещественной оси κ . Она имеет точки ветвления в других нулях и полюсах $\text{th } \kappa h_0$, т. е. $\kappa h_0 = \pm n\pi i$, $\pm (n - 1/2)\pi i$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Функция $W(\kappa)$ является однозначной аналитической функцией переменной κ в комплексной κ -плоскости с разрезами от $-\infty i$ до $-\pi i/(2h_0)$ и от $\pi i/(2h_0)$ до ∞i .

Общее решение получается преобразованием Фурье и суперпозицией элементарных решений (13.24) для двух мод $\omega = \pm W(\kappa)$. Для нахождения произвольных функций $F(\kappa)$, входящих в решение, необходимы два начальных условия. Конечно, функция ϕ в начальных условиях должна удовлетворять уравнению Лапласа, иначе в игру вступят эффекты сжимаемости и быстро преобразуют исходное распределение в некоторое новое *эффективное* исходное распределение. Для простоты рассмотрим жидкость, первоначально находившуюся в состоянии покоя с $\phi = 0$. Тогда, согласно (13.21), в начальный момент $\eta_t = 0$. К этому мы добавим заданную исходную поверхность

$$\eta(x, 0) = \eta_0(x), \quad t = 0. \quad (13.27)$$

Решение этой задачи имеет вид

$$\eta(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\kappa) e^{i\kappa \cdot x - iWt} d\kappa + \int_{-\infty}^{\infty} F(\kappa) e^{i\kappa \cdot x + iWt} d\kappa, \quad (13.28)$$

где $F(\kappa)$ — преобразование Фурье функции $1/2 \eta_0(x)$.

Для одномерной задачи переменные κ и x в (13.28) являются скалярами и

$$F(\kappa) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \eta_0(x) e^{-i\kappa x} dx. \quad (13.29)$$

Общее решение можно восстановить по частному случаю $\eta_0(x) = \delta(x)$, $F(\kappa) = 1/(4\pi)$, известному в теории волн на воде как задача Коши — Пуассона. Ее решение можно представить в виде

$$\eta(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \kappa x \cos(W(\kappa) t) d\kappa, \quad (13.30)$$

как уже было указано в (11.19).

При наличии осевой симметрии относительно вертикали двумерное выражение (13.28) сводится к следующему:

$$\eta(r, t) = 2 \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \kappa F(\kappa) e^{i\kappa r \cos \xi} \cos(W(\kappa) t) d\kappa d\xi,$$

где $r = |\mathbf{x}|$, $\kappa = |\mathbf{k}|$ и ξ — угол между $\mathbf{x}$ и $\mathbf{k}$. Учитывая интегральное представление для функции Бесселя J_0

$$J_0(\kappa r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\kappa r \cos \xi} d\xi,$$

это решение можно записать в виде

$$\eta(r, t) = 4\pi \int_0^\infty \kappa F(\kappa) J_0(\kappa r) \cos(W(\kappa)t) d\kappa. \quad (13.31)$$

Аналогичным образом, формулу обращения преобразования Фурье можно записать в виде одномерного интеграла

$$F(\kappa) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty r \eta_0(r) J_0(\kappa r) dr. \quad (13.32)$$

Конечно, эти равенства можно получить также разделением переменных в полярных координатах и преобразованием Фурье — Бесселя. Для δ -образного начального условия $\eta_0(r) = \delta(r)/(2\pi r)$ имеем

$$\eta(r, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \kappa J_0(\kappa r) \cos(W(\kappa)t) d\kappa. \quad (13.33)$$

К этим решениям можно применить асимптотические методы, описанные в гл. 11. В частности, согласно (11.24) — (11.25), асимптотическое поведение одномерного решения таково:

$$\eta \sim 2 \operatorname{Re} \left(F(k) \sqrt{\frac{2\pi}{t |W'(k)|}} \exp \left\{ i k x - i W(k) t + \frac{i\pi}{4} \right\} \right),$$

$$t \rightarrow \infty, \quad \frac{x}{t} > 0, \quad (13.34)$$

где $k(x, t)$ — положительный корень уравнения

$$W'(k) = \frac{x}{t}, \quad (13.35)$$

$F(k)$ определяется формулой (13.29). Интерпретация этих выражений подробно рассмотрена в гл. 11, а свойства групповой скорости $C(k)$ указаны в формулах (12.4) — (12.6). Поскольку $C(k)$ — убывающая функция от k , наиболее длинные волны идут в головной части возмущения, а за ними следуют более короткие волны. Групповые линии постоянного k и фазовые линии постоянной θ приведены на рис. 13.1; типичный волновой пакет изображен на рис. 13.2.

В случае конечной глубины существует конечная максимальная групповая скорость $\sqrt{gh_0}$ при $kh_0 \rightarrow 0$, так что головная часть

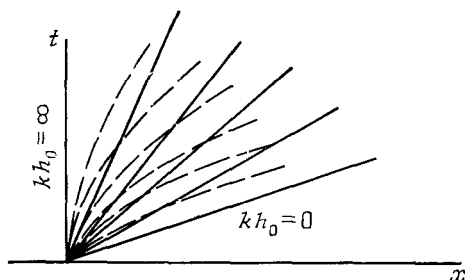


Рис. 13.1. Групповые линии (сплошные кривые) и фазовые линии (штриховые кривые) для волн на воде.

возмущения движется со скоростью $\sqrt{gh_0}$. Резкий волновой фронт существует только в приближении (13.34), но не в полном решении. В полном решении возмущение затухает экспоненциально

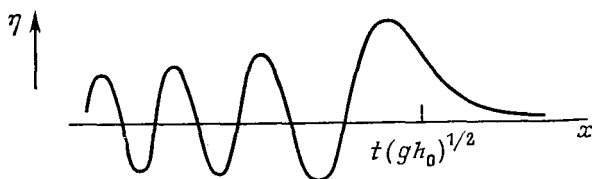


Рис. 13.2. Волновой пакет вблизи фронта возмущения для волн на воде.

без осцилляций впереди фронта и здесь возмущение относительно мало. Поскольку $C(k) = W'(k) \rightarrow \sqrt{gh_0}$ и $W''(k) \rightarrow 0$ при $kh_0 \rightarrow 0$, приближение (13.34) не приемлемо в окрестности переходной области. Исследуем теперь истинное поведение решения.

13.6. Поведение решения вблизи фронта волнового пакета

На прямой $x = \sqrt{gh_0} t$ правильное асимптотическое поведение можно найти при помощи обобщенного метода стационарной фазы (11.26), поскольку в нашем случае $W'''(0) \neq 0$. Если значение $F(0)$ конечно и отлично от нуля, то этот метод дает убывание амплитуды

$$\eta \propto t^{-1/3} \quad (13.36)$$

взамен убывания $\eta \propto t^{-1/2}$ вдали от фронта. Поскольку

$$F(0) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \eta_0(x) dx, \quad (13.37)$$

эти рассуждения применимы, когда полное исходное возвышение конечно и отлично от нуля.

Однако хотелось бы иметь решение, дающее равномерное приближение во всей переходной области. Его можно получить, заметив, что вся переходная область соответствует малым значениям k . Как выражение (13.34) для малых k , так и условие (13.36) для $k = 0$ можно получить, разложив показатель экспоненты в интеграле Фурье около $k = 0$, а не около стационарной точки, и сохранив члены до третьей степени по k включительно. Согласно (13.26),

$$W(k) \sim c_0 k - \gamma k^3 + \dots, \quad (13.38)$$

где

$$c_0 = \sqrt{gh_0}, \quad \gamma = \frac{1}{6} h_0^2 \sqrt{gh_0}. \quad (13.39)$$

Таким образом, для головной части движущейся вправо волны мы полагаем

$$\eta \sim \int_{-\infty}^{\infty} F(k) \exp \{ik(x - c_0 t) + i\gamma k^3 t\} dk. \quad (13.40)$$

Корректно также разложить в ряд Тейлора функцию $F(k)$ и сохранить только первый член. Если интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \eta_0(x) dx$ конечен и выбран равным единице, то этот первый член, $F(0)$, равен $1/(4\pi)$ и решение имеет вид

$$\eta \sim \eta_f = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \{ik(x - c_0 t) + i\gamma k^3 t\} dk. \quad (13.41)$$

Последний интеграл заменой переменных $s = (3\gamma t)^{1/3} k$ можно свести к обычному интегралу Эйри

$$\text{Ai}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ i \left(sz + \frac{1}{3} s^3 \right) \right\} ds = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \left(sz + \frac{1}{3} s^3 \right) ds.$$

Тогда получим

$$\eta_f = \frac{1}{2(3\gamma t)^{1/3}} \text{Ai} \left\{ \frac{x - c_0 t}{(3\gamma t)^{1/3}} \right\}. \quad (13.42)$$

График функции Эйри $\text{Ai}(z)$ схематически изображен на рис. 13.2. Она имеет следующее асимптотическое поведение:

$$\text{Ai}(z) \sim \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} z^{-1/4} \exp\left(-\frac{2}{3} z^{3/2}\right), & z \rightarrow +\infty, \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} |z|^{-1/4} \sin\left(\frac{2}{3} |z|^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right), & z \rightarrow -\infty. \end{cases}$$

Отсюда видно, что η_f экспоненциально убывает впереди волнового фронта $x = c_0 t$ и становится осциллирующей за ним. На самой прямой $x = c_0 t$ имеем $\eta_f \propto t^{-1/3}$, что согласуется с (13.36). Переходная область расположена вблизи прямой $x = c_0 t$ и имеет ширину, пропорциональную $(\gamma t)^{1/3}$. Вдали от переходной области при $(x - c_0 t)/(3\gamma t)^{1/3} \rightarrow -\infty$

$$\eta_f \sim (4\pi)^{-1/2} \{3\gamma t (c_0 t - x)\}^{-1/4} \sin \left\{ \frac{2}{3} \frac{(c_0 t - x)^{3/2}}{(3\gamma t)^{1/2}} + \frac{\pi}{4} \right\}. \quad (13.43)$$

Можно проверить, что это согласуется с (13.34) — (13.35).

Если $F(\kappa) \sim F_n \kappa^n$, n — некоторое целое число, при $\kappa \rightarrow 0$, то решение (13.40) можно выразить через η_f , взяв соответствующее число производных по x , если $n > 0$, или соответствующее число интегралов по x , если $n < 0$. Например, решение для ступеньки

$$\eta_0(x) = \begin{cases} 0, & x > 0, \\ 1, & x < 0 \end{cases}$$

имеет асимптотику

$$\eta \sim \int_x^\infty \eta_f(x) dx = \frac{1}{2} \int_z^\infty \text{Ai}(s) ds, \quad (13.44)$$

$$z = \frac{x - c_0 t}{(3\gamma t)^{1/3}}.$$

Функция Эйри обладает следующим свойством:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{Ai}(s) ds = 1.$$

Множитель $1/2$ появляется в формулах (13.42) и (13.44) потому, что они описывают только волны, движущиеся вправо; учет волн, движущихся влево, обеспечивает выполнение полного начального условия.

Эти асимптотические представления можно вывести проще, заметив, что дисперсионное соотношение (13.38) соответствует уравнению

$$\eta_t + c_0 \eta_x + \gamma \eta_{xxx} = 0. \quad (13.45)$$

Мы решаем это уравнение для $\eta_0(x) = \frac{1}{2} \delta(x)$ в (13.42) и для $\eta_0(x) = \frac{1}{2} H(-x)$ в (13.44). Решения принадлежат к семейству автомодельных решений

$$\eta = (3\gamma t)^{-m} f_m(z), \quad z = \frac{(x - c_0 t)}{(3\gamma t)^{1/3}}. \quad (13.46)$$

После подстановки функцию $f_m(z)$ легко связать с уравнением Эйри

$$\text{Ai}''(z) = z \text{Ai}(z) \quad (13.47)$$

и построить решения.

Уравнение (13.45) является линеаризованным уравнением Кортевега — де Фриза, которое будет играть важную роль ниже. Можно отметить, что для любого дисперсионного соотношения с разложением вида (13.38) длинные волны в линейной теории описываются уравнением (13.45) и применимы решения (13.42) и (13.44).

Можно указать также на одно ограничение применимости линейной теории. В формуле (13.42) амплитуды первых нескольких гребней убывают как $t^{-1/3}$, в то время как дисперсионные эффекты (пропорциональные квадрату длины волны) убывают как $t^{-2/3}$. Таким образом, в окончательной стадии нелинейные эффекты постепенно становятся столь же важными, что и дисперсия.

При соответствующих условиях существуют промежуточная область, в которой применима асимптотическая линейная теория. Из-за нелинейных эффектов в уравнение (13.45) должен войти дополнительный член, пропорциональный $\eta\eta_x$. При этом уравнение превращается в полное уравнение Кортевега — де Фриза, и мы увидим впоследствии, что затухание со временем прекращается и образуется ряд уединенных волн. Неравномерность приближения линейной теории вблизи фронта волнового пакета аналогична общей ситуации для гиперболических уравнений, рассмотренной в гл. 2.

13.7. Волны на поверхности раздела между двумя жидкостями

Рассмотренная выше теория игнорирует изменения давления над поверхностью воды, связанные с движением воздуха. Здесь мы подтвердим это предположение на типичном примере. Рассуждения можно с пользой объединить с рассмотрением других эффектов на поверхности раздела между двумя жидкостями, включая случай сравнимых плотностей. Пусть жидкость с плотностью ρ' расположена над жидкостью с плотностью ρ , и пусть для простоты обе жидкости имеют бесконечную глубину. Течения безвихревые

с потенциалами Φ' и Φ соответственно, и поверхность раздела описывается уравнением $y = \eta$. Давления в жидкостях удовлетворяют соотношениям

$$p' - p_0 = -\rho' \left\{ \Phi'_t + \frac{1}{2} (\nabla \Phi')^2 + gy \right\},$$

$$p - p_0 = -\rho \left\{ \Phi_t + \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 + gy \right\}.$$

где p_0 — общее невозмущенное давление, а условия на свободной поверхности имеют вид

$$\left. \begin{aligned} p' &= p, \\ \eta_t + \Phi'_{x_1} \eta_{x_1} + \Phi'_{x_2} \eta_{x_2} - \Phi'_y &= 0, \\ \eta_t + \Phi_{x_1} \eta_{x_1} + \Phi_{x_2} \eta_{x_2} - \Phi_y &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ при } y = \eta$$

Интересно рассмотреть возмущения стационарных течений со скоростями U' , U в обеих жидкостях. Рассматривая только одномерные волны и линеаризуя граничные условия, полагаем

$$\Phi' = U'x - \frac{1}{2} U'^2 t + \Phi', \quad \Phi = Ux - \frac{1}{2} U^2 t + \Phi$$

и сохраняем только члены первого порядка по Φ' , Φ и η . Граничные условия переходят в следующие:

$$\left. \begin{aligned} \rho' (\Phi'_t + U' \Phi'_x + g\eta) &= \rho (\Phi_t + U \Phi_x + g\eta), \\ \eta_t + U' \eta_x - \Phi'_y &= 0, \\ \eta_t + U \eta_x - \Phi_y &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ при } y = 0. \quad (13.48)$$

Поскольку функции Φ' и Φ удовлетворяют уравнению Лапласа и стремятся к нулю при $y \rightarrow +\infty$, $y \rightarrow -\infty$ соответственно, элементарные решения имеют вид

$$\begin{aligned} \Phi' &= B' e^{i(\kappa x - \omega t) - \kappa y}, & \Phi &= B e^{i(\kappa x - \omega t) + \kappa y}, \\ \eta &= A e^{i(\kappa x - \omega t)}. \end{aligned}$$

Тогда граничные условия (13.48) дают дисперсионное соотношение

$$\frac{\omega}{\kappa} = \frac{\rho U + \rho' U'}{\rho + \rho'} \pm \left\{ \frac{g}{\kappa} \frac{\rho - \rho'}{\rho + \rho'} - \frac{\rho \rho'}{(\rho + \rho')^2} (U - U')^2 \right\}^{1/2}. \quad (13.49)$$

Для случая $U = U' = 0$ находим, что

$$\omega = \left\{ g \kappa \left(\frac{\rho - \rho'}{\rho + \rho'} \right) \right\}^{1/2}.$$

Этот результат в пределе при $\rho'/\rho \rightarrow 0$ подтверждает элементарное решение, в котором не учитывается движение воздуха, и дает малую поправку.

Интересно, однако, что, когда ω имеет мнимую часть, полученные выражения свидетельствуют о различных случаях неустойчивости. Можно выделить следующие случаи.

1. $U = U' = 0$. Этот случай неустойчив, если $\rho' > \rho$, как и следовало ожидать.

2. $g = 0$, $U \neq U'$. Этот случай всегда неустойчив (неустойчивость Гельмгольца).

3. $\rho = \rho'$, $U \neq U'$. Этот случай аналогичен случаю 2, поскольку гравитационные эффекты могут возникать только при различных плотностях.

4. $\rho \neq \rho'$, $U \neq U'$. Решение всегда неустойчиво для достаточно коротких волн, но этот результат можно уточнить, учитывая стабилизирующее влияние поверхностного натяжения для самых коротких волн. Эффекты поверхностного натяжения легко включить в рассмотрение при помощи соответствующего граничного условия.

13.8. Поверхностное натяжение

Поверхностное натяжение действует подобно растянутой мембране на поверхности воды. Для малых отклонений $y = \eta(x_1, x_2, t)$ от плоской поверхности это суммарное действие сводится к нормальной силе $T\eta_{x_i x_i}$ на единицу площади. Когда этот эффект учитывается, то условие для давления на поверхности принимает вид

$$p + T\eta_{x_i x_i} = p_0 \quad (13.50)$$

и линеаризованные условия (13.21) записываются так:

$$\eta_t = \Phi_y, \quad \Phi_t + g\eta - \frac{T}{\rho} \eta_{x_i x_i} = 0 \quad \text{при } y = 0. \quad (13.51)$$

Функциональные зависимости для η и Φ такие же, как и прежде, но пересмотренные граничные условия на поверхности приводят к дисперсионному соотношению

$$\omega^2 = g\kappa \operatorname{th} \kappa h_0 \left(1 + \frac{T}{\rho g} \kappa^2 \right). \quad (13.52)$$

Дисперсионные соотношения такого вида уже обсуждались выше (см. гл. 12).

Как было указано, групповая скорость достигает минимального значения при $\kappa = k_m$. В точке минимума $W''(k_m) = 0$, и опять существует переходная область, в которой выражение (13.34) неприменимо. Поведение решения в этой переходной области можно выяснить способом, аналогичным использованному в § 13.6. Разложение

$$W = W(k_m) + (\kappa - k_m)W'(k_m) + \frac{1}{3!}(\kappa - k_m)^3 W'''(k_m) + \dots$$

подставляется в полученное при помощи преобразования Фурье решение, и результат выражается через функцию Эйри. Детали приведены, например, в книге Джеффриса и Джеффрис (Свирлс) [1, § 17.09].

13.9. Волны на поверхности стационарного потока

Геометрия различных стационарных волновых движений была найдена в гл. 12. Изменения амплитуды вдоль каждой групповой линии можно определить, основываясь на общих концепциях групповой скорости. Однако, как указывалось выше, исходное распределение амплитуды вдоль различных групповых линий можно получить только из более полного решения. Теперь мы изучим полученное при помощи преобразования Фурье решение для случая однородного потока, покажем, как простое кинематическое описание связывается с полным решением и определим амплитуды. Мы будем рассматривать источник возмущений не как заданное исходное смещение, а как стационарное внешнее давление, приложенное к поверхности потока, поскольку это точнее описывает влияние плавающего тела.

При решении задач о стационарных волнах при помощи преобразования Фурье следует соблюдать осторожность при выборе подходящего условия излучения для обеспечения единственности. Интересно проследить, как условие излучения в данном контексте сопоставляется с использованием понятия групповой скорости при определении места появления волн. Неединственность возникает вследствие искусственности предположения о стационарности потока, поскольку течение не могло существовать всегда.

В принципе идеальный способ избежать этого — решать более реальную нестационарную задачу с подходящими начальными условиями, приложенными в некоторый конечный момент времени в прошлом, скажем при $t = -t_0$, а затем в полученном решении положить $t_0 \rightarrow \infty$. Однако эта программа может оказаться трудно выполнимой и перегруженной многочисленными излишними деталями, не входящими в окончательный ответ. Упрощенный вариант условия излучения в принципе следует этой идее и в то же время требует минимального обобщения задачи. В данном случае будем считать, что внешнее давление на поверхности $y = 0$ задано формулой

$$\frac{p - p_0}{\rho} = f(x_1, x_2) e^{\varepsilon t}, \quad \varepsilon > 0. \quad (13.53)$$

Это отвечает источнику, интенсивность которого практически равна нулю при t , близком к $-\infty$, а затем нарастает и в рассматриваемом интервале времени близка к $f(x_1, x_2)$. Такая кон-

струкция обладает желаемыми свойствами задачи с разумными начальными условиями и в то же время сохраняет простую зависимость от времени. После того как задача решена, мы перейдем к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ и получим стационарное решение.

Граничные условия (13.12) модифицируются. Во-первых, на поверхности задается распределение давления, и, во-вторых, учитывается вклад поверхностного натяжения. Как мы видели в § 12.3, последнее приводит к особенно интересным последствиям при возникновении волн, распространяющихся вверх по течению. Для малых возмущений основного потока U в x_1 -направлении потенциал скорости берется равным

$$\Phi = Ux_1 - \frac{\eta^2}{2} U^2 t + \Phi, \quad (13.54)$$

где $\nabla\Phi$ мало по сравнению с U . Тогда линеаризованные граничные условия на свободной поверхности принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \eta_t + U\eta_{x_1} - \Phi_y &= 0, \\ \Phi_t + U\Phi_{x_1} + g\eta - \frac{T}{\rho} \eta_{x_i x_i} &= -f(x) e^{et} \end{aligned} \right\} \text{ при } y=0. \quad (13.55)$$

Потенциал возмущения Φ по-прежнему удовлетворяет уравнению Лапласа; для простоты мы будем рассматривать случай бесконечной глубины, так что $\Phi \rightarrow 0$ при $y \rightarrow -\infty$. Решение в виде интеграла Фурье, удовлетворяющее двум последним условиям и меняющееся как e^{et} , представляется формулами:

$$\begin{aligned} \Phi &= e^{et} \int_{-\infty}^{\infty} B_1(\kappa) e^{i\kappa \cdot x + \kappa y} d\kappa, \quad \kappa = |\kappa|, \\ \eta &= e^{et} \int_{-\infty}^{\infty} A(\kappa) e^{i\kappa \cdot x} d\kappa. \end{aligned}$$

Далее, граничные условия (13.55) связывают A и B друг с другом и с преобразованием Фурье $F(\kappa)$ функции $f(x)$. Результат имеет вид

$$\eta(x, t) = e^{et} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\kappa F(\kappa) e^{i\kappa \cdot x} d\kappa}{(\kappa_1 U - i\varepsilon)^2 - \omega_0^2(\kappa)}, \quad (13.56)$$

где

$$\omega_0^2 = g\kappa + \frac{T}{\rho} \kappa^3 \quad (13.57)$$

— дисперсионное соотношение для волн, распространяющихся в спокойную воду.

Теперь можно понять роль числа ε . При $\varepsilon = 0$ на контуре интегрирования находятся полюсы, определяемые уравнением

$$\kappa_1^2 U^2 - \omega_0^2(\kappa) = 0. \quad (13.58)$$

Контур интегрирования должен с той или другой стороны обходить каждый полюс, но свобода выбора привела бы к неединственности. При $\varepsilon > 0$ корни знаменателя в (13.56) комплексны; полюсы сдвинуты с пути интегрирования, и неопределенность не возникает. Даст ли полюс вклад или нет, зависит тогда от дальнейшей деформации контура интегрирования и определяется конкретным выбором обхода вокруг полюса. Значения вектора κ , удовлетворяющие уравнению (13.58), определяют, какие значения вектора κ могут дать существенный вклад; положение полюса (выше контура интегрирования или ниже его) определяет, где будет иметь место этот вклад.

Условие (13.58), по существу, совпадает с условием (12.23) (или с условием (12.24) при $\omega = 0$), выделяющим в данном потоке стационарные волны, дающие большой вклад. Анализ, показывающий, следует ли включать данный полюс, соответствует определению положения этих волн при помощи понятия групповой скорости.

Одномерные гравитационные волны

Для простоты рассмотрим сначала одномерный случай и пренебрежем поверхностным натяжением. Тогда вместо (13.56) имеем

$$\eta(x, t) = e^{et} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\kappa F(\kappa_1) e^{i\kappa_1 x_1}}{(\kappa_1 U - i\varepsilon)^2 - g\kappa} d\kappa_1, \quad \kappa = |\kappa_1|. \quad (13.59)$$

Появление $\kappa = |\kappa_1|$ следует специально отметить; оно связано с тем, что в преобразовании фигурируют как положительные, так и отрицательные значения κ_1 , и для того чтобы выполнялось условие $\Phi \rightarrow 0$ при $y \rightarrow -\infty$. в одномерном случае экспонента в выражении для Φ должна быть равной

$$\exp(i\kappa_1 x_1 + |\kappa_1| y).$$

При исследовании интеграла (13.59) мы рассмотрим частный случай $f(x_1) = P\delta(x_1)$, $F(\kappa_1) = P/(2\pi)$, к которому в некотором смысле сводится и общий случай. При этом

$$\eta(x, t) = \frac{Pe^{et}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\kappa e^{i\kappa_1 x_1} d\kappa_1}{(\kappa_1 U - i\varepsilon)^2 - g\kappa}.$$

Поскольку в интеграл входит $\kappa = |\kappa_1|$, этот интеграл удобно разбить на два: для $\kappa_1 > 0$ и для $\kappa_1 < 0$, и в каждом из них исполь-

зовать κ в качестве переменной интегрирования. Тогда

$$\frac{2\pi\eta}{P} = e^{\varepsilon t} \int_0^{\infty} \frac{\kappa e^{i\kappa x_1} d\kappa}{(\kappa U - i\varepsilon)^2 - g\kappa} + e^{\varepsilon t} \int_0^{\infty} \frac{\kappa e^{-i\kappa x_1} d\kappa}{(\kappa U + i\varepsilon)^2 - g\kappa}.$$

Поскольку в окончательном ответе $\varepsilon \rightarrow 0$, членом с ε^2 в знаменателях можно пренебречь, а множитель $e^{\varepsilon t}$, который теперь уже сыграл свою роль, можно опустить. Имеем

$$\frac{2\pi\eta}{P} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_0^{\infty} \frac{e^{i\kappa x_1} d\kappa}{\kappa U^2 - 2i\varepsilon U - g} + \int_0^{\infty} \frac{e^{-i\kappa x_1} d\kappa}{\kappa U^2 + 2i\varepsilon U - g} \right). \quad (13.60)$$

Полюсы подынтегральных выражений находятся в точках

$$\kappa = \frac{g}{U^2} + \frac{2i\varepsilon}{U}, \quad \kappa = \frac{g}{U^2} - \frac{2i\varepsilon}{U}$$

соответственно. Контуры интегрирования можно повернуть так, чтобы они совпали либо с положительной, либо с отрицательной мнимой полуосью. Для $x_1 > 0$ контур интегрирования в первом слагаемом можно совместить с положительной мнимой полуосью, а контур интегрирования во втором — с отрицательной мнимой полуосью; оба полюса дают вклад. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{U^2\eta}{P} &= \frac{i}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-mx_1} dm}{im - k} + ie^{ikx_1} + \frac{i}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-mx_1} dm}{im + k} - ie^{-ikx_1} = \\ &= -2 \sin kx_1 + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{m}{m^2 + k^2} e^{-mx_1} dm, \quad x_1 > 0, \end{aligned} \quad (13.61)$$

где

$$k = \frac{g}{U^2}. \quad (13.62)$$

Для $x_1 < 0$ контуры интегрирования можно повернуть в противоположных направлениях, и полюсы не дают вклада:

$$\frac{U^2\eta}{P} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{m}{m^2 + k^2} e^{mx_1} dm, \quad x_1 < 0. \quad (13.63)$$

Соотношение (13.62), которое можно записать также в виде

$$U = \sqrt{\frac{g}{k}} = c(k),$$

определяет волновое число k для тех волн, которые могут находиться в стационарном состоянии в набегающем потоке. Поскольку $\sin kx_1$ удовлетворяет условиям задачи о стационарной свободной

поверхности для всех x_1 , условие излучения является решающим при доказательстве того, что такие стоячие волны появляются только вниз по течению ($x_1 > 0$) от приложенного возмущения давления. Интегралы (13.61) и (13.63) необходимы в полном решении, но становятся малыми при $|x_1| \gg 1$. Асимптотические представления этих интегралов получаются формальным разложением выражения $(m^2 + k^2)^{-1}$ по возрастающим степеням m^2 и почленным интегрированием полученного ряда. Эта процедура дает

$$\int_0^{\infty} \frac{me^{-m|x_1|}}{m^2 + k^2} dm \sim \frac{1}{k^2 x_1^2} - \frac{3!}{k^4 x_1^4} + \frac{5!}{k^6 x_1^6} - \dots$$

Окончательный вывод состоит в том, что стоячие волны вдали от источника возникают *только вниз по течению*, причем они имеют вид

$$\eta = -\frac{2P}{U^2} \sin kx_1, \quad k = \frac{g}{U^2}. \quad (13.64)$$

Одномерные волны с учетом поверхностного натяжения

Когда учитывается поверхностное натяжение, выражение (13.60) переходит в следующее:

$$\frac{2\pi\eta}{P} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{e^{i\kappa x_1} d\kappa}{\kappa U^2 - 2i\varepsilon U - g - (T/\rho) \kappa^2} + \int_0^{\infty} \frac{e^{-i\kappa x_1} d\kappa}{\kappa U^2 + 2i\varepsilon U - g - (T/\rho) \kappa^2} \right\}. \quad (13.65)$$

Полюсы близки к корням уравнения

$$kU^2 = g + \frac{T}{\rho} k^2; \quad (13.66)$$

это опять совпадает с условием

$$U = c(k),$$

использованным в (12.20) при определении того, какие волны не сносятся течением.

При $U < c_m$, где c_m — минимальная волновая скорость, уравнение (13.66) не имеет вещественных корней. Следовательно, в интегралах (13.65) нет полюсов, близких к вещественной оси, все вклады подынтегральных выражений быстро убывают с ростом x_1 , и стоячие волны отсутствуют. Это согласуется с выводом, полученным в § 12.3.

При $U > c_m$ уравнение (13.66) имеет два вещественных корня и они совпадают с величинами k_g и k_T , введенными в формулах

(12.21) — (12.22), причем $k_T > k_g$. В этом случае интегралы в (13.65) имеют полюсы, близкие к k_g и k_T . Они расположены в точках

$$\kappa = k_g + \frac{2\rho U}{(k_T - k_g)T} i\varepsilon, \quad \kappa = k_T - \frac{2\rho U}{(k_T - k_g)T} i\varepsilon$$

для первого интеграла и в сопряженных точках для второго интеграла. При $x_1 > 0$ первый интеграл можно вычислить вдоль положительной мнимой полуоси, причем вклад дает только гравитационный полюс около k_g . Второй интеграл вычисляется вдоль отрицательной мнимой полуоси, причем вклад дает другой гравитационный полюс. Таким образом, вниз по течению от источника появляются гравитационные волны. Аналогичным образом при $x_1 < 0$ повороты следует делать в противоположных направлениях и вклад дают капиллярные полюсы.

Эти выводы согласуются с полученными при помощи понятия групповой скорости результатами (12.21) — (12.22): гравитационные волны вниз по течению и капиллярные волны вверх по течению. Асимптотика волновых пакетов такова:

$$\eta \sim \begin{cases} \frac{-2P\rho}{(k_T - k_g)T} \sin k_g x_1, & x_1 > 0, \\ \frac{-2P\rho}{(k_T - k_g)T} \sin k_T x_1, & x_1 < 0. \end{cases}$$

Корабельные волны

Для двумерной задачи о гравитационных волнах, создаваемых точечным источником $f(x_1, x_2) = P\delta(x_1, x_2)$, в интеграле (13.56) следует положить $F(\kappa) = P/(4\pi^2)$ и $\omega_0^2 = g\kappa$. Тогда (13.56) дает

$$\frac{4\pi^2 U^2 \eta}{P} = e^{et} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\kappa \exp\{i(\kappa_1 x_1 + \kappa_2 x_2)\}}{(\kappa_1 - i\varepsilon/U)^2 - g\kappa/U^2} d\kappa_1 d\kappa_2, \quad (13.67)$$

где $\kappa = (\kappa_1^2 + \kappa_2^2)^{1/2}$. Удобно ввести полярные координаты

$$x_1 = r \cos \xi, \quad x_2 = r \sin \xi,$$

$$\kappa_1 = -\kappa \cos \chi, \quad \kappa_2 = \kappa \sin \chi.$$

Вклад от области $\pi/2 < \chi < 3\pi/2$ комплексно сопряжен с вкладом от области $-\pi/2 < \chi < \pi/2$ и в пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$ (13.67) принимает вид

$$\frac{2\pi^2 U^2 \eta}{P} = \operatorname{Re} \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\chi}{\cos^2 \chi} \int_0^{\infty} \frac{\kappa \exp\{-i\kappa r \cos(\xi + \chi)\}}{\kappa - \kappa_0} d\kappa \right), \quad (13.68)$$

где

$$\kappa_0 = \frac{g}{U^2 \cos^2 \chi} - \frac{2i\varepsilon}{U \cos \chi}. \quad (13.69)$$

Поскольку $\cos \chi > 0$, полюс $\kappa = \kappa_0$ лежит в нижней половине комплексной κ -плоскости.

Картина симметрична относительно оси x_1 , так что достаточно рассмотреть интервал $0 < \xi < \pi$. Когда $\cos(\xi + \chi) > 0$, т. е. $-\pi/2 < \chi < \pi/2 - \xi$, контур интегрирования в κ -плоскости можно направить вдоль отрицательной мнимой полуоси и полюс дает вклад; когда $\cos(\xi + \chi) < 0$, т. е. $\pi/2 - \xi < \chi < \pi/2$, его можно направить вдоль положительной мнимой полуоси и полюс вклада не дает.

Дальнейшие вычисления становятся довольно громоздкими, если стараться аккуратно следить за всеми членами. Здесь мы укажем вклад полюса и прокомментируем остальные члены. Вклад полюса составляет

$$\eta \sim \frac{gP}{\pi U^4} \operatorname{Im} \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2-\xi} \frac{\exp \{-i\kappa_0 r \cos(\xi + \chi)\}}{\cos^4 \chi} d\chi \right),$$

где в κ_0 теперь можно опустить член с ε . Функция

$$s(\chi) = \kappa_0 \cos(\xi + \chi) = \frac{g \cos(\xi + \chi)}{U^2 \cos^2 \chi}$$

имеет стационарную точку при $\chi = \psi$, где

$$\operatorname{tg}(\xi + \psi) = 2 \operatorname{tg} \psi. \quad (13.70)$$

При помощи стандартной формулы метода стационарной фазы находим, что

$$\eta \sim \frac{gP}{\pi U^4} \operatorname{Im} \left[\left(\frac{2\pi}{r |s''(\psi)|} \right)^{1/2} \exp \left\{ -irs(\psi) - \frac{\pi i}{4} \operatorname{sgn} s''(\psi) \right\} \right].$$

После некоторых упрощений это дает

$$\eta \sim - \left(\frac{2g}{\pi r} \right)^{1/2} \frac{P}{U^3 \cos^3 \psi} \frac{(1 + 4 \operatorname{tg}^2 \psi)^{1/4}}{|1 - 2 \operatorname{tg}^2 \psi|^{1/2}} \times \\ \times \sin \left\{ kr \cos(\xi + \psi) + \frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} s''(\psi) \right\}, \quad (13.71)$$

где

$$k = \kappa_0(\psi) = \frac{g}{U^2 \cos^2 \psi} \quad (13.72)$$

и $\psi(\xi)$ определяется из (13.70).

Определение волнового числа k и ψ из (13.70) и (13.72) согласуется с (12.32); фаза $kr \cos(\xi + \psi)$ согласуется с (12.35). Амплитуда имеет особенность при $\xi = \xi_m = 19,5^\circ$, где $\operatorname{tg} \psi = 2^{-1/2}$. Именно здесь сливаются, образуя заострение, боковой и поперечный гребни, что соответствует слиянию двух стационарных точек, определяемых уравнением (13.70). Поскольку $s''(\psi) \rightarrow 0$, имеем

переходную область того же общего типа, что и в § 13.6. Скачок фазы на сторонах угла $\xi = \pm \xi_m$ равен $\pi/2$. Сингулярное поведение на оси x_1 , где $\psi \rightarrow 0$, связано с предположением о точечном характере возмущения. Сингулярные области подробно изучены Урселлом [1].

Нелинейная теория

13.10. Теория мелкой воды; длинные волны

Для гравитационных волн с $\kappa h_0 \rightarrow 0$ дисперсионное соотношение принимает вид

$$\omega^2 \sim g h_0 \kappa^2 \quad (13.73)$$

и фазовая скорость $c_0 = \sqrt{g h_0}$ становится независимой от κ . Дисперсионные эффекты при этом пропадают, и в одномерном случае преобразование Фурье дает

$$\begin{aligned} \eta &= \int_{-\infty}^{\infty} F(\kappa) e^{i\kappa(x-c_0 t)} d\kappa + \int_{-\infty}^{\infty} G(\kappa) e^{i\kappa(x+c_0 t)} d\kappa = \\ &= f(x-c_0 t) + g(x+c_0 t), \end{aligned}$$

т. е. общее решение линейного волнового уравнения

$$\eta_{tt} - c_0^2 \eta_{xx} = 0. \quad (13.74)$$

Ясно, что должен существовать прямой способ вывода этого уравнения из полных уравнений, и фактически он уже был дан в более общей постановке в § 3.2. Там при изучении речных волн были учтены нелинейность и трение. Здесь мы пренебрегаем эффектами трения, но учитываем нелинейность.

Прежде всего вспомним предыдущий вывод. Ключевой момент состоит в том, что проекция уравнения сохранения импульса (13.2) на вертикаль аппроксимируется уравнением

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - g = 0.$$

Тогда

$$p - p_0 = \rho g (\eta - y). \quad (13.75)$$

Проекция уравнения (13.2) на горизонтальные оси имеют вид

$$-\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + v \frac{\partial u_i}{\partial y} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \quad (13.76)$$

(теперь мы используем смешанные обозначения $\mathbf{u} = (u_1, u_2, v)$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, y)$, так что $i = 1, 2$, и суммирование в (13.76) прово-

дится по $j \neq 1, 2$). Поскольку правая часть не зависит от y , скорость изменения u_i вдоль траектории частицы не зависит от y . Поэтому, если u_i первоначально не зависит от y , то это справедливо и для всех последующих моментов времени. Будем считать, что это выполняется; тогда уравнения (13.76) записываются так:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + g \frac{\partial \eta}{\partial x_i} = 0. \quad (13.77)$$

Хотя в соотношении (13.75) мы пренебрегли вертикальным ускорением по сравнению с оставшимися членами, нет оснований пренебрегать членом $\partial v / \partial y$ в (13.1). Однако мы можем использовать проинтегрированную форму уравнения (13.1), которая должна дать уравнение сохранения

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (h u_i) = 0, \quad (13.78)$$

где

$$h = h_0 + \eta$$

представляет собой полную глубину от $y = -h_0$ у дна до $y = \eta$ у поверхности. Подробнее:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-h_0}^{\eta} \left\{ \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial v}{\partial y} \right\} dy = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{-h_0}^{\eta} u_i dy + [v]_{y=-h_0}^{y=\eta} - [u_i]_{y=\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} - [u_i]_{y=h_0} \frac{\partial h_0}{\partial x_i}; \end{aligned}$$

в силу граничных условий (13.11) и (13.13), это сводится к следующему:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \int_{-h_0}^{\eta} u_i dy + \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0.$$

Поскольку в этом приближении u_i не зависит от y и $\eta_t = h_t$, отсюда следует (13.78). Уравнения (13.77) и (13.78) для $\eta(x, t)$ и $u(x, t)$ называются уравнениями мелкой воды. (Уравнения (3.37) получаются отсюда, если (13.77) переписать в виде $g \partial \eta / \partial x = g \partial h / \partial x - g S$, где $S = \partial h_0 / \partial x$ — уклон дна, и добавить член, описывающий трение.)

Легко оценить порядок величин в сделанном приближении. Ошибка для p в (13.75) имеет порядок $\rho h_0 v_t$, и, в силу (13.1), $v \approx \approx -h_0 u_x$. Поэтому относительная ошибка в (13.77) имеет порядок

$$\frac{-p_x}{\rho u_t} \approx \frac{h_0^2 u_{xxt}}{u_t} \approx \frac{h_0^2}{l^2},$$

где l — характерная длина волны в x -направлении. Это согласуется с приближением $(\kappa h_0)^2 \ll 1$, использованным при выводе (13.73). Таким образом, уравнения (13.77) — (13.78) дают замкнутую нелинейную систему для сравнительно мелкой воды, или, эквивалентно, для сравнительно длинных волн. Эффекты дисперсии в этом приближении отсутствуют. В следующем параграфе уравнения мелкой воды будут выведены в качестве первых членов разложений по $(h_0/l)^2$, малые дисперсионные эффекты будут включены при переходе к следующему порядку.

Линеаризованные уравнения приводят к (13.74), но, используя теорию части I, можно получить нелинейные решения, поскольку система является гиперболической. В частности, для одномерных волн над горизонтальным дном можно положить

$$\begin{aligned} h_t + (uh)_x &= 0, \\ u_t + uu_x + gh_x &= 0. \end{aligned} \quad (13.79)$$

Характеристические скорости равны $u \pm \sqrt{gh}$, инварианты Римана равны $u \pm 2\sqrt{gh}$, и простые волны, движущиеся вправо в невозмущенную область, где $h = h_0$, определяются равенствами

$$\begin{aligned} h &= H(\xi), \quad u = 2\sqrt{gH} - 2\sqrt{gh_0}, \\ x &= \xi + \{3\sqrt{gH(\xi)} - 2\sqrt{gh_0}\}t. \end{aligned} \quad (13.80)$$

Все такие волны, несущие возрастание уровня, опрокидываются. Поэтому приходится вводить разрывы, причем условия на разрыве, выведенные из уравнений сохранения (13.79), имеют вид

$$\begin{aligned} -U[uh] + \left[u^2h + \frac{1}{2}gh^2 \right] &= 0, \\ -U[h] + [uh] &= 0, \end{aligned} \quad (13.81)$$

как отмечено в (3.53) и (3.54). Это так называемая турбулентная бора.

Явление опрокидывания является одной из наиболее интригующих задач теории волн на воде. Прежде всего, когда градиенты перестают быть малыми, приближение h_0^2/l^2 перестает быть справедливым, так что решение (13.80) должно стать некорректным задолго до начала опрокидывания. Однако опрокидывание, несомненно, происходит, и при некоторых условиях оно, по-видимому, незначительно отличается от описания, заданного формулами (13.80). Более того, боры, буруны и гидравлические прыжки иногда довольно хорошо описываются соотношениями (13.81).

Но теория мелкой воды заходит слишком далеко: она предсказывает, что все волны, несущие возрастание уровня, опрокидываются. Наблюдения уже давно установили, что некоторые волны

не опрокидываются. Таким образом, некорректная теория иногда оказывается верной, а иногда неверной! Нетрудно усмотреть, как отброшенные дисперсионные эффекты подавляют опрокидывание, но простые теории, частично включающие эти эффекты (см. следующий параграф), в свою очередь заходят слишком далеко и утверждают, что волны вообще не опрокидываются! Дальнейшую дискуссию мы отложим до более детального учета дисперсии. Однако до этого мы приведем некоторые результаты теории мелкой воды.

Задача о разрушении плотины

Прежде всего заметим, что классическое решение задачи о разрушении плотины не содержит боры (что весьма странно) и может

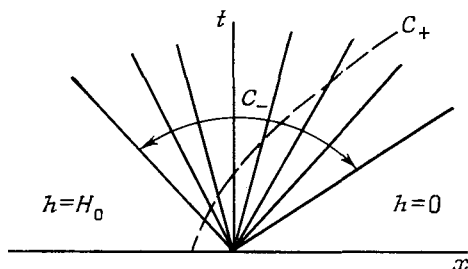


Рис. 13.3. Характеристики для задачи о разрушении плотины.

быть легко найдено при помощи теории простых волн. Начальные условия задачи записываются так:

$$\left. \begin{aligned} u &= 0, & -\infty < x < \infty, \\ h &= 0, & 0 < x < \infty, \\ h &= H_0 > 0, & -\infty < x < 0 \end{aligned} \right\} \text{ при } t = 0.$$

Тогда на каждой положительной характеристике C_+ , выходящей из области $h = H_0$ (см. рис. 13.3), инвариант Римана имеет величину

$$u + 2\sqrt{gh} = 2\sqrt{gH_0}. \quad (13.82)$$

В области, покрываемой этими характеристиками, решение имеет вид простой волны с веером характеристик C_- , проходящих через начало координат и определяемых уравнением

$$\frac{x}{t} = u - \sqrt{gh}. \quad (13.83)$$

Но равенства (13.82) и (13.83) дают полное решение:

$$\left. \begin{aligned} V\overline{gh} &= \frac{1}{3} \left(2\sqrt{gH_0} - \frac{x}{t} \right), \\ u &= \frac{2}{3} \left(\sqrt{gH_0} + \frac{x}{t} \right) \end{aligned} \right\} -\sqrt{gH_0} \leq \frac{x}{t} \leq 2\sqrt{gH_0}. \quad (13.84)$$

Между фронтом $h = 0$, $x = 2t\sqrt{gH_0}$, перемещающимся со скоростью $2\sqrt{gH_0}$, и невозмущенным уровнем плотины $h = H_0$ при $x = -t\sqrt{gH_0}$ свободная поверхность имеет параболическую форму.

Теория мелкой воды, строго говоря, не справедлива в начальной стадии, поскольку характерная длина по горизонтали l мала, но по мере развития течения величина H_0^2/l^2 становится малой и реальное течение описывается довольно хорошо. Следует отметить, что $h = 4H_0/9$, $u = 2\sqrt{gH_0}/3$ остаются постоянными в месте расположения плотины $x = 0$ для всех $t > 0$. Скорость фронта существенно изменяется трением; попытки оценить это изменение предприняты Дресслером [2] и Уиземом [4].

Условия на боре

Условия на боре (13.81) означают сохранение массы и импульса при переходе через бору, и естественно спросить, что происходит при этом с энергией. Закон сохранения энергии для уравнений (13.79) записывается в виде

$$\left(\frac{1}{2} u^2 h + \frac{1}{2} g h^2 \right)_t + \left(\frac{1}{2} u^3 h + u g h^2 \right)_x = 0. \quad (13.85)$$

Это уравнение могло бы дать дополнительно третье условие на скачке, но с системой (13.79) можно использовать только два условия. Рэлей предположил, что при переходе через бору энергия в действительности не сохраняется, и приписал потерю наблюдаемой турбулентности, так что условие на разрыве, соответствующее уравнению (13.85), учитывать не следует. Легко показать, что, хотя уравнение (13.79) влечет уравнение (13.85), однако из условия на разрыве (13.81) следует, что

$$\left[\frac{1}{2} u^3 h + u g h^2 \right]_1^2 - U \left[\frac{1}{2} u^2 h + \frac{1}{2} g h^2 \right]_1^2 < 0 \quad \text{при } h_2 > h_1. \quad (13.86)$$

Поскольку бору возникают только тогда, когда $h_2 > h_1$, именно *потеря* энергии согласуется со знаком выражения (13.86). Энергия играет роль, аналогичную роли энтропии в газовой динамике; в газовой динамике вся внутренняя энергия включена в подробное описание, так что энергия *сохраняется*, и дополнительная переменная в описании допускает дополнительное условие на разрыве. Турбулентная энергия в (13.85) не включена.

Условия на боре (13.81) можно переписать в следующей удобной форме:

$$U = u_1 + \left\{ \frac{gh_2(h_1 + h_2)}{2h_1} \right\}^{1/2}, \quad (13.87)$$

$$u_2 = u_1 + \frac{h_2 - h_1}{h_2} \left\{ \frac{gh_2(h_1 + h_2)}{2h_1} \right\}^{1/2}. \quad (13.88)$$

Дальнейшие законы сохранения

Интересно, что уравнения мелкой воды (13.79) допускают бесконечное число законов сохранения общего вида

$$\frac{\partial}{\partial t} P(u, h) + \frac{\partial}{\partial x} Q(u, h) = 0,$$

необходимо лишь, чтобы выполнялись условия

$$Q_u = uP_u + hP_h, \quad Q_h = gP_u + uP_h.$$

Таким образом, любое решение уравнения

$$gP_{uu} = hP_{hh}$$

приводит к закону сохранения. Наиболее интересны полиномиальные по u и h решения. Их можно последовательно получить, полагая

$$P = \sum_{m=0}^n p_m(u) h^m;$$

тогда

$$gp''_{m-1} = m(m-1)p_m, \quad m = 2, \dots, n,$$

$$p''_0 = 0, \quad p''_n = 0.$$

Первые несколько решений имеют вид

P	Q
u	$\frac{1}{2} u^2 + gh$
h	uh
uh	$u^2h + \frac{1}{2} gh^2$
$\frac{1}{2} u^2h + \frac{1}{2} gh^2$	$\frac{1}{2} u^3h + ugh^2$
$\frac{1}{3} u^3h + ugh^2$	$\frac{1}{3} u^4h + \frac{3}{2} u^2gh^2 + \frac{1}{3} g^2h^3$

Второе, третье и четвертое решения отвечают законам сохранения массы, импульса и энергии соответственно. Другие очевидной

интерпретации не имеют. Однако, поскольку каждое из них можно использовать для получения постоянного интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{P(u, h) - P(0, h_0)\} dx = \text{const},$$

в любой задаче, для которой $u \rightarrow 0$, $h \rightarrow h_0$ на $\pm \infty$, известно бесконечное число интегралов решения. Следовательно, мы вправе ожидать, что решение можно найти аналитически. Действительно, при помощи преобразования годографа уравнения (13.79) можно перевести в линейное уравнение и в принципе решить; дальнейшее решение совпадает с анализом § 6.12 при $\gamma = 2$.

13.11. Уравнения Кортевега — де Фриза и Буссинеска

Посмотрим теперь, как в теорию мелкой воды можно включить дисперсионные эффекты. Это можно сделать, продолжив формальное разложение по малому параметру $(h_0/l)^2$ и учтя члены следующего порядка по сравнению с теорией мелкой воды. Однако, прежде чем проделать это, для лучшего понимания общей ситуации полезно применить более простую интуитивную процедуру. Рассмотрим случай одномерных волн при постоянной глубине h_0 . Линеаризованный вариант искомых уравнений должен дать дисперсионное соотношение (13.25) в следующем после (13.73) приближении:

$$\omega^2 = c_0^2 \kappa^2 - \frac{1}{3} c_0^2 h_0^2 \kappa^4. \quad (13.89)$$

Уравнение для η с таким дисперсионным соотношением имеет вид

$$\eta_{tt} - c_0^2 \eta_{xx} - \frac{1}{3} c_0^2 h_0^2 \eta_{xxxx} = 0. \quad (13.90)$$

Уравнения мелкой воды (13.79) после линеаризации дают (13.74). Если к уравнениям (13.79) мы смогли бы добавить дополнительный линейный член так, чтобы их линейный вариант давал уравнение (13.90), то получили бы систему, включающую как нелинейные эффекты относительного порядка a/h_0 (где a — характерная амплитуда), так и дисперсионные эффекты относительного порядка h_0^2/l^2 . Это легко сделать, причем существуют различные формы, которые в желаемом приближении эквивалентны. Если мы предпочтем добавить член $v h_{xxx}$ во второе из уравнений (13.79), то линеаризованные уравнения дадут

$$\begin{aligned} \eta_t + h_0 u_x &= 0, \\ u_t + g \eta_x + v \eta_{xxx} &= 0, \end{aligned}$$

и, исключая u , получаем

$$\eta_{tt} - c_0^2 \eta_{xx} - \nu h_0 \eta_{xxxx} = 0.$$

Следовательно, выбор $\nu = 1/3 c_0^2 h_0$ согласуется с (13.90). Таким образом, утверждение заключается в том, что система

$$\begin{aligned} h_t + (uh)_x &= 0, \\ u_t + uu_x + gh_x + \frac{1}{3} c_0^2 h_0 h_{xxx} &= 0, \end{aligned} \quad (13.91)$$

как и требуется, сводится к (13.90) в пределе при $a/h_0 \rightarrow 0$ и к (13.79) в пределе при $h_0^2/l^2 \rightarrow 0$ и, следовательно, объединяет поправки первого порядка к (13.74) как по a/h_0 , так и по h_0^2/l^2 .

В поправочный член всегда можно подставить низшее приближение (13.74). Поэтому эквивалентная в рассматриваемом порядке система имеет вид

$$\begin{aligned} h_t + (uh)_x &= 0, \\ u_t + uu_x + gh_x + \frac{1}{3} h_0 h_{xtt} &= 0. \end{aligned} \quad (13.92)$$

Такую систему избрал Буссинеск, впервые получивший эти уравнения. Линеаризованный вариант системы (13.92) приводит к уравнению

$$\eta_{tt} - c_0^2 \eta_{xx} - \frac{1}{3} h_0^2 \eta_{xxtt} = 0$$

и дисперсионному соотношению

$$\omega^2 = \frac{c_0^2 k^2}{1 + \frac{1}{3} k^2 h_0^2}. \quad (13.93)$$

Первые два члена разложения этого дисперсионного соотношения по малым $(kh_0)^2$ согласуются с (13.89), и, следовательно, две рассматриваемые системы эквивалентны в этом приближении. Однако, если уравнения использовать в случае, когда h_0^2/l^2 не мало, то система (13.92) предпочтительнее системы (13.91). Согласно (13.89), малые возмущения с $(kh_0)^2 > 3$ действительно будут усиливаться, поскольку ω становится мнимой, тогда как (13.93) сохраняет вещественную частоту ω , хотя в рассматриваемой области эти рассуждения и некорректны. При численных расчетах различные эффекты перехода к конечным разностям и округления вводят малые осцилляции малой длины волны даже в том случае, когда решаемая аналитическая задача удовлетворяет условию $h_0^2/l^2 \ll 1$, и поэтому система (13.92) предпочтительнее.

Уравнения Буссинеска включают волны, движущиеся как влево, так и вправо. Повторяя те же рассуждения и ограничиваясь только волнами, движущимися вправо, получим уравнение Кортвега — де Фриза. Для волн, движущихся вправо, первые два

члена дисперсионного соотношения дают

$$\omega = c_0 k - \gamma k^3, \quad \gamma = \frac{1}{6} c_0 h_0^2, \quad (13.94)$$

и соответствуют уравнению

$$\eta_t + c_0 \eta_x + \gamma \eta_{xxx} = 0. \quad (13.95)$$

Для нелинейных уравнений мелкой воды (13.79) волны, движущиеся вправо в невозмущенную воду глубины h_0 , имеют инвариант Римана

$$u = 2 \sqrt{g(h_0 + \eta)} - 2 \sqrt{gh_0}, \quad (13.96)$$

подстановка которого в любое из уравнений (13.79) дает

$$\eta_t + \{3 \sqrt{g(h_0 + \eta)} - 2 \sqrt{gh_0}\} \eta_x = 0. \quad (13.97)$$

Объединяя уравнения (13.95) и (13.97), имеем

$$\eta_t + \{3 \sqrt{g(h_0 + \eta)} - 2 \sqrt{gh_0}\} \eta_x + \gamma \eta_{xxx} = 0. \quad (13.98)$$

Если нелинейные члены аппроксимировать с точностью до членов второго порядка по a/h_0 , то получим

$$\eta_t + c_0 \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\eta}{h_0}\right) \eta_x + \gamma \eta_{xxx} = 0. \quad (13.99)$$

Это уравнение Кортвега — де Фриза. Нет оснований полагать, что предпочтительнее сохранять уравнение (13.98), поскольку другие члены, например пропорциональные произведению a/h_0 на h_0^2/l^2 , могут оказаться важными в той же степени, что и нелинейные члены порядка a^2/h_0^2 . Опять в дисперсионном поправочном члене можно положить $\eta_t \simeq -c_0 \eta_x$ и взять

$$\eta_t + c_0 \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\eta}{h_0}\right) \eta_x - \frac{\gamma}{c_0} \eta_{xxt} = 0.$$

Тогда линеаризованному уравнению соответствует дисперсионное соотношение

$$\omega = \frac{c_0 k}{1 + \gamma k^2 / c_0}.$$

При малых k это согласуется с (13.94) и в отличие от (13.94) имеет ограниченные фазовую и групповую скорости, если k становится большим. Поскольку ω остается вещественной в обоих случаях, потребность в модификации менее настоятельна, чем в случае уравнения Буссинеска, но тем не менее желательна по тем же причинам (Бенджамен и др. [1]). Однако для уравнения (13.99) было найдено много восхитительных точных аналитических решений, и в общем случае его можно свести к линейному интегральному уравнению; в настоящее время эти его свойства доминируют над всеми остальными.

Предыдущие выводы обладают большой гибкостью, и такой подход естественным образом допускает различные альтернативы, рассмотренные нами. Становится также ясным, что данные уравнения применимы ко многим задачам о диспергирующих волнах, совершенно не связанных с волнами на воде. Любое дисперсионное соотношение с нечетной функцией $\omega(k)$ с точностью до двух первых членов можно представить в виде (13.89) или (13.94), а тогда уравнения (13.90) и (13.95) будут описывать линеаризованную теорию. После этого остается лишь обсудить вид нелинейных членов, и члены в (13.91) или (13.99) довольно типичны. Например, именно так получаются эти уравнения в физике плазмы.

Формальное разложение по малому параметру имеет свои преимущества и позволяет надеяться найти оценки остаточных членов. Если расстояние от горизонтального дна временно обозначить через Y , то будет нужно решить уравнение Лапласа

$$\Phi_{xx} + \Phi_{YY} = 0$$

с $\Phi_Y = 0$ при $Y = 0$. Теория мелкой воды с производной Φ_x , приближенно не зависящей от Y , и малой полной глубиной предлагает разложение

$$\Phi = \sum_0^{\infty} Y^n f_n(x, t).$$

Подставив это разложение в уравнение Лапласа и в граничное условие при $Y = 0$, получим, что

$$\Phi = \sum_0^{\infty} (-1)^m \frac{Y^{2m}}{(2m)!} \frac{\partial^{2m} f}{\partial x^{2m}}, \quad (13.100)$$

где $f = f_0$. Последний шаг состоит в подстановке этого разложения в граничные условия на свободной поверхности. Поскольку они нелинейны и применяются при $Y = h_0 + \eta$, дальнейшие выкладки оказываются довольно запутанными, и в разложениях члены следует упорядочивать по двум параметрам: $\alpha = a/h_0$ и $\beta = h_0^2/l^2$. Лучше всего нормировать переменные с самого начала, считая исходные переменные равными

$$\begin{aligned} x' &= lx, & Y' &= h_0 Y, & t' &= \frac{lt}{c_0}, \\ \eta' &= a\eta, & \Phi' &= \frac{gla\Phi}{c_0}. \end{aligned}$$

Различные растяжения по Y и x являются решающим шагом. В нормированных переменных задача формулируется следующим

образом:

$$\begin{aligned} \beta \varphi_{xx} + \varphi_Y Y &= 0, & 0 < Y < 1 + \alpha\eta, \\ \varphi_Y &= 0, & Y = 0, \\ \left. \begin{aligned} \eta_t + \alpha \varphi_x \eta_x - \frac{1}{\beta} \varphi_Y &= 0, \\ \eta + \varphi_t + \frac{1}{2} \alpha \varphi_x^2 + \frac{1}{2} \frac{\alpha}{\beta} \varphi_Y^2 &= 0 \end{aligned} \right\} & Y = 1 + \alpha\eta. \end{aligned}$$

Ряд для функции φ теперь является разложением по степеням β , но из уравнения Лапласа и условия $\varphi_Y = 0$ при $Y = 0$ снова следует, что

$$\varphi = \sum_0^{\infty} (-1)^m \frac{Y^{2m}}{(2m)!} \frac{\partial^{2m} f}{\partial x^{2m}} \beta^m.$$

Подставляя это выражение в условия на свободной поверхности, находим

$$\begin{aligned} \eta_t + \{(1 + \alpha\eta) f_x\}_x - \left\{ \frac{1}{6} (1 + \alpha\eta)^3 f_{xxxx} + \frac{1}{2} \alpha (1 + \alpha\eta)^2 \eta_x f_{xxx} \right\} \beta + \\ + O(\beta^2) = 0, \\ \eta + f_t + \frac{1}{2} \alpha f_x^2 - \frac{1}{2} (1 + \alpha\eta)^2 \{f_{xxt} + \alpha f_x f_{xxx} - \alpha f_{xx}^2\} \beta + O(\beta^2) = 0. \end{aligned}$$

Если опустить все члены с β и продифференцировать второе уравнение по x , то получатся нелинейные уравнения мелкой воды

$$\begin{aligned} \eta_t + \{(1 + \alpha\eta) w\}_x &= 0, \\ w_t + \alpha w w_x + \eta_x &= 0, \quad w = f_x. \end{aligned}$$

Если сохранить члены первой степени по β , но для упрощения опустить члены порядка $O(\alpha\beta)$, то получим

$$\begin{aligned} \eta_t + \{(1 + \alpha\eta) w\}_x - \frac{1}{6} \beta w_{xxx} + O(\alpha\beta, \beta^2) &= 0, \\ w_t + \alpha w w_x + \eta_x - \frac{1}{2} \beta w_{xxt} + O(\alpha\beta, \beta^2) &= 0, \quad w = f_x. \end{aligned} \tag{13.101}$$

Это вариант уравнений Буссинеска. Величина w является первым членом разложения скорости φ_x , имеющего вид

$$\varphi_x = w - \beta \frac{Y^2}{2} w_{xx} + O(\beta^2).$$

Усреднение по глубине дает

$$\tilde{u} = w - \frac{1}{6} \beta w_{xx} + O(\alpha\beta, \beta^2),$$

или, что то же самое,

$$w = \tilde{u} + \frac{1}{6} \beta \tilde{u}_{xx} + O(\alpha\beta, \beta^2).$$

Подставив эти выражения в уравнения (13.101), получим

$$\begin{aligned} \eta_t + \{(1 + \alpha\eta) \tilde{u}\}_x + O(\alpha\beta, \beta^2) &= 0, \\ \tilde{u}_t + \alpha \tilde{u} \tilde{u}_x + \eta_x - \frac{1}{3} \beta \tilde{u}_{xxt} + O(\alpha\beta, \beta^2) &= 0. \end{aligned}$$

Наконец, подставив справедливое в низшем порядке выражение $\tilde{u}_x = -\eta_t + O(\alpha, \beta)$ из первого уравнения в член с $\tilde{u}_{xxt}$, придем к уравнениям Буссинеска (13.92) в нормированной форме.

Уравнение Кортвега — де Фриза выводится из любой из этих систем рассмотрением только волн, движущихся вправо. В низшем приближении (без учета членов первого порядка по α и β) такое решение системы (13.101) дает

$$w = \eta, \quad \eta_t + \eta_x = 0.$$

Будем искать решение, подправленное членами первого порядка по α и β , в виде

$$w = \eta + \alpha A + \beta B + O(\alpha^2 + \beta^2),$$

где A и B — функции от η и ее производных по x . Тогда уравнения (13.101) принимают вид

$$\eta_t + \eta_x + \alpha(A_x + 2\eta\eta_x) + \beta\left(B_x - \frac{1}{6}\eta_{xxx}\right) + O(\alpha^2 + \beta^2) = 0,$$

$$\eta_t + \eta_x + \alpha(A_t + \eta\eta_x) + \beta\left(B_t - \frac{1}{2}\eta_{xxt}\right) + O(\alpha^2 + \beta^2) = 0.$$

Поскольку $\eta_t = -\eta_x + O(\alpha, \beta)$, все производные по t в членах первого порядка можно заменить производными по x с противоположным знаком. Тогда эти два уравнения совместны, если

$$A = -\frac{1}{4}\eta^2, \quad B = \frac{1}{3}\eta_{xx}.$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} w &= \eta - \frac{1}{4}\alpha\eta^2 + \frac{1}{3}\beta\eta_{xx} + O(\alpha^2 + \beta^2), \\ \eta_t + \eta_x + \frac{3}{2}\alpha\eta\eta_x + \frac{1}{6}\beta\eta_{xxx} + O(\alpha^2 + \beta^2) &= 0. \end{aligned} \tag{13.102}$$

Второе уравнение является нормированной формой уравнения Кортвега — де Фриза (13.99). Первое аналогично инварианту Римана.

13.12. Уединенные и кноидальные волны

Уравнение Кортевега — де Фриза было выведено в 1895 г. Еще до этого Стокс [1] в 1847 г. нашел приближенные выражения для нелинейных периодических волн в случае бесконечно глубокой воды или воды умеренной глубины, а Буссинеск [1] в 1871 г. и Рэлей [2] в 1876 г. нашли приближенные выражения для уединенной волны, т. е. волны, состоящей из одиночного возвышения и распространяющейся без изменения формы и скорости. Такую волну впервые наблюдал экспериментально Скотт Рассел [1] в 1844 г.

Уединенную волну проще всего получить как частное решение уравнения, найденного Кортевегом и де Фризом; эти же авторы доказали возможность существования периодических решений. Хотя приближение Стокса не применимо, когда β сравнимо с α , решения Стокса переходят в решения Кортевега и де Фриза при $\alpha \ll \beta$. Мы рассмотрим сначала решения уравнения Кортевега и де Фриза, поскольку они проще (хотя и были найдены гораздо позже).

Как уединенные, так и периодические волны (все они описываются уравнением (13.99)) были найдены как решения с постоянной формой, движущиеся с постоянной скоростью. Поэтому их можно представить в виде

$$\eta = h_0 \zeta(X), \quad X = x - Ut.$$

Тогда, согласно (13.99), имеем

$$\frac{1}{6} h_0^2 \zeta''' + \frac{3}{2} \zeta \zeta' - \left(\frac{U}{c_0} - 1 \right) \zeta' = 0.$$

Интегрируя, получаем

$$\frac{1}{6} h_0^2 \zeta'' + \frac{3}{4} \zeta^2 - \left(\frac{U}{c_0} - 1 \right) \zeta + G = 0.$$

После умножения на ζ' еще одно интегрирование дает

$$\frac{1}{3} h_0^2 \zeta'^2 + \zeta^3 - 2 \left(\frac{U}{c_0} - 1 \right) \zeta^2 + 4G\zeta + H = 0, \quad (13.103)$$

где G и H — постоянные интегрирования.

В частном случае, когда ζ и ее производные стремятся к нулю на ∞ , мы имеем $G = H = 0$. Тогда последнее уравнение можно записать так:

$$\frac{1}{3} h_0^2 \left(\frac{d\zeta}{dX} \right)^2 = \zeta^2 (\alpha - \zeta), \quad (13.104)$$

$$\frac{U}{c_0} = 1 + \frac{\alpha}{2}.$$

Качественно ясно, что ζ возрастает от $\zeta = 0$ при $X = \infty$, достигает некоторого максимума $\zeta = \alpha$ и затем симметричным образом возвращается к значению $\zeta = 0$ при $X = -\infty$ (см. рис. 13.4).

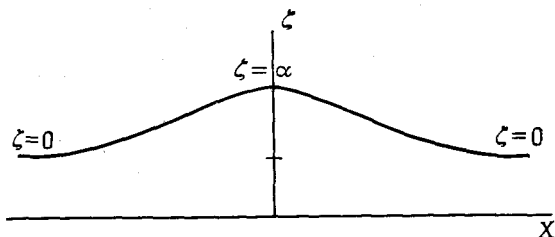


Рис. 13.4. Уединенная волна.

Это уединенная волна. Максимум функции η равен $\eta_0 = h_0 \alpha$, так что α играет ту же роль, что и в предыдущем параграфе. Скорость уединенной волны зависит от амплитуды:

$$U = c_0 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\eta_0}{h_0} \right). \quad (13.105)$$

Точное решение уравнения (13.104) имеет вид

$$\zeta = \alpha \operatorname{sech}^2 \left\{ \left(\frac{3\alpha}{4h_0^3} \right)^{1/2} X \right\}; \quad (13.106)$$

отсюда]

$$\eta = \eta_0 \operatorname{sech}^2 \left\{ \left(\frac{3\eta_0}{4h_0^3} \right)^{1/2} (x - Ut) \right\}. \quad (13.107)$$

Это решение уравнения Кортевега — де Фриза пригодно для любых η_0/h_0 ; однако само это уравнение выведено в предположении $\eta_0/h_0 \ll 1$ и фактически оказалось, что для уединенных волн отношение η_0/h_0 ограничено сверху; экспериментальное максимальное значение $\eta_0/h_0 \approx 0,7$, а теоретическое $\eta_0/h_0 \approx 0,78$. Реальный предельный профиль волны имеет на гребне угловую точку.

В общем случае $G, H \neq 0$,

$$\zeta'^2 = \mathcal{E}(\zeta),$$

где $\mathcal{E}(\zeta)$ — кубический полином с простыми нулями. Для ограниченных решений нули должны быть вещественными, и ограниченные решения должны периодически осциллировать между двумя нулями полинома $\mathcal{E}$. Не теряя общности, положим эти два нуля равными $\zeta = 0$ (что фиксирует h_0) и $\zeta = \alpha$ (что равно удвоенной амплитуде). Тогда третий нуль должен быть отрицательным; если положить его равным $\alpha - \beta$, то окажется, что $\beta = h_0^2/l^2$, где l — характерная горизонтальная длина, а параметры α и β

играют те же роли, что и в предыдущем параграфе. При таком выборе уравнение для $\zeta(X)$ принимает следующий вид:

$$\frac{1}{3} h_0^2 \left(\frac{d\zeta}{dX} \right)^2 = \zeta (\alpha - \zeta) (\zeta - \alpha + \beta), \quad 0 < \alpha < \beta, \quad (13.108)$$

$$\frac{U}{c_0} = 1 + \frac{2\alpha - \beta}{2}. \quad (13.109)$$

Длина волны составляет

$$\lambda = \frac{2h_0}{\sqrt{3}} \int_0^\alpha \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta(\alpha - \zeta)(\zeta - \alpha + \beta)}}. \quad (13.110)$$

В этой нелинейной задаче U — фазовая скорость, поскольку любая точка профиля движется с этой скоростью. Решение можно записать в виде

$$\zeta(X) = f(\theta) = f(kx - \omega t),$$

где f имеет период 2π по θ . Тогда

$$\omega = U k = \left(1 + \frac{2\alpha - \beta}{2} \right) k \quad (13.111)$$

и

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Согласно (13.110), β является функцией от λ и α . Поэтому и дисперсионное соотношение (13.111) принимает вид

$$\omega = \omega(k, \alpha). \quad (13.112)$$

Здесь мы впервые сталкиваемся с самым важным свойством нелинейных диспергирующих волн: *в дисперсионное соотношение, связывающее частоту ω и волновое число k , входит амплитуда.*

Для волн с бесконечно малой амплитудой ($\alpha \rightarrow 0$) соотношения (13.108) и (13.109) сводятся к следующим:

$$\frac{1}{3} h_0^2 \left(\frac{d\zeta}{dX} \right)^2 \simeq \zeta (\alpha - \zeta) \beta,$$

$$\frac{U}{c_0} \simeq 1 - \frac{\beta}{2}.$$

Решением является

$$\zeta = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} \cos \left(\sqrt{3\beta} \frac{X}{h_0} \right),$$

$$\frac{U}{c_0} = 1 - \frac{\beta}{2}.$$

Введем $\kappa = \sqrt{3\beta}/h_0$; тогда

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} \cos(\kappa x - \omega t), \\ \omega &= \kappa U = c_0 \kappa \left(1 - \frac{1}{6} \kappa^2 h_0^2\right),\end{aligned}\tag{13.113}$$

что согласуется с линейной теорией (см. (13.94) и (13.95)). В этом пределе амплитуда выпадает из дисперсионного соотношения.

В другом пределе $\alpha \rightarrow \beta$ длина волны λ , даваемая равенством (13.110), стремится к бесконечности, и мы имеем уединенную волну.

Решение уравнения (13.108) можно выразить через эллиптические функции Якоби. При этом получаем

$$\xi = \alpha \operatorname{cn}^2 \left\{ \left(\frac{3\beta}{4h_0^2} \right)^{1/2} X \right\},\tag{13.114}$$

причем модуль m эллиптической функции равен

$$m = \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{1/2},\tag{13.115}$$

и для длины волны имеем формулу

$$\lambda = \frac{4h_0}{\sqrt{3\beta}} K(m),\tag{13.116}$$

где $K(m)$ — полный эллиптический интеграл первого рода. Из-за того, что в (13.114) входит cn , Кортевег и де Фриз называли эти решения *кноидальными волнами*. Из (13.114) следует, что β характеризует отношение h_0^2/l^2 . Ясно также, что модуль m дает сравнительную оценку эффектов нелинейности и дисперсии. В линейном пределе $m \rightarrow 0$, $\operatorname{cn} \xi \rightarrow \cos \xi$; в другом пределе $m \rightarrow 1$, соответствующем уединенной волне, $\operatorname{cn} \xi \rightarrow \operatorname{sech} \xi$.

Опять следует отметить, что кноидальные волны являются решением уравнения Кортевега — де Фриза для всех α и β , ограниченных только условием $0 \leq \alpha \leq \beta$, но сами уравнения справедливы лишь тогда, когда α и β малы. Подобно уединенным волнам, кноидальные волны ограничены по высоте и в пределе имеют острые гребни. Теоретический анализ не дает здесь полной картины.

Чтобы дополнить сведения о уединенных волнах, заметим, что, согласно численным расчетам, периодические волны на глубокой воде образуют острые гребни при $a/\lambda = 0,142$ (Мичелл [1]). Строго говоря, это вне области применимости теории Кортевега — де Фриза, но, возможно, она дает примерный порядок величин. Считая $a \approx \frac{1}{2} \alpha h_0$, $\lambda \approx (2\pi h_0)/(\sqrt{3\beta})^{1/2}$ (формулы линейной теории), мы должны интерпретировать это как $\alpha \beta^{1/2} \approx 1$. Критическое

значение для уединенных волн $\alpha \approx \beta \approx 0,7-0,8$ согласуется с этой грубой оценкой.

В конце § 13.6 было указано, что решения линеаризованной теории ($\alpha/\beta \ll 1$) перестают быть справедливыми вблизи фронта волнового пакета, так как эффективное значение отношения α/β возрастает вместе с t при $t \rightarrow \infty$. Поскольку приведенные выше периодические решения переходят в уединенные волны, когда α/β стремится к 1, можно ожидать, что в результате появится серия уединенных волн.

Эту и другие задачи теперь можно изучать аналитически благодаря замечательным исследованиям Крускала, Грина, Гарднера, Миуры и их сотрудников. Они разработали метод нахождения общего решения уравнения Кортевега — де Фриза, и это решение описывает основные черты распада произвольного конечного исходного распределения на серию уединенных волн. Можно также привести явное решение для столкновения двух или более уединенных волн. Эта работа связана с аналогичными результатами для других уравнений и другими физическими приложениями, и поэтому ее изложение перенесено в гл. 17.

Продолжим теперь рассмотрение периодических волн.

13.13. Волны Стокса

Исследования Стокса волн на воде (первая публикация [1] в 1847 г.) положили начало нелинейной теории диспергирующих волн. Именно в этой работе, намного опередив другие исследования в данной области, он получил следующие фундаментальные результаты: во-первых, в нелинейных системах могут существовать периодические волновые пакеты и, во-вторых, дисперсионное соотношение содержит амплитуду. Зависимость от амплитуды приводит к важным качественным изменениям в поведении решения и вводит новые явления, а не только численные поправки.

Проще всего изложить подход Стокса на примере уравнения Кортевега — де Фриза и затем сформулировать более общие результаты без детального исследования полных уравнений для случая произвольной глубины. Цель Стокса состояла в нахождении следующего приближения к линейному волновому пакету. Для уравнения Кортевега — де Фриза это соответствует разложению по степеням α при $\alpha \ll \beta$. Такое разложение можно получить из точного решения (13.114), но проще и поучительнее обратиться непосредственно к исходному уравнению. Будем искать решение уравнения (13.99) в виде ряда

$$\frac{\eta}{h_0} = \zeta = \varepsilon \zeta_1(\theta) + \varepsilon^2 \zeta_2(\theta) + \varepsilon^3 \zeta_3(\theta) + \dots, \quad (13.117)$$

$$\theta = \kappa x - \omega t,$$

где ε — малый параметр, равный a/h_0 (пропорциональный α). При этом мы получим цепочку уравнений:

$$\begin{aligned}(\omega - c_0 \kappa) \zeta_1' - \gamma \kappa^3 \zeta_1''' &= 0, \\(\omega - c_0 \kappa) \zeta_2' - \gamma \kappa^3 \zeta_2''' &= \frac{3}{2} c_0 \kappa \zeta_1 \zeta_1', \\(\omega - c_0 \kappa) \zeta_3' - \gamma \kappa^3 \zeta_3''' &= \frac{3}{2} c_0 \kappa (\zeta_1 \zeta_2)',\end{aligned}$$

и т. д. Первое уравнение имеет решение

$$\zeta_1 = \cos \theta, \quad \omega = \omega_0(\kappa),$$

где $\omega_0(\kappa)$ — линейная дисперсионная функция

$$\omega_0(\kappa) = c_0 \kappa - \gamma \kappa^3.$$

Подставив эти значения в правую часть второго уравнения для ζ_2 , получим выражение, пропорциональное $\sin 2\theta$, и можно найти решение $\zeta_2 \propto \cos 2\theta$. Тогда в третьем уравнении правая часть будет линейной комбинацией $\sin \theta$ и $\sin 3\theta$. Член с $\sin 3\theta$ можно согласовать с решением $\zeta_3 \propto \cos 3\theta$, но член с $\sin \theta$ резонирует с оператором в левой части, поскольку подстановка $\zeta_3 \propto \cos \theta$ обращает левую часть в нуль. Имеется решение $\zeta_3 \propto \theta \sin \theta$, но этот «вековой член» неограничен по θ . Стокс указал, что можно найти периодическое решение, представив ω также в виде степенного ряда

$$\omega = \omega_0(\kappa) + \varepsilon \omega_1(\kappa) + \varepsilon^2 \omega_2(\kappa) + \dots$$

Поскольку неприятности возникают только в третьем порядке, можно заранее положить $\omega_1 = 0$. Цепочка теперь принимает вид

$$\begin{aligned}(\omega_0 - c_0 \kappa) \zeta_1' - \gamma \kappa^3 \zeta_1''' &= 0, \\(\omega_0 - c_0 \kappa) \zeta_2' - \gamma \kappa^3 \zeta_2''' &= \frac{3}{2} c_0 \kappa \zeta_1 \zeta_1', \\(\omega_0 - c_0 \kappa) \zeta_3' - \gamma \kappa^3 \zeta_3''' &= \frac{3}{2} c_0 \kappa (\zeta_1 \zeta_2)' - \omega_2 \zeta_1'\end{aligned}$$

Если опять положить

$$\zeta_1 = \cos \theta, \quad \omega_0 = c_0 \kappa - \gamma \kappa^3,$$

то найдем

$$\zeta_2 = \frac{c_0}{8\gamma\kappa^2} \cos 2\theta.$$

Правую часть уравнения для ζ_3 можно записать так:

$$-\frac{3c_0^2}{32\gamma\kappa} (\sin \theta + 3 \sin 3\theta) + \omega_2 \sin \theta.$$

Выберем теперь

$$\omega_2 = \frac{3c_0^2}{32\gamma\kappa}$$

и тем самым исключим резонансный член. Окончательный результат имеет вид

$$\frac{\eta}{h_0} = \varepsilon \cos \theta + \frac{3\varepsilon^2}{4\kappa^2 h_0^2} \cos 2\theta + \frac{27\varepsilon^3}{64\kappa^4 h_0^4} \cos 3\theta + \dots, \quad (13.118)$$

$$\frac{\omega}{c_0 \kappa} = 1 - \frac{1}{6} \kappa^2 h_0^2 + \frac{9\varepsilon^2}{16\kappa^2 h_0^2} + \dots \quad (13.119)$$

Второе уравнение показывает характер зависимости дисперсионного соотношения от амплитуды.

Следует отметить, что параметром разложения фактически является $\varepsilon/(\kappa^2 h_0^2)$, а это соответствует отношению α/β . Сравнивая результаты с разложением решения (13.114) для малых $m = \alpha/\beta$, следует учесть различные способы выбора начала отсчета для η и, следовательно, различные способы выбора h_0 . Использование различных систем отсчета неизбежно; для предельного случая уединенной волны удобно поместить начало отсчета у подошвы волны, тогда как для линейного предела началом отсчета удобно считать средний уровень.

Следует также отметить, что выражение (13.118) можно рассматривать как ряд Фурье для периодического волнового пакета и эту общую структуру можно считать заданной с самого начала.

Случай произвольной глубины

В общем случае цель состоит в нахождении разложений по малой амплитуде периодических решений системы

$$\begin{aligned} \varphi_{xx} + \varphi_{yy} &= 0, & -h_0 < y < \eta, \\ \varphi_y &= 0, & y = -h_0, \\ \eta_t + \varphi_x \eta_x - \varphi_y &= 0, \\ \varphi_t + \frac{1}{2} \varphi_x^2 + \frac{1}{2} \varphi_y^2 + g\eta &= 0 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \varphi_{xx} + \varphi_{yy} &= 0, \\ \varphi_y &= 0, \\ \eta_t + \varphi_x \eta_x - \varphi_y &= 0, \\ \varphi_t + \frac{1}{2} \varphi_x^2 + \frac{1}{2} \varphi_y^2 + g\eta &= 0 \end{aligned}} \right\} y = \eta.$$

В нашем случае $\eta = \eta(\theta)$, $\varphi = \varphi(\theta, y)$, $\theta = \kappa x - \omega t$, где η и φ — периодические по θ функции. Можно выбрать начало отсчета $y = 0$ так, чтобы η имела нулевое среднее значение, и тогда разложение для η будет иметь вид

$$\eta = a \cos \theta + \mu_2 a^2 \cos 2\theta + \dots, \quad (13.120)$$

где μ_2 — коэффициент, который следует найти. Согласно выбору среднего значения $\bar{\eta} = 0$, из второго условия на поверхности $y = \eta$ следует, что среднее значение $\bar{\varphi}_t$ не может быть нулевым и функция φ в своем разложении должна иметь по крайней мере член с t . Это также можно интерпретировать как следствие поглощения постоянной интегрирования при первом выводе выражения для $(p - p_0)/\rho$.

Другая возможность — сохранить ненулевое среднее значение величины η . Поскольку в физических величинах фигурируют только производные от φ , члены, пропорциональные t или x , приемлемы для φ . Член, пропорциональный x , указывает на ненулевое среднее значение горизонтальной скорости. Здесь это среднее можно положить равным нулю. В дальнейшем при изучении модулированных волновых пакетов нам понадобятся как $\bar{\eta} \neq 0$, так и $\bar{\varphi}_x \neq 0$, поскольку они изменяются при модуляциях и их нельзя исключить. Обобщения очевидны, так что здесь мы положим $\bar{\eta} = 0$, $\bar{\varphi}_x = 0$. Тогда разложение для φ можно записать в виде

$$\varphi = v_0 a^2 t + v_1 a \operatorname{ch} \kappa (y + h_0) \sin \theta + v_2 a^2 \operatorname{ch} 2\kappa (y + h_0) \sin 2\theta + \dots \quad (13.121)$$

Чтобы снова избежать появления в третьем порядке вековых членов, ω следует также разложить в ряд

$$\omega = \omega_0(\kappa) + a^2 \omega_2(\kappa) + \dots \quad (13.122)$$

Когда все это выполнено, оказывается, что

$$\frac{\omega^2}{g\kappa \operatorname{th} \kappa h_0} = 1 + \left(\frac{9 \operatorname{th}^4 \kappa h_0 - 10 \operatorname{th}^2 \kappa h_0 + 9}{8 \operatorname{th}^4 \kappa h_0} \right) \kappa^2 a^2 + \dots \quad (13.123)$$

и

$$\mu_2 = \frac{1}{2} \kappa \operatorname{cth} \kappa h_0 \left(1 + \frac{3}{2 \operatorname{sh}^2 \kappa h_0} \right),$$

$$v_0 = -\frac{g\kappa}{2 \operatorname{sh} 2\kappa h_0}, \quad v_1 = \frac{\omega_0}{\kappa \operatorname{sh} \kappa h_0}, \quad v_2 = \frac{3}{8} \frac{\omega_0}{\operatorname{sh}^4 \kappa h_0}.$$

Дисперсионное соотношение (13.123) является основным результатом. При $\kappa^2 h_0^2 \ll 1$ возвращаемся к (13.119), а при $\kappa^2 h_0^2 \gg 1$ получаем принадлежащую Стоксу формулу для глубокой воды

$$\omega^2 = g\kappa (1 + \kappa^2 a^2 + \dots). \quad (13.124)$$

Детали выкладок в случае произвольной глубины становятся довольно громоздкими. Их можно отчасти сократить подстановкой разложений в виде рядов Фурье в вариационный принцип (13.16) — (13.17) и нахождением коэффициентов из вариационных уравнений (см. Уизем [11]).

Выражения, полученные Стоксом, ограничены малой амплитудой и не могут описывать самые высокие волновые пакеты, у которых, как показывают наблюдения, гребни становятся острыми. Однако Стокс, рассматривая этот случай в точной постановке, показал, что если острые гребни имеются у волны со *стационарным профилем*, то угол при вершине должен быть равным 120° . Его рассуждения существенно опираются на предположение, что волна имеет постоянную форму и распространяется с постоянной

скоростью. В этой ситуации течение стационарно в системе отсчета, движущейся вместе с гребнем. Решения уравнения Лапласа являются аналитическими функциями от $z = x + iy$, и достаточно общая сингулярная функция (при выборе вершины гребня в качестве начала отсчета) имеет вид

$$\varphi + i\psi \propto z^m.$$

В локальных полярных координатах $(r, \tilde{\omega})$, где $\tilde{\omega}$ отсчитывается от направленной вниз вертикали,

$$x = r \sin \tilde{\omega}, \quad y = -r \cos \tilde{\omega}, \quad z = -ire^{-i\tilde{\omega}},$$

имеем

$$\varphi = Cr^m \sin m\tilde{\omega}.$$

Записав уравнение свободной поверхности в виде $\eta = -r \cos \tilde{\omega}_0$, из условия для давления

$$\varphi_r^2 + \frac{1}{r^2} \varphi_{\tilde{\omega}}^2 + g\eta = \text{const}$$

получаем, что

$$C^2 m^2 r^{2m-2} - gr \cos \tilde{\omega}_0 = \text{const}.$$

Сравнивая показатели степени r , получаем

$$m = \frac{3}{2}.$$

Вторым граничным условием, определяющим свободную поверхность, является равенство $\partial\varphi/\partial\tilde{\omega} = 0$ при $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_0$, откуда

$$\cos m\tilde{\omega}_0 = 0, \quad \tilde{\omega}_0 = \frac{\pi}{2m} = \frac{\pi}{3}.$$

Полный угол $2\tilde{\omega}_0$ равен 120° .

Мичелл [1] численно нашел периодическую волну наибольшей высоты для воды с бесконечной глубиной и обнаружил, что предельная высота достигается при $a/\lambda = 0,142$, как уже было отмечено выше.

Указанный вывод величины угла при вершине гребня несправедлив для нестационарных задач. Для стоячих волн теоретические соображения, предложенные Пенни и Прайсом [1] и менее убедительные чем в случае, рассмотренном Стоксом, предсказывают угол, равный 90° ; эта величина экспериментально подтверждена Тейлором [5].

13.14. Опрокидывание и заострение волн

Ранее отмечалось, что нелинейные уравнения мелкой воды, пренебрегающие дисперсией, приводят к опрокидыванию типично гиперболического характера с образованием вертикального наклона и многозначного профиля. Кажется ясным, что член с третьей производной в уравнении Кортевега — де Фриза помешает возникновению этого явления. Но так или иначе приближение длинных волн, для которого были выведены оба эти уравнения, в рассматриваемой ситуации несправедливо. Первое уравнение описывает опрокидывающиеся волны, и хотелось бы учесть в этом уравнении эффекты дисперсии. Однако добавка, соответствующая уравнению Кортевега — де Фриза, является слишком сильной для коротких волн. Это ясно из сравнения выражения (13.94) с полным дисперсионным соотношением, когда $(\kappa h_0)^2$ становится большим.

С другой стороны, дисперсия, включенная в уравнение Кортевега — де Фриза, приводит к появлению уединенных и периодических волн, отсутствующих в теории мелкой воды. Для этих решений, однако, уравнение Кортевега — де Фриза не может описывать наблюдаемое симметричное «заострение» гребней с образованием конечного угла на гребне. Опять можно утверждать, что это мелкомасштабное явление, в котором важную роль играют коротковолновые компоненты, и предположение $(\kappa h_0)^2 \ll 1$ более несправедливо. Несомненно, это комбинируется с дополнительными нелинейными эффектами.

Волны Стокса включают полные дисперсионные эффекты $\omega_0^2 = g \kappa \tanh \kappa h_0$, но, будучи ограничены малой амплитудой, не дают ни уединенных волн, ни заострения.

Хотя как опрокидывание, так и заострение, а также критерий возникновения обоих явлений вне всякого сомнения содержатся в уравнениях точной потенциальной теории, хотелось бы иметь более простое математическое уравнение, включающее все эти явления. В свете предыдущих замечаний, по-видимому, необходимо включить по крайней мере «опрокидывающий оператор» теории мелкой воды и *полное* дисперсионное соотношение линейной теории. Далее, как было указано при выводе уравнения (13.99), в теории мелкой воды опрокидывание описывается уравнением

$$\eta_t + c_0 \eta_x + \frac{3c_0}{2h_0} \eta \eta_x = 0. \quad (13.125)$$

С другой стороны, линейное уравнение, соответствующее произвольному линейному дисперсионному соотношению

$$\frac{\omega}{\kappa} = c(\kappa),$$

согласно (11.12), имеет вид

$$\eta_t + \int_{-\infty}^{\infty} K(x - \xi) \eta_{\xi}(\xi, t) d\xi = 0, \quad (13.126)$$

где

$$K(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} c(\kappa) e^{i\kappa x} d\kappa. \quad (13.127)$$

Эти два уравнения можно объединить в следующее:

$$\eta_t + \frac{3c_0}{2h_0} \eta \eta_x + \int_{-\infty}^{\infty} K_1(x - \xi) \eta_{\xi}(\xi, t) d\xi = 0. \quad (13.128)$$

Для уравнения Кортевега — де Фриза

$$c(\kappa) = c_0 - \gamma \kappa^2, \quad K(x) = c_0 \delta(x) + \gamma \delta''(x).$$

Рассмотрим теперь уточненный вариант

$$c(\kappa) = \left(\frac{g}{\kappa} \operatorname{th} \kappa h_0 \right)^{1/2}, \quad (13.129)$$

$$K_g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{g}{\kappa} \operatorname{th} \kappa h_0 \right)^{1/2} e^{i\kappa x} d\kappa. \quad (13.130)$$

Здесь полная линейная дисперсия комбинируется с длинноволновой нелинейностью. В терминах параметров α и β из § 13.11 дело обстоит так: мы сохраняем члены всех порядков по β и нелинейный член, пропорциональный α , пренебрегая всеми высшими степенями α и всеми смешанными членами. Фактически мы могли бы сохранить члены всех порядков по α , взяв нелинейный оператор из (13.97) и используя комбинированное уравнение

$$\eta_t + \{3\sqrt{g(h_0 + \eta)} - 2\sqrt{gh_0}\} \eta_x + \int_{-\infty}^{\infty} K(x - \xi) \eta_{\xi}(\xi, t) d\xi = 0; \quad (13.131)$$

однако выигрыш, по-видимому, не оправдывает дополнительного усложнения. Стандартными методами легко показать, что функция K_g с $g = 1$ и $h_0 = 1$ обладает следующими свойствами:

$$K_g(x) = K_g(-x),$$

$$K_g(x) \sim (2\pi x)^{-1/2} \quad \text{при } x \rightarrow 0,$$

$$K_g(x) \sim \left(\frac{1}{2} \pi^2 x \right)^{-1/2} e^{-\pi x/2} \quad \text{при } x \rightarrow \infty,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_g(x) dx = 1.$$

Дисперсионный член теперь стал умереннее, поскольку $K_g(x)$ не содержит δ -функций. Очевидно, поведение функции $c(x)$ при больших x определяет поведение функции $K(x)$ при малых x ; изменение поведения при больших волновых числах заменяет $\delta''(x)$ на $x^{-1/2}$ при $x \rightarrow 0$. Анализ полученного нелинейного интегрального уравнения довольно труден, и уравнение с $K = K_g$ еще полностью не изучено. Но вопрос был поставлен в более общей формулировке: математические уравнения какого вида могут описывать волны, как заостряющиеся, так и опрокидывающиеся? Можно показать, что уравнение (13.128) описывает такие волны для некоторых довольно простых функций $K(x)$. Это позволяет рассчитывать на положительный ответ для $K = K_g$.

Решения со стационарными профилями уравнения (13.128) получаются, как обычно, рассмотрением решений вида $\eta = \eta(X)$, $X = x - Ut$. В нормированных переменных, соответствующих выбору $g = h_0 = 1$, имеем ($y = \xi - Ut$)

$$\left(U - \frac{2}{3}\eta\right)\eta'(X) = \int_{-\infty}^{\infty} K(X-y)\eta'(y) dy. \quad (13.132)$$

Возможность заострения связана с возникновением разрыва производной η' при $\eta = 2U/3$ и это, по существу, дает соотношение между скоростью и амплитудой для волны наибольшей высоты. Интегрируя уравнение, получаем

$$A + U\eta - \frac{3}{4}\eta^2 = \int_{-\infty}^{\infty} K(X-y)\eta(y) dy. \quad (13.133)$$

Волны Стокса для случая малой амплитуды можно найти, исходя из линейного решения, и кажется разумным предположить, что критическая высота действительно достигается при $\eta = 2U/3$. Если $K(X)$ ведет себя как $|X|^p$ при $X \rightarrow 0$, а $\eta(X)$ имеет при $X \rightarrow 0$ вид $2U/3 - |X|^q$, то исследование уравнения (13.132) показывает, что

$$2q - 1 = p + q, \quad (13.134)$$

откуда $q = p + 1$. В соответствии с этим при $K = K_g$ гребень будет заостряться с $\eta \sim 2/3 U - |X|^{1/2}$. Конечно, было бы наивно надеяться, что в этой упрощенной модели получится тонкий результат Стокса — угол, равный 120° .

Хотя это все, что можно получить для случая $K = K_g$, можно продвинуться дальше, если рассмотреть приближенное ядро. Прием, часто используемый в интегральных уравнениях такого вида, состоит в аппроксимации данного ядра функцией

$$K_0(x) = \mu e^{-v|x|},$$

или рядом таких экспонент. Ядро $K_0(x)$ является функцией Грина для оператора $d^2/dx^2 - v^2$, поэтому, применяя этот оператор к обеим частям равенства (13.133), можно исключить интеграл. Мы не можем уловить поведение функции $K_g(x)$ при $x \rightarrow 0$, но, положив $v = \pi/2$, достаточно хорошо опишем поведение при $x \rightarrow \infty$, а затем выберем μ таким образом, чтобы

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_0(x) dx = \frac{2\mu}{v} = 1,$$

т. е. $\mu = \pi/4$, $v = \pi/2$. Поскольку

$$\frac{d^2 K_0(x)}{dx^2} - v^2 K_0(x) = -v^2 \delta(x),$$

уравнение (13.133) переходит в следующее:

$$\left(\frac{d^2}{dX^2} - v^2 \right) (A + U\eta - \frac{3}{4}\eta^2) = -v^2\eta.$$

После элементарного интегрирования получаем

$$\left(U - \frac{3}{2}\eta \right)^2 \eta'^2 = \text{полином четвертого порядка по } \eta.$$

Периодические решения соответствуют осцилляциям функции η между двумя простыми нулями получившегося полинома. Уединенные волны соответствуют предельному случаю, когда два нуля сливаются в точке $\eta = 0$; тогда η возрастает от этого двойного нуля (соответствующего $X = +\infty$) до простого нуля $\eta = \eta_0$ и убывает снова до $\eta = 0$ при $X = -\infty$. Все это верно при условии, что точка $\eta = 2U/3$ находится вне этого интервала. Можно показать, что гребни заостряются с конечным углом, когда точка $\eta = 2U/3$ в точности совпадает с верхним нулем. Все эти детали мы приводить не будем. Заметим лишь, что уединенная волна максимальной высоты имеет следующий вид:¹

$$\eta = \frac{8}{9} e^{-\pi |X|/4}, \quad U = \frac{4}{3}$$

(в единицах длины h_0 и скорости c_0). Мак-Кауэн [1] при помощи приближенного рассмотрения задачи об уединенной волне получил значения $\eta_0 = 0,78$ и $U = 1,249$. Согласование можно назвать неплохим. Гребень имеет конечный угол, равный 110° . Конечный угол согласуется с равенством (13.134), поскольку для ядра K_0 $p = 0$, $q = 1$; близость к результату Стокса 120° чисто случайна. Оставляя в стороне вопрос, можно ли принимать всерьез полученные значения, видим, что уравнение вида (13.128) может описывать периодические и уединенные волны с желаемым заострением.

Обращаясь теперь к другому виду разрушения решений, заметим, что Селиджер [1] при помощи довольно тонких рассуждений смог показать, что для ядер вида $K_0(x)$ достаточно асимметричный горб опрокидывается типично гиперболическим способом. Он, однако, требовал, чтобы $K(0)$ было конечным (а также, чтобы

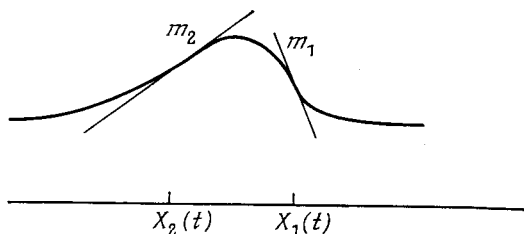


Рис 13.5. Обозначения в задаче об опрокидывании волны.

$K(x)$ монотонного убывало при $x \rightarrow \infty$), и не смог распространить свои рассуждения на K_g . Коротко говоря, его способ состоит в следующем. Пусть

$$m_1(t) = \min \eta_x \quad \text{при} \quad x = X_1(t),$$

$$m_2(t) = \max \eta_x \quad \text{при} \quad x = X_2(t)$$

(см. рис. 13.5), где $m_1 < 0$ и $m_2 > 0$. Дифференцируя уравнение (13.128) и полагая $x = X_i(t)$, имеем

$$\frac{dm_i}{dt} + \frac{3}{2} m_i^2 + \int_{-\infty}^{\infty} K(\xi) \eta_{xx}(X_i - \xi, t) d\xi = 0, \quad i = 1, 2.$$

Интегралы можно оценить через m_1 и m_2 , используя соответствующую теорему о среднем, и получить

$$\frac{dm_1}{dt} \leq -\frac{3}{2} m_1^2 + (m_2 - m_1) K(0),$$

$$\frac{dm_2}{dt} \leq -\frac{3}{2} m_2^2 + (m_2 - m_1) K(0).$$

Складывая, находим

$$\frac{d}{dt} (m_1 + m_2) \leq (m_2 - m_1) \left\{ 2K(0) + \frac{3}{2} (m_1 + m_2) \right\} - 3m_2^2;$$

отсюда, если первоначально $(m_1 + m_2) \leq -4K(0)/3$, то это неравенство останется справедливым и в дальнейшем, так что

$$m_1 + m_2 \leq -\frac{4}{3} K(0) \quad (13.135)$$

для всех t . Тогда

$$\begin{aligned}\frac{dm_1}{dt} &\leq -\frac{3}{2} m_1^2 - 2m_1 K(0) - \frac{4}{3} K^2(0) = \\ &= -\frac{3}{2} \left\{ m_1 + \frac{2}{3} K(0) \right\}^2 - \frac{2}{3} K^2(0).\end{aligned}\quad (13.136)$$

Правая часть этого выражения отрицательна, и из наличия члена с m_1^2 вытекает, что $m_1 \rightarrow -\infty$ за конечный интервал времени; детали видны из следующих рассуждений. Пусть $M = -\frac{3}{2} m_1 - K(0)$; тогда $M = M_0 > 0$ первоначально (в силу (13.135) и условия $m_2 > 0$); более того,

$$\frac{dM}{dt} \geq M^2,$$

согласно (13.136). Следовательно,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{M} \right) \leq -1, \quad \frac{1}{M} \leq \frac{1}{M_0} - t, \quad M \geq \frac{M_0}{1 - M_0 t},$$

откуда $M \rightarrow \infty$, когда t достигает $1/M_0$. Таким образом приходим к выводу, что если условие (13.135) выполнено первоначально, т. е. если горб достаточно асимметричен, то он постепенно становится все асимметричнее и опрокидывается при $m_1 \rightarrow -\infty$ за интервал времени, меньший, чем

$$\frac{1}{M_0} = \frac{1}{1 - \{ \frac{3}{2} m_1(0) + K(0) \}}.$$

Снова оставляя в стороне вопрос о справедливости модели, мы показали, что уравнения вида (13.128) действительно могут описывать симметричные волны, распространяющиеся без изменения формы и заостряющиеся при критической высоте, а также опрокидывающиеся асимметричные волны.

13.15. Модель структуры боры

В тех случаях, когда волны опрокидываются, а не заостряются, результирующая бора принимает две различные формы. Они наблюдались в приливных борах и могут быть воспроизведены экспериментально с помощью аналога ударной трубы, используемой в газовой динамике. В экспериментах, впервые описанных Фавром [1], заслонка, разделяющая воду с различными уровнями, внезапно выдергивается и образуются боры различной силы, зависящей от разности уровней.

Более слабые боры имеют гладкую, но осциллирующую структуру, как показано на рис. 13.6, тогда как более сильные характеризуются быстрым турбулентным изменением без видимой осцил-

ляции. В обоих случаях конечные состояния удовлетворяют условиям на разрыве (13.81). Изменение типа, по-видимому, происходит резко при отношении глубин $h_2/h_1 \approx 1,28$, что соответствует числу Фруда $U/\sqrt{gh_1} \approx 1,21$.

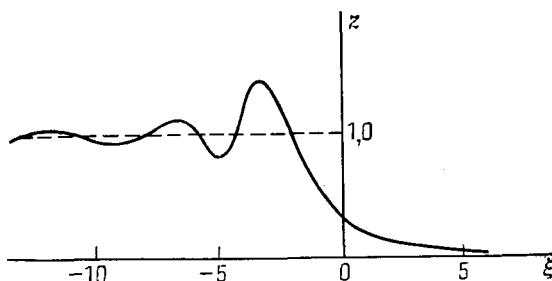


Рис. 13.6. Модель структуры борма. Решение уравнения (13.139) для $m = 1/2$.

Общее рассмотрение полного баланса массы, импульса и энергии, учитывающее излучение энергии, связанное с волновым пакетом, дано Бенджаменом и Лайтхиллом [1]. Действительная структура, очевидно, сложна, но опять можно спросить, какого рода описание будет охватывать обе формы. Уравнение Кортевега — де Фриза является естественным отправным пунктом, но оно не имеет решений, подобных изображенным на рис. 13.6 и распространяющихся без изменения формы. Поскольку имеется диссипация энергии, естественно добавить член со второй производной и рассмотреть

$$\eta_t + c_0 \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\eta}{h_0} \right) \eta_x + \frac{1}{6} c_0 h_0^2 \eta_{xxx} - \mu \eta_{xx} = 0. \quad (13.137)$$

Возможно, эта модель не слишком хорошо описывает эффекты трения в волнах на воде, но в любом случае представляет интерес, поскольку уравнение Кортевега — де Фриза является каноническим для общей теории диспергирующих волн.

Стационарные решения ищем в виде

$$\eta = h_0 \zeta(X), \quad X = x - Ut$$

и, интегрируя обыкновенное дифференциальное уравнение для ζ , получаем

$$\frac{1}{6} h_0^2 \zeta_{\zeta\zeta} - \frac{\mu}{c_0} \zeta_\zeta + \frac{3}{4} \zeta^2 - \left(\frac{U}{c_0} - 1 \right) \zeta = 0; \quad (13.138)$$

при этом учитывается, что $\zeta \rightarrow 0$ при $X \rightarrow \infty$. После нормировки уравнение имеет вид

$$z_{\xi\xi} - m z_\xi + z^2 - z = 0, \quad (13.139)$$

где

$$\xi = \{6(F-1)\}^{1/2} \frac{X}{h_0}, \quad z = \frac{3}{4(F-1)} \xi, \quad (13.140)$$

$$F = \frac{U}{c_0}, \quad m = \left(\frac{6}{F-1} \right)^{1/2} \frac{\mu}{c_0 h_0}.$$

В фазовой плоскости с $w = z_\xi$ имеем

$$\frac{dw}{d\xi} = mw - z^2 + z, \quad \frac{dz}{d\xi} = w. \quad (13.141)$$

Возможны решения с конечными состояниями $z = 0$, $w = 0$ и $z = 1$, $w = 0$. Эти состояния являются особыми точками в (z, w) -плоскости. Интегральная кривая

$$\frac{dw}{dz} = \frac{mw - z^2 + z}{w}$$

должна соединять эти точки. В окрестности точки $(0, 0)$ имеем

$$w \sim \sigma_0 z, \quad z \propto e^{\sigma_0 \xi}, \quad \sigma_0 = \frac{1}{2}(m - \sqrt{m^2 + 4}),$$

т. е. экспоненциальное затухание к нулю при $\xi \rightarrow \infty$. В окрестности точки $(1, 0)$ имеем

$$w \sim \sigma_1(z-1), \quad (z-1) \propto e^{\sigma_1 \xi}, \quad \sigma_1 = \frac{1}{2}(m \pm \sqrt{m^2 + 4}).$$

Поведение решения при $z \rightarrow 1$ ($\xi \rightarrow -\infty$) определяется знаком неравенства $m < 2$ или $m > 2$; первое из них приводит к осцилляциям.

Итак, мы имеем два типа структуры. При фиксированной разнице уровней, т. е. при заданной величине $F - 1$, достаточно малое демпфирование допускает осциллирующее решение, но большое демпфирование подавляет осцилляцию. В случае волн на воде критерий для F , получаемый из равенств (13.140) при фиксированном μ , кажется противоречащим действительности. Однако в этом случае μ следует интерпретировать как турбулентную вязкость, зависящую от средней скорости течения. В первом, грубом приближении эта зависимость имеет вид $\mu = bu_2 h_2$, где u_2 и h_2 относятся к условиям за борой, а b — числовой множитель. Тогда, в силу условий на боре,

$$\frac{\mu}{c_0 h_0} \approx \frac{4}{3} b (F - 1).$$

Критерий $m < 2$ для осциллирующего решения переходит в неравенство $F - 1 \leq 3/(8b^2)$. Критическое значение Фавра $F = 1,2$ дает $b \approx 1,4$, что, возможно, в десять раз превосходит ожидаемое для турбулентной вязкости значение. Но мы привели здесь только грубую модель реальной физической ситуации. Общий качественный эффект диссипации энергии, по-видимому, отражен правильно.

Глава 14

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИСПЕРСИЯ И ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ

Нелинейные эффекты, обнаруженные при изучении волн на воде, характерны для общих диспергирующих систем. Периодические волновые пакеты, подобные волнам Стокса и Кортвега — де Фриза, найдены для большинства систем и являются исходными решениями, аналогичными элементарным решениям $ae^{ikx - i\omega t}$ в линейной теории. В нелинейной теории решения уже не синусоидальны, но вопрос о существовании решений, периодических по $\theta = kx - \omega t$, решается явными формулами в простейших случаях и связывается с разложением Стокса в остальных. Основной нелинейный эффект заключается не в изменении функциональной формы, а в зависимости дисперсионного соотношения от амплитуды. Это приводит к качественно новому поведению, а не только к поправкам к линейным формулам.

Для построения волновых пакетов более общего вида нельзя использовать суперпозицию решений, но теорию модуляции можно изучать непосредственно. Эту теорию можно развить в общем виде, используя вариационный подход § 11.7. В этой главе вариационный подход будет детально изучен и для завершения предыдущего обсуждения обоснован как формальный метод теории возмущений. Подробные приложения теории будут даны в гл. 15 и 16.

Другим характерным следствием нелинейности является существование уединенных волн. Волны с такими профилями в линейной теории диспергируют, но нелинейность уравнивает дисперсию и приводит к волнам неизменной формы. Уединенные волны были обнаружены сначала как предельные случаи периодических волновых пакетов; недавние исследования их взаимодействия и образования из произвольных начальных распределений показали, что их особая структура имеет самостоятельное значение. Мы вернемся к этим вопросам в гл. 17.

Для волн сравнительно небольшой амплитуды дальнейшие результаты можно получить методами теории возмущений, которые основаны на разложениях по малой амплитуде и которые можно назвать «почти линейной теорией». В частности, можно вернуться к описанию, базирующемуся на фурье-анализе, и исследовать малые нелинейные взаимодействия между фурье-компонентами. При взаимодействии различных компонент между ними происходит перераспределение энергии, а вследствие наличия в уравнениях членов типа произведений из существующих компонент генерируются новые. Эти взаимодействия можно эффективно

проследить только в случае, когда фигурируют лишь несколько компонент.

Мы приведем характерные результаты, но основное внимание уделим методам, распространяющимся на полностью нелинейный случай. С точки зрения фурье-анализа нелинейные волновые пакеты и уединенные волны уже имеют довольно сложные распределения фурье-компонент с уравновешенными взаимодействиями. Описываемый здесь подход опирается непосредственно на эти специальные структуры, не пытаясь разложить их на компоненты. Однако в почти линейном случае можно установить интересные и содержательные связи между этими двумя точками зрения.

14.1. Нелинейное уравнение Клейна — Гордона

Полезно иметь простой пример для обоснования или иллюстрации этапов построения общей теории. Для этой цели нелинейный вариант уравнения Клейна — Гордона особенно удобен и даже более прост, чем уравнение Кортевега — де Фриза, которое могло бы быть другим очевидным примером. Итак, рассматривается уравнение

$$\Phi_{tt} - \Phi_{xx} + V'(\Phi) = 0, \quad (14.1)$$

где $V'(\Phi)$ — некоторая нелинейная функция от Φ , для удобства дальнейшего изложения заданная в виде производной от потенциальной энергии. Уравнение (14.1) не только полезная модель; оно встречается во многих физических задачах. Это прежде всего относится к случаю $V'(\Phi) = \sin \Phi$, который почти всегда упоминается как уравнение Син-Гордона!

Обзор физических задач, в которых фигурирует это уравнение, дан Бароне с сотрудниками [1], развившими краткое изложение Скотта [1, стр. 250]. Впервые это уравнение появилось вовсе не в волновых задачах, а при изучении геометрии поверхностей с гауссовой кривизной $K = -1$. Фактически некоторые из развитых там методов преобразований оказались удивительно ценными при нахождении решения для взаимодействующих уединенных волн, как будет показано в гл. 17. Сравнительно новые задачи, перечисленные теми же авторами, включают следующие.

1. Переход Джозефсона, где $\sin \Phi$ — ток Джозефсона через участок слабой сверхпроводимости между двумя сверхпроводниками; напряжение пропорционально Φ .

2. Дислокации в кристаллах, где появление $\sin \Phi$ связано с периодической структурой рядов атомов.

3. Распространение в ферромагнитных материалах волн, связанных с вращением направления намагниченности.

4. Лазерные импульсы в двухфазной среде, где переменные также можно выразить через вращающийся вектор.

Скотт далее описывает свою конструкцию механической модели с жесткими маятниками, подвешенными через короткие интервалы вдоль натянутой проволоки. Крутильные волны, распространяющиеся вдоль проволоки, удовлетворяют волновому уравнению, а маятники создают восстанавливающую силу, пропорциональную $\sin \varphi$, где φ — угловое отклонение. Скотт смог воспроизвести волны, соответствующие многим решениям уравнения Син-Гордона.

Уравнение (14.1) рассматривалось также Шиффом [1] для случая кубической нелинейности и Перрингом и Скирмом [1] для $V'(\varphi) = \sin \varphi$ в связи с модельными исследованиями в теории элементарных частиц.

В этой главе анализ проводится для произвольного потенциала $V(\varphi)$ с надлежащими свойствами. Выбор

$$V(\varphi) = \frac{1}{2} \varphi^2 + \sigma \varphi^4$$

наиболее прост для запоминания; к тому же это — корректное разложение почти линейной теории для четных функций $V(\varphi)$. В случае разложения по малой амплитуде уравнения Син-Гордона $\sigma = -1/24$.

Проверим сначала существование периодических волновых пакетов. Для того чтобы их получить, положим, как обычно,

$$\varphi = \Psi(\theta), \quad \theta = kx - \omega t. \quad (14.2)$$

После подстановки имеем

$$(\omega^2 - k^2) \Psi_{\theta\theta} + V'(\Psi) = 0, \quad (14.3)$$

что после интегрирования дает

$$\frac{1}{2} (\omega^2 - k^2) \Psi_{\theta}^2 + V(\Psi) = A. \quad (14.4)$$

Мы обозначаем постоянную интегрирования буквой A , хотя раньше эта буква использовалась для обозначения комплексной амплитуды в линейных задачах. Теперь в аналогичном контексте будет фигурировать только вещественная амплитуда a , так что недоразумений не возникнет. Здесь A — по-прежнему амплитудный параметр; в линейном случае $V(\Psi) = \frac{1}{2} \Psi^2$ он связан с фактической амплитудой a соотношением $A = \frac{1}{2} a^2$.

Решение уравнения (14.4) можно записать в виде

$$\theta = \left\{ \frac{1}{2} (\omega^2 - k^2) \right\}^{1/2} \int \frac{d\Psi}{\{A - V(\Psi)\}^{1/2}}; \quad (14.5)$$

в частности, если $V(\Psi)$ — полином третьего либо четвертого порядка или тригонометрическая функция, $\Psi(\theta)$ можно выразить через эллиптические функции. Периодические решения получаются тогда, когда Ψ осциллирует между двумя простыми нулями выражения $A - V(\Psi)$. В этих нулях производная $\Psi_{\theta} = 0$ и график

решения имеет максимум или минимум; эти точки достигаются при конечных значениях θ , поскольку интеграл (14.5) сходится, когда нули простые. Обозначив эти нули через Ψ_1 и Ψ_2 , мы пока ограничимся случаем

$$\Psi_1 \leq \Psi \leq \Psi_2, \quad A - V(\Psi) \geq 0, \quad \omega^2 - k^2 > 0. \quad (14.6)$$

Период по θ можно нормировать на 2π (что удобно в линейном пределе), и тогда имеем

$$2\pi = \left\{ \frac{1}{2} (\omega^2 - k^2) \right\}^{1/2} \oint \frac{d\Psi}{\{A - V(\Psi)\}^{1/2}}, \quad (14.7)$$

где $\oint$ означает интеграл по полной осцилляции переменной Ψ от Ψ_1 до Ψ_2 и обратно. Знак квадратного корня необходимо соответствующим образом изменять для обеих частей цикла. Интеграл можно также интерпретировать как интеграл по замкнутому контуру вокруг разреза от Ψ_1 до Ψ_2 в комплексной Ψ -плоскости.

В линейном случае $V(\Psi) = \frac{1}{2} \Psi^2$ периодическое решение имеет вид

$$\Psi = a \cos \theta, \quad A = \frac{a^2}{2}; \quad (14.8)$$

амплитуда a выпадает из равенства (14.7), которое переходит просто в линейное дисперсионное соотношение

$$\omega^2 - k^2 = 1. \quad (14.9)$$

В нелинейном случае амплитудный параметр A не выпадает из равенства (14.7) и мы получаем характерную зависимость дисперсионного соотношения от амплитуды.

Если амплитуда мала и потенциал V представлен рядом

$$V = \frac{1}{2} \Psi^2 + \sigma \Psi^4 + \dots, \quad (14.10)$$

то имеем

$$\Psi = a \cos \theta + \frac{1}{8} \sigma a^3 \cos 3\theta + \dots, \quad (14.11)$$

$$\omega^2 - k^2 = 1 + 3\sigma a^2 + \dots, \quad (14.12)$$

$$A = \frac{1}{2} a^2 + \frac{9}{8} \sigma a^4 + \dots \quad (14.13)$$

Это разложения Стокса, которые можно получить либо прямой подстановкой в уравнения (14.3) — (14.4), либо разложением точных выражений (14.5) и (14.7), полученных выше. Следует заметить, что a — амплитуда первого члена в (14.11); она несколько отличается от точной амплитуды

$$a + \frac{1}{8} \sigma a^3 + \dots$$

14.2. Начальные сведения о модуляции

В гл. 11 мы убедились в том, что в простейшем случае одномерных волн в однородной среде модуляции *линейного* волнового пакета можно описать уравнениями

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0, \quad (14.14)$$

$$\frac{\partial a^2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (C_0 a^2) = 0, \quad (14.15)$$

где $\omega = \omega_0(k)$ задается линейным дисперсионным соотношением, а $C_0 = \omega'_0(k)$ — линейная групповая скорость. (Индекс нуль добавлен теперь для того, чтобы отмечать линейные значения.) Решающее качественное влияние нелинейности состоит в зависимости ω от a , что связывает уравнение (14.14) с уравнением (14.15). Для сравнительно небольших амплитуд можно, следуя Стоксу, представить ω в виде ряда

$$\omega = \omega_0(k) + \omega_2(k) a^2 + \dots, \quad (14.16)$$

и тогда уравнение (14.14) примет вид

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \{\omega'_0(k) + \omega'_2(k) a^2\} \frac{\partial k}{\partial x} + \omega_2(k) \frac{\partial a^2}{\partial x} = 0. \quad (14.17)$$

Наиболее существенным членом является $\omega_2(k) \partial a^2 / \partial x$, поскольку он содержит производную от a и приводит к поправке $O(a)$ к характеристическим скоростям. Другой новый член всего лишь подправляет коэффициент существовавшего ранее члена с $\partial k / \partial x$ и, следовательно, дает вклад только на уровне $O(a^2)$. Аналогичным образом для малых амплитуд нелинейные добавки в (14.15) имеют порядок a^4 и приводят к поправкам порядка a^2 к коэффициентам существовавших ранее членов с $\partial a^2 / \partial x$ и $\partial k / \partial x$. Следовательно, в первом приближении нелинейные эффекты можно учесть очень просто, используя только новое дисперсионное соотношение и уравнения

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \omega'_0(k) \frac{\partial k}{\partial x} + \omega_2(k) \frac{\partial a^2}{\partial x} = 0, \quad (14.18)$$

$$\frac{\partial a^2}{\partial t} + \omega'_0(k) \frac{\partial a^2}{\partial x} + \omega''_0(k) a^2 \frac{\partial k}{\partial x} = 0. \quad (14.19)$$

Согласно стандартной процедуре, описанной в гл. 5, характеристическая форма этой системы сводится к уравнениям

$$\frac{1}{2} \operatorname{sgn}(\omega''_0) \left\{ \frac{\omega''_0(k)}{\omega_2(k)} \right\}^{1/2} dk \pm da = 0 \quad (14.20)$$

вдоль характеристик

$$\frac{dx}{dt} = \omega_0(k) \pm \{\omega_2(k) \omega_0''(k)\}^{1/2} a. \quad (14.21)$$

Можно проверить, что дополнительные члены порядка a^2 , добавленные в (14.18) — (14.19), приводят в (14.20) — (14.21) только к членам порядка a^2 .

Эта простая формулировка уже приводит к некоторым замечательным результатам. В случае $\omega_2 \omega_0'' > 0$ характеристики вещественны и система гиперболическая. Нелинейные поправки расщепляют двойную характеристическую скорость, и мы имеем *две* скорости, определяемые формулой (14.21). В общем случае исходное возмущение или модулирующий источник внесут возмущения в оба семейства характеристик. Если исходное возмущение сосредоточено в конечной области, например имеет вид горба на однородном в остальном пакете, то оно со временем распадется на два. Это совершенно не похоже на линейное поведение, где такой горб может искажаться вследствие зависимости $C_0(k)$ от k , но не распадается.

Второе следствие нелинейности в гиперболическом случае состоит в том, что модуляции типа «сжатия» будут искажаться и становиться круче характерным гиперболическим образом, изученным в части I. Здесь возникает вопрос о многозначных решениях и опрокидывании.

Когда $\omega_2 \omega_0'' < 0$, характеристики мнимы и система эллиптическая. В контексте волнового распространения это приводит к некорректно поставленным задачам. Кроме всего прочего, это означает, что малые возмущения будут со временем расти и в этом смысле периодический волновой пакет *неустойчив*. Эллиптический случай не является чем-либо необычным, и теория модуляций дает интересный подход к некоторым аспектам теории устойчивости.

Можно отметить, что для волн Стокса на глубокой воде дисперсионное соотношение (13.124) дает

$$\omega_0(k) = g^{1/2} k^{1/2}, \quad \omega_2(k) = 1/2 g^{1/2} k^{3/2}, \quad (14.22)$$

так что мы имеем неустойчивый случай с $\omega_0'' \omega_2 < 0$. Удивительно, что эта неустойчивость не была обнаружена в процессе длительной дискуссии о существовании периодических решений. В случае уравнения Клейна — Гордона разложение (14.12) дает

$$\omega_0(k) = (k^2 + 1)^{1/2}, \quad \omega_2(k) = 3/2 \sigma (k^2 + 1)^{-1/2}. \quad (14.23)$$

Знак выражения $\omega_0'' \omega_2$ совпадает со знаком коэффициента σ ; уравнения модуляций являются гиперболическими при $\sigma > 0$ и эллиптическими при $\sigma < 0$. Для почти линейных волн уравнение Син-Гордона имеет $\sigma < 0$, так что во всех задачах, описываемых этим уравнением, почти линейные волновые пакеты неустойчивы.

Мы вернемся ко всем этим вопросам после того, как уравнения модуляций будут подробно изучены и обобщены на полностью нелинейный случай.

14.3. Вариационный подход к теории модуляции

Полные уравнения модуляций получаются в особенно простом и выразительном виде, если использовать вариационный подход, описание которого было начато в гл. 11. Сначала рассмотрим применение этого подхода к нелинейным задачам на типичном примере уравнения Клейна — Гордона. После этого станет ясным, как действовать в общем случае, и мы сможем обосновать наш метод.

В случае уравнения Клейна — Гордона периодический волновой пакет описывается формулами (14.4) — (14.5) и содержит параметры ω , k и A . Нужно найти уравнения, которым удовлетворяют эти параметры для медленно меняющихся волновых пакетов. Уравнение (14.1) является уравнением Эйлера для вариационного принципа

$$\delta \iint \left\{ \frac{1}{2} \varphi_t^2 - \frac{1}{2} \varphi_x^2 - V(\varphi) \right\} dx dt = 0; \quad (14.24)$$

это легко проверить с помощью (11.74). Элементарное решение, соответствующее решению $\varphi = a \cos(\theta + \eta)$, используемому в линейных задачах, имеет вид $\varphi = \Psi(\theta)$. (К (14.5) можно добавить сдвиг фазы η , но в уравнениях модуляций он сокращается.) Теперь нужно вычислить лагранжиан и его среднее значение для $\varphi = \Psi(\theta)$, считая при этом ω , k и A постоянными. Имеем

$$L = \frac{1}{2} (\omega^2 - k^2) \Psi_0^2 - V(\Psi),$$

и среднее значение по одному периоду по θ равно

$$\bar{L} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1}{2} (\omega^2 - k^2) \Psi_0^2 - V(\Psi) \right\} d\theta. \quad (14.25)$$

В принципе функция Ψ полностью известна из выражения (14.5). Однако лучше не пользоваться интегральным выражением, а обратиться непосредственно к уравнению (14.4) и выразить $\bar{L}$ через ω , k и A . Выделим последовательные шаги:

$$\begin{aligned} \bar{L} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\omega^2 - k^2) \Psi_0^2 d\theta - A = \\ &= \frac{1}{2\pi} (\omega^2 - k^2) \int_0^{2\pi} \Psi_0 d\Psi - A = \\ &= \frac{1}{2\pi} \{2(\omega^2 - k^2)\}^{1/2} \oint \{A - V(\Psi)\}^{1/2} d\Psi - A. \end{aligned} \quad (14.26)$$

Последний интеграл по замкнутому контуру представляет собой вполне определенную функцию от A , в которую Ψ входит лишь как переменная интегрирования. Обозначение $\mathcal{L}(\omega, k, A)$ мы сохраняем для этой окончательной формы усредненного лагранжиана $\bar{L}$.

Когда ω, k, A являются медленно меняющимися функциями от x и t , мы, как и ранее, постулируем усредненный вариационный принцип

$$\delta \int \mathcal{L}(\omega, k, A) dx dt = 0. \quad (14.27)$$

В качестве независимых функций следует рассматривать $\theta(x, t)$ и $A(x, t)$, причем $\omega = -\theta_t$, $k = \theta_x$. Вариационные уравнения имеют вид

$$\delta A: \quad \mathcal{L}_A = 0, \quad (14.28)$$

$$\delta \theta: \quad \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{L}_\omega - \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{L}_k = 0. \quad (14.29)$$

После того как вариации найдены, мы опять возвращаемся к переменным ω, k и A и добавляем уравнение совместности

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0, \quad (14.30)$$

получаемое исключением фазы θ . Уравнения и их вывод из (14.27), конечно, такие же, как и в линейном случае с незначительным изменением, связанным с переходом от амплитудной переменной a к A . Единственный новый элемент в нелинейной теории — вычисление усредненного лагранжиана $\mathcal{L}(\omega, k, A)$.

Уравнение (14.28) приводит к функциональной зависимости между ω, k и A , которая не может быть ничем иным, кроме дисперсионного соотношения. Для уравнения Клейна — Гордона с $\mathcal{L}$, заданным формулой (14.26), мы убеждаемся, что оно действительно приводит к правильному результату (14.7). Система (14.28) — (14.30) является точной нелинейной формой уравнений модуляций (14.18) — (14.19). Прежде чем обсудить свойства этих уравнений и их различные обобщения, обратимся теперь к обоснованию вариационного подхода.

14.4. Обоснование вариационного подхода

Для наших целей достаточно подробно рассмотреть случай одномерных волн, описываемых вариационным принципом

$$\delta \iint L(\varphi_t, \varphi_x, \varphi) dx dt = 0. \quad (14.31)$$

Случаи большего числа измерений, большего числа зависимых переменных и неоднородной среды рассматриваются аналогично. Уравнение Эйлера для (14.31) имеет вид

$$-\frac{\partial}{\partial t} L_1 + \frac{\partial}{\partial x} L_2 - L_3 = 0, \quad (14.32)$$

где L_j означают производные

$$L_1 = \frac{\partial L}{\partial \varphi_t}, \quad L_2 = \frac{\partial L}{\partial \varphi_x}, \quad L_3 = \frac{\partial L}{\partial \varphi}. \quad (14.33)$$

Уравнение (14.32) — это уравнение в частных производных второго порядка для функции $\varphi(x, t)$, и мы предполагаем, что оно имеет решения вида периодических волновых пакетов соответствующего типа.

В задачах о медленных модуляциях параметр ε вводится при помощи начальных или граничных условий (как это было в различных случаях, рассмотренных в 11.8); ε характеризует отношение типичной длины волны или периода к типичной длине или интервалу времени для модуляций. Предполагается, что ε мало, но мы не будем ограничивать амплитуду и потребуем только, чтобы она менялась медленно.

Сначала следует точно описать модулированный волновой пакет. Если x и t измеряются в единицах типичных длины волны и периода, то медленно меняющиеся величины будут функциями от εx и εt ; параметры модуляций, такие, как k и ω , будут функциями такого типа. Однако сама функция φ , кроме того, быстро осциллирует. Чтобы учесть все эти требования, φ рассматривается как функция от *трех* переменных: фазы θ , εx и εt . При этом θ записывается в виде $\varepsilon^{-1}\Theta(\varepsilon x, \varepsilon t)$, что обеспечивает сравнительно быстрые осцилляции и надлежащую зависимость $k = \theta_x$ и $\omega = -\theta_t$ от εx и εt . Таким образом, полагаем

$$\varphi = \Phi(\theta, X, T; \varepsilon), \quad (14.34)$$

$$\theta = \varepsilon^{-1}\Theta(X, T), \quad X = \varepsilon x, \quad T = \varepsilon t. \quad (14.35)$$

Определим

$$\nu(X, T) = -\omega(X, T) = \Theta_T, \quad k(X, T) = \Theta_X \quad (14.36)$$

как отрицательную частоту и волновое число. (В этом общем случае мы предпочитаем $\nu = -\omega$ для сохранения симметрии между x и t .) В силу приведенных выше формул,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \nu \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial T}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = k \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial X},$$

так что члены, связанные с осцилляциями и медленными модуляциями, фигурируют по отдельности.

В задачах о колебаниях в обычных механических системах переменная x отсутствует и метод решения сводится к выделению в явном виде зависимости для двух масштабов времени. Он известен под названием «метод двух времен» («two-timing») — выразительное и удобное название даже при наличии x -колебаний с двумя масштабами длины. Эффективность этого метода основывается на том, что, хотя в начале и в конце имеется правильное число независимых переменных, на промежуточных этапах выгодно ввести зависимость от дополнительных переменных. В данном случае, в силу соотношений (14.35), φ фактически является функцией от x и t , но на соответствующих этапах анализа Φ рассматривается как функция от *трех* независимых переменных θ , X , T . В обычном методе двух времен такая дополнительная свобода позволяет избавиться от векового и прочих нежелательных членов. Здесь применительно к вариационному принципу он используется иным, но эквивалентным образом.

В геометрической оптике разложение (типа ВКБ), рассмотренное в § 11.8, эквивалентно выбору

$$\varphi(x, t) \sim e^{i\epsilon^{-1}\Theta(\epsilon x, \epsilon t)} \sum \epsilon^n A_n(\epsilon x, \epsilon t). \quad (14.37)$$

Методу двух времен соответствует разложение

$$\Phi(\theta, X, T; \epsilon) \sim e^{i\theta} \sum \epsilon^n \overline{A_n}(X, T) \quad (14.38)$$

с тем же окончательным результатом. В любом случае экспоненциальная зависимость от θ ограничена линейными задачами. Для нелинейных задач аналогом было бы разложение

$$\Phi(\theta, X, T; \epsilon) \sim \sum \epsilon^n \Phi^{(n)}(\theta, X, T) \quad (14.39)$$

и последовательное нахождение функций $\Phi^{(n)}$. Однако в эквивалентном вариационном подходе мы не используем таких исходных разложений, а работаем непосредственно с выражениями (14.34) — (14.36) и избегаем большей части утомительных выкладок традиционной теории возмущений.

Подставив (14.34) и (14.35) в основное уравнение Эйлера (14.32), получим

$$\nu \frac{\partial L_1}{\partial \theta} + \epsilon \frac{\partial L_1}{\partial T} + k \frac{\partial L_2}{\partial \theta} + \epsilon \frac{\partial L_2}{\partial X} - L_3 = 0, \quad (14.40)$$

где производные L_j зависят от аргументов следующим образом:

$$L_j = L_j(\nu \Phi_\theta + \epsilon \Phi_T, k \Phi_\theta + \epsilon \Phi_X, \Phi). \quad (14.41)$$

При выводе уравнения (14.40) было использовано соотношение $\theta = \epsilon^{-1}\Theta(X, T)$, но теперь оно опускается. Это решающий шаг рассматриваемого метода. Уравнение (14.40) теперь рассматривается как уравнение для функции $\Phi(\theta, X, T)$ трех независимых переменных θ , X , T . Уравнение содержит также функцию $\Theta(X, T)$

через ее производные $v = \Theta_T$, $k = \Theta_X$; исходные соотношения между Θ , v , k и аргументом θ в Φ также опускаются. Ясно, что если удастся найти решения для $\Phi(\theta, X, T)$ и $\Theta(X, T)$, то $\Phi(\varepsilon^{-1}\Theta, X, T)$ будет решением исходной задачи. Дополнительная свобода выбора $\Theta(X, T)$ используется для того, чтобы обеспечить надлежащее поведение функции $\Phi(\theta, X, T)$.

Выбор функции $\Theta(X, T)$ производится различными способами в зависимости от конкретного варианта метода, но все они эквивалентны. Здесь мы должны с самого начала наложить требование периодичности Φ и ее производных по θ . (В других вариантах оставляют $\Theta(X, T)$ сначала произвольной, находят в общем выражении для Φ нежелательные вековые члены, пропорциональные θ , и затем исключают их соответствующим выбором функции Θ .) Период можно нормировать на 2π , так что мы наложим условие, что Φ и ее производные должны быть 2π -периодичны по θ .

Для того чтобы обеспечить выполнение этого условия, заметим, что уравнение (14.40) можно записать в виде закона сохранения

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \{ (vL_1 + kL_2) \Phi_\theta - L \} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T} (\Phi_\theta L_1) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial X} (\Phi_\theta L_2) = 0. \quad (14.42)$$

Тогда при интегрировании по θ от 0 до 2π вклад первого члена обращается в нуль, в силу условия периодичности, и мы имеем

$$\frac{\partial}{\partial T} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi_\theta L_1 d\theta + \frac{\partial}{\partial X} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi_\theta L_2 d\theta = 0. \quad (14.43)$$

Уравнения (14.40) и (14.43) образуют систему из двух уравнений для $\Phi(\theta, X, T)$ и $\Theta(X, T)$.

Достопримечательно и достойно удивления, что эти уравнения для Φ и Θ в точности совпадают с уравнениями Эйлера для вариационного принципа

$$\delta \int \int \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} L(v\Phi_\theta + \varepsilon\Phi_T, k\Phi_\theta + \varepsilon\Phi_X, \Phi) d\theta dX dT = 0. \quad (14.44)$$

Вариации $\delta\Phi$ приводят к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial \theta} L_{\Phi_\theta} + \frac{\partial}{\partial T} L_{\Phi_T} + \frac{\partial}{\partial X} L_{\Phi_X} - L_\Phi = 0,$$

которое в частном случае лагранжиана L из (14.44) совпадает с уравнением (14.40). Вариации $\delta\Theta$ дают

$$\frac{\partial}{\partial T} \bar{L}_v + \frac{\partial}{\partial X} \bar{L}_k = 0, \quad (14.45)$$

где

$$\bar{L} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} L(v\Phi_\theta + \varepsilon\Phi_T, k\Phi_\theta + \varepsilon\Phi_X, \Phi) d\theta; \quad (14.46)$$

это совпадает с (14.43). Но самое удивительное — это то, что (14.44) является *точной* формой усредненного вариационного принципа! Мы не только обосновали вариационный подход, но получили мощный и компактный базис для всей теории возмущений. Несколько странно, что до сих пор мы не использовали явно предположение о малости параметра ε . Неявно, однако, это предположение содержится в выборе функциональной формы функции Φ и в требовании периодичности Φ по θ .

В низшем порядке приближения вариационный принцип (14.44) дает

$$\delta \int \int \bar{L}^{(0)} dX dT = 0, \quad (14.47)$$

$$\bar{L}^{(0)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} L\{v\Phi_\theta^{(0)}, k\Phi_\theta^{(0)}, \Phi^{(0)}\} d\theta. \quad (14.48)$$

Вариационные уравнения имеют вид

$$\delta\Phi^{(0)}: \quad \frac{\partial}{\partial\theta} \{vL_1^{(0)} + kL_2^{(0)}\} - L_3^{(0)} = 0, \quad (14.49)$$

$$\delta\Theta: \quad \frac{\partial}{\partial T} \bar{L}_v^{(0)} + \frac{\partial}{\partial X} \bar{L}_k^{(0)} = 0; \quad (14.50)$$

это, конечно, приближения низшего порядка для уравнений (14.40) и (14.45). Поскольку в уравнении (14.49) отсутствуют производные функции $\Phi^{(0)}$ по X , T , это фактически обыкновенное дифференциальное уравнение для $\Phi^{(0)}$ как функции от θ . Оно имеет очевидный первый интеграл (соответствующий приближению низшего порядка для (14.42)):

$$\{vL_1^{(0)} + L_2^{(0)}\} \Phi_\theta^{(0)} - L^{(0)} = A(X, T). \quad (14.51)$$

Уравнения (14.49) и (14.51) — это обыкновенные дифференциальные уравнения, описывающие однородный периодический волновой пакет, но с той разницей, что параметры v , k и A теперь являются функциями от X и T . Зависимость от θ в точности та же, что и для периодического волнового пакета; зависимость параметров v , k и A от X и T обеспечивает модуляцию. Явное отделение переменной θ от X и T автоматически позволяет интегрировать по θ при фиксированных v , k и A ; теперь ясно, что интегрирования в (14.25) и (14.26) проводятся именно в таком смысле.

Объединив решения уравнения (14.51) с выражениями (14.47) — (14.48), получим в точности вариационный подход, предложенный

ранее. Теперь он обоснован как первое приближение формальной теории возмущений.

При фактическом использовании данного метода возникает важный вопрос, который следует рассмотреть в общем виде. Уравнение (14.51) в его настоящем виде можно использовать для нахождения как функции $\Phi^{(0)}$, так и дисперсионного соотношения между v , k , A (ср. (14.5) и (14.7) для уравнения Клейна — Гордона). Выкладки в (14.26) показывают, что при таком использовании равенства (14.51) в (14.48) можно избежать нахождения функции $\Phi^{(0)}$ (которая с точностью до обозначений совпадает с Ψ) в явном виде и дисперсионное соотношение можно рассматривать как дополнительное вариационное уравнение, которое выводится из (14.47). Это намного предпочтительнее, поскольку тогда форма усредненного лагранжиана упрощается и, что более существенно, все уравнения, связывающие медленно изменяющиеся параметры v , k , A , объединены общим вариационным принципом. Как описать эту процедуру в общем виде? Это именно тот вопрос, о котором шла речь выше. Задача заключается в том, чтобы из уравнения (14.51) извлечь достаточную информацию о функциональной форме функции $\Phi^{(0)}$, не используя при этом полную информацию о дисперсионном соотношении. Сейчас мы покажем, как это можно сделать.

14.5. Оптимальное использование вариационного принципа

В линейном случае при отделении функциональной формы функции $\Phi^{(0)}$ от дисперсионного соотношения трудностей не возникает. Мы заранее знаем, что решение уравнения (14.49) или (14.51) примет вид

$$\Phi^{(0)} = a \cos(\theta + \eta),$$

где $a(X, T)$ — амплитуда, связанная с $A(X, T)$ и используемая вместо нее. Фазовый параметр $\eta(X, T)$ при построении усредненного лагранжиана (14.48) выпадает и не играет роли в этом приближении низшего порядка. Эта довольно тривиальная информация о $\Phi^{(0)}$ является единственной информацией, извлеченной из (14.51), и не включает дисперсионного соотношения. Когда эта функция $\Phi^{(0)}$ подставлена в (14.48), для усредненного лагранжиана получается выражение

$$\mathcal{L}(v, k, a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} L(-va \sin \theta, -ka \sin \theta, a \cos \theta) d\theta.$$

В почти линейном случае трудностей также не возникает. Можно использовать разложение Стокса

$$\Phi^{(0)} = a \cos(\theta + \eta) + a_2 \cos(2\theta + \eta_2) + a_3 \cos(3\theta + \eta_3) + \dots,$$

опять не включая в рассмотрение дисперсионное соотношение. Соотношения между $a_2, a_3, \dots, \eta_2, \eta_3, \dots$ и a, η можно либо найти из (14.49) или (14.51), либо оставить произвольными и также определить при помощи вариационного принципа. Например, в случае уравнения Клейна — Гордона с $V(\varphi)$ вида (14.10) положим

$$\Phi^{(0)} = a \cos \theta + a_3 \cos 3\theta + a_5 \cos 5\theta + \dots$$

(Легко видеть заранее, что достаточно использовать только члены нечетных порядков.) Тогда ¹⁾

$$\begin{aligned} \bar{L}^{(0)} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1}{2} (\bar{v}^2 - k^2) \Phi_\theta^{(0)} - \frac{1}{2} \Phi^{(0)2} - \sigma \Phi^{(0)4} \right\} d\theta = \\ &= \frac{1}{4} (v^2 - k^2 - 1) a^2 - \frac{3\sigma a^4}{8} + \left(2a_3^2 - \frac{1}{2} \sigma a^3 a_3 \right) + \dots \end{aligned}$$

Вариация по a_3 показывает, что $a_3 = \frac{1}{8} \sigma a^3$, что согласуется с разложением (14.11). Подставив это выражение для a_3 в $\bar{L}^{(0)}$, получим

$$\mathcal{L}(v, k, a) = \frac{1}{4} (v^2 - k^2 - 1) a^2 - \frac{3}{8} \sigma a^4 - \frac{1}{32} \sigma^2 a^6 + \dots \quad (14.52)$$

Вариация по a теперь дает дисперсионное соотношение (14.12).

В полностью нелинейном случае труднее отделить функциональную форму функции $\Phi^{(0)}$ от дисперсионного соотношения. Однако это можно сделать, записав уравнения в виде уравнений Гамильтона.

Преобразование Гамильтона

Это преобразование будет применено здесь только к приближению низшего порядка (14.47) — (14.51), так что для упрощения обозначений мы опустим у всех величин индекс нуль. Идея состоит в исключении величины Φ_θ в пользу производной $\partial L / \partial \Phi_\theta$ точно так же, как в обычной механике $\dot{q}$ исключается в пользу обобщенного импульса $p = \partial L / \partial \dot{q}$. Новая переменная определяется как

$$\Pi = \frac{\partial L}{\partial \Phi_\theta} = v L_1 + k L_2, \quad (14.53)$$

а гамильтониан $H(\Pi, \Phi; v, k)$ определяется формулой

$$H = \Phi_\theta \frac{\partial L}{\partial \Phi_\theta} - L = \Phi_\theta v L_1 + k L_2 - L. \quad (14.54)$$

¹⁾ Член, пропорциональный $(v^2 - k^2 - 1) a^2$, опущен, поскольку из последующих уравнений видно, что $v^2 - k^2 - 1 = O(a^2)$.

Согласно определению преобразования,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = \frac{\partial H}{\partial \Pi}, \quad (14.55)$$

и, в силу (14.49),

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \theta} = -\frac{\partial H}{\partial \Phi}. \quad (14.56)$$

Эти равенства заменяют уравнение второго порядка (14.49) для Φ двумя уравнениями первого порядка для Φ и Π . Теперь можно переписать вариационный принцип (14.47) с учетом того, что

$$\bar{L} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\Pi \Phi_\theta - H) d\theta. \quad (14.57)$$

Кроме того, возможно важное обобщение. В исходной форме вариация $\delta \Phi_\theta$ связана с $\delta \Phi$; следовательно, вариация $\delta \Pi$ связана с вариацией по Φ равенством (14.53) и уравнение (14.55) является следствием преобразования, а не вариационным уравнением. Однако заметим просто, что как (14.55), так и (14.56) следуют из (14.57), если Φ и Π варьируются *независимо*. Мы, следовательно, вправе сделать такое обобщение. Далее следует заметить, что (14.51) представляет собой не что иное, как интеграл энергии

$$H(\Pi, \Phi; \nu, k) = A(X, T) \quad (14.58)$$

для системы (14.55) — (14.56). Более того, равенство (14.58) определяет функцию

$$\Pi(\Phi; \nu, k, A).$$

Без использования связи Π с Φ_θ , которая теперь рассматривается как одно из вариационных уравнений, невозможно вывести еще и дисперсионное соотношение. Таким образом, достигнуто желаемое разделение уравнения (14.51) на информацию о форме решений (теперь даваемую зависимостью Π от Φ) и дисперсионное соотношение. Наконец, поскольку стационарные значения выражения (14.57), как мы знаем, удовлетворяют равенству (14.58), можно ограничиться вариациями функций, уже удовлетворяющих равенству (14.58). Тогда усредненный лагранжиан (14.57) оказывается равным

$$\mathcal{L}(\nu, k, A) = \frac{1}{2\pi} \oint \Pi(\Phi; \nu, k, A) d\Phi - A, \quad (14.59)$$

где $\Pi(\Phi; \nu, k, A)$ — функция, определяемая из равенства (14.58). Вариационный принцип принимает вид

$$\delta \iint \mathcal{L}(\nu, k, A) dX dT = 0.$$

Вариация по A — единственное, что осталось от вариаций по Φ и Π . Вариационные уравнения дают

$$\delta A: \quad \mathcal{L}_A = 0,$$

$$\delta \Theta: \quad \frac{\partial}{\partial T} \mathcal{L}_v + \frac{\partial}{\partial X} \mathcal{L}_k = 0,$$

и к ним добавляется условие совместности

$$\frac{\partial k}{\partial T} - \frac{\partial v}{\partial X} = 0.$$

Это и есть уравнения (14.28) — (14.30) с $v = -\omega$.

В случае уравнения Клейна — Гордона лагранжиан

$$L = \frac{1}{2} (v^2 - k^2) \Phi_0^2 - V(\Phi)$$

и преобразование Гамильтона дает

$$\Pi = \frac{\partial L}{\partial \Phi_0} = (v^2 - k^2) \Phi_0,$$

$$H = \Phi_0 \frac{\partial L}{\partial \Phi_0} - L = \frac{1}{2} (v^2 - k^2)^{-1} \Pi^2 + V(\Phi).$$

Из интеграла $H = A$ получаем

$$\Pi = \{2(v^2 - k^2)\}^{1/2} \{A - V(\Phi)\}^{1/2}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2\pi} \oint \Pi d\Phi - A = \\ &= \frac{1}{2\pi} \{2(v^2 - k^2)\}^{1/2} \oint \{A - V(\Phi)\}^{1/2} d\Phi - A, \end{aligned}$$

что согласуется с (14.26).

Естественно, преобразование Гамильтона можно использовать также и в линейном или почти линейном случаях. Выражения для $\mathcal{L}$ при этом могут отличаться по форме от полученных ранее, но, конечно, результирующие вариационные уравнения будут эквивалентными.

14.6. Замечания о теории возмущений

Обычно, применяя теорию возмущений, подставляют подходящее разложение по степеням ε непосредственно в дифференциальные уравнения рассматриваемой задачи, вводят цепочку уравнений для последовательных порядков, а затем предпринимают меры по обеспечению равномерности аппроксимации. Именно так Льюк [1] впервые обосновал *результаты* вариационного подхода. Раз-

ложение (14.39) подставляется в уравнение для Φ , приводя к уравнениям, которые можно схематически записать в виде

$$E_0 \{\Phi^{(0)}\} = 0,$$

$$E_1 \{\Phi^{(1)}, \Phi^{(0)}\} = F_1 \{\Phi^{(0)}\} \quad \text{и т. д.}$$

Нулевое уравнение для $\Phi^{(0)}$ эквивалентно уравнению (14.49). Оно решается относительно $\Phi^{(0)}$, находится дисперсионное соотношение, связывающее v , k и A , но их зависимость от X и T на этом уровне не определена. Уравнение для $\Phi^{(1)}$ содержит только производные по θ от $\Phi^{(1)}$ и фактически является обыкновенным дифференциальным уравнением. Его решение включает неограниченные члены, пропорциональные θ , если на $F_1 \{\Phi^{(0)}\}$ не наложены определенные условия. Эти «вековые» члены должны быть устранены для обеспечения равномерности аппроксимации при больших θ .

Соответствующее условие, наложенное на $F_1 \{\Phi^{(0)}\}$, приводит к дополнительному уравнению для v , k , A , которое полностью определяет решение низшего порядка. В следующих уравнениях для $\Phi^{(n)}$ появляются новые параметры и должны быть наложены новые «вековые» условия.

Априорное условие периодичности Φ эквивалентно устранению вековых членов. Поэтому последовательные приближения условия периодичности (14.43) будут проявляться как вековые условия в более традиционной схеме. Мы видим, что, даже следуя традиционной схеме, выгодно исходить из уравнений (14.42) и (14.43). Но, поскольку уравнения (14.42) и (14.43) эквивалентны вариационному принципу (14.44), еще лучше подставить разложение непосредственно в (14.44) и использовать вариационный принцип для получения как уравнений для $\Phi^{(n)}$, так и для вековых условий. Таким образом, вариационный подход не следует рассматривать как независимый метод. Он включает обычную теорию возмущений, выделяя основные моменты и позволяя формулировать результаты в более общем виде.

Вариационный подход имеет и другие преимущества. Вариационный принцип (14.44) установлен независимо от какой-либо конкретной формы зависимости от ε . Более того, функция Θ также может зависеть от ε ; мы считали, что она не зависит от ε , только ради простоты исходного изложения. Можно использовать разложения по степеням ε для Φ , или для Θ , или для обеих этих функций, но мы вправе выбрать и разложения другого вида. Например, в почти линейном случае можно использовать разложения по степеням амплитуды, или, что то же самое, ряд Фурье для Φ . Это и будет сделано при рассмотрении приближений высшего порядка в § 15.5.

14.7. Обобщения на большее число переменных

Обобщение на большее число пространственных измерений очевидно. Для плоской периодической волны решение имеет вид $\varphi = \Psi(\theta)$, где $\theta = \theta(\mathbf{x}, t)$ зависит от вектора $\mathbf{x}$, и распространение происходит в направлении волнового вектора $\mathbf{k} = \theta_{\mathbf{x}}$. Усредненный лагранжиан переходит в $\mathcal{L}(\omega, \mathbf{k}, A)$, и становятся возможными модуляции в пространстве (т. е. медленно изгибающиеся фазовые поверхности). Уравнения модуляций имеют вид (11.80) — (11.82). В обосновании, проведенном в предыдущем параграфе, потребуются только очевидные изменения, состоящие в замене x, X, k на x_i, X_i, k_i и — в случае необходимости — соответствующих суммированиях.

Случай одного уравнения высшего порядка рассматривается аналогично, лишь с незначительными обобщениями. В вариационном принципе (14.31) и на всех последующих этапах появятся производные высших порядков, но необходимые обобщения очевидны.

Случай большого числа зависимых переменных требует подробного рассмотрения. Прежде всего для линейной системы относительно неизвестных функций $\varphi^{(\alpha)}(\mathbf{x}, t)$ периодические волновые пакеты можно описывать выражениями

$$\varphi^{(\alpha)} = a_{\alpha} \cos \theta + b_{\alpha} \sin \theta.$$

Полученный при их помощи усредненный лагранжиан является функцией от двух наборов a_{α}, b_{α} , а также от ω и $\mathbf{k}$. Соответствующий вариационный принцип

$$\delta \iint \mathcal{L}(\theta_t, \theta_{x_i}, a_{\alpha}, b_{\alpha}) d\mathbf{x} dt = 0 \quad (14.60)$$

приводит к вариационным уравнениям

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{a_{\alpha}} &= 0, \quad \mathcal{L}_{b_{\alpha}} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{L}_{\omega} - \frac{\partial}{\partial x_j} \mathcal{L}_{k_j} &= 0, \\ \frac{\partial k_i}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial x_i} &= 0, \quad \frac{\partial k_i}{\partial x_j} - \frac{\partial k_j}{\partial x_i} = 0. \end{aligned} \quad (14.61)$$

Система уравнений $\mathcal{L}_{a_{\alpha}} = \mathcal{L}_{b_{\alpha}} = 0$ линейна и однородна (поскольку $\mathcal{L}$ квадратичен по a_{α} и b_{α}), и в общем случае ее можно решить, выразив a_{α} и b_{α} через единую амплитуду a . Эти выражения можно снова подставить в лагранжиан и представить $\mathcal{L}$ в виде функций $\mathcal{L}_1(\omega, \mathbf{k}, a)$, так что уравнения модуляций будут такими же, как и в случае одной переменной. Данная подстановка допустима, поскольку ограничения, наложенные на выбор величин a_{α} и b_{α} , удовлетворяют условиям стационарности. Эту эквива-

лентность можно проверить и непосредственно, так как

$$\mathcal{L}_{1a} = \frac{\partial a_\alpha}{\partial a} \mathcal{L}_{a_\alpha} + \frac{\partial b_\alpha}{\partial a} \mathcal{L}_{b_\alpha} = 0,$$

$$\mathcal{L}_{1\omega} = \mathcal{L}_\omega + \frac{\partial a_\alpha}{\partial \omega} \mathcal{L}_{a_\alpha} + \frac{\partial b_\alpha}{\partial \omega} \mathcal{L}_{b_\alpha} = \mathcal{L}_\omega$$

и аналогично $\mathcal{L}_{1k_j} = \mathcal{L}_{k_j}$. В результате подстановок в зависимости от конкретного выбора соотношений могут получиться различные выражения для $\mathcal{L}_1$, но окончательные уравнения будут одни и те же. Это доказывается использованием двух масштабов времени так же, как и выше.

В нелинейном случае обычно имеется система уравнений с соответствующим лагранжианом $L\{\varphi_t^{(\alpha)}, \varphi_x^{(\alpha)}, \varphi^{(\alpha)}\}$, содержащим только функции $\varphi^{(\alpha)}$ и их первые производные. Однако характерно, что для некоторых функций φ в лагранжиане L фигурируют только производные; такие функции являются «потенциалами» в том смысле, что лишь производные φ_t , φ_x являются физическими величинами. Это требует далеко нетривиального обобщения с важными математическими и физическими следствиями. Для решения в виде однородного волнового пакета любую потенциальную переменную $\tilde{\varphi}$ следует представить в виде

$$\tilde{\varphi} = \beta \cdot \mathbf{x} - \gamma t + \tilde{\Phi}(\theta), \quad \theta = \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t \quad (14.62)$$

для того, чтобы обеспечить полную общность. Физические величины содержат только

$$\tilde{\varphi}_t = -\gamma - \omega \tilde{\Phi}_\theta, \quad \tilde{\varphi}_x = \beta + \mathbf{k} \tilde{\Phi}_\theta, \quad (14.63)$$

где $-\gamma$ и β являются средними значениями. Это важные физические величины; например, в случае жидкости они дают среднюю скорость жидкости и среднюю высоту. Более того, наиболее важный нелинейный эффект состоит во взаимодействии модуляций волнового пакета с аналогичными медленными изменениями этих средних величин. Таким образом, в теории модуляций обобщением члена $\beta \cdot \mathbf{x} - \gamma t$ следует считать функцию $\tilde{\theta}(\mathbf{x}, t)$, а γ , β определить равенствами

$$\gamma = -\tilde{\theta}_t, \quad \beta = \tilde{\theta}_x. \quad (14.64)$$

Функция $\tilde{\theta}$ аналогична функции θ и играет в задаче роль псевдофазы. Величины γ и β являются псевдочастотой и псевдоволновым вектором. Далее, для каждого потенциала $\tilde{\varphi}$ в соответствующем уравнении Эйлера

$$\frac{\partial}{\partial t} L_{\tilde{\varphi}_t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot L_{\tilde{\varphi}_x} = 0 \quad (14.65)$$

отсутствует член $L_{\tilde{\varphi}}$, и в процессе анализа это всегда приводит к дополнительному интегралу и к дополнительному параметру B , аналогичному A . Тройки (γ, β, B) , хотя и вспомогательные, подобны основной тройке $(\omega, \mathbf{k}, A)$.

Аналог формулы (14.34) для функции (14.62) имеет вид

$$\tilde{\varphi}(\mathbf{x}, t) = \varepsilon^{-1} \tilde{\Theta}(X, T) + \tilde{\Phi}(\theta, X, T; \varepsilon),$$

где

$$\gamma(X, T) = -\tilde{\Theta}_T, \quad \beta(X, T) = \tilde{\Theta}_X, \quad X = \varepsilon x, \quad T = \varepsilon t$$

и $\tilde{\Phi}$ выбирается периодической по θ . Для лагранжана

$$L(\varphi_t, \varphi_x, \varphi, \tilde{\varphi}_t, \tilde{\varphi}_x)$$

можно показать, что уравнения с двумя масштабами времени и условия 2π -периодичности по θ функций Φ и $\tilde{\Phi}$ эквивалентны точному вариационному принципу, аналогичному (14.44). В низшем порядке он имеет вид

$$\delta \iint \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} L(-\omega\Phi_\theta, \mathbf{k}\Phi_\theta, \Phi, -\gamma - \omega\tilde{\Phi}_\theta, \beta + \mathbf{k}\tilde{\Phi}_\theta) d\theta dX dT = 0. \quad (14.66)$$

Вариационные уравнения, соответствующие вариациям $\delta\Phi$ и $\delta\tilde{\Phi}$, определяют функции Φ и $\tilde{\Phi}$, и мы имеем два интеграла

$$(-\omega L_1 + \mathbf{k} \cdot L_2 - \omega L_4 + \mathbf{k} \cdot L_5) \Phi_\theta - L = A(X, T), \quad (14.67)$$

$$-\omega L_4 + \mathbf{k} \cdot L_5 = B(X, T). \quad (14.68)$$

Вариации $\delta\Theta$ и $\delta\tilde{\Theta}$ приводят к двум вековым условиям

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{L}_\omega - \frac{\partial}{\partial X} \cdot \bar{L}_\mathbf{k} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial T} \bar{L}_\gamma - \frac{\partial}{\partial X} \cdot \bar{L}_\beta = 0.$$

Наконец, можно, как и ранее, ввести преобразование Гамильтона, основанное на обобщенных импульсах $\partial L / \partial \Phi_\theta$, $\partial L / \partial \tilde{\Phi}_\theta$, и, используя равенства (14.67) — (14.68), исключить явную зависимость вариационного принципа от Φ и $\tilde{\Phi}$ в пользу параметров A и B . Тогда получим

$$\delta \iint \mathcal{L}(\omega, \mathbf{k}, A, \gamma, \beta, B) dX dT = 0. \quad (14.69)$$

Соответствующие вариационные уравнения

$$\mathcal{L}_A = 0, \quad \mathcal{L}_B = 0, \quad (14.70)$$

$$\frac{\partial}{\partial T} \mathcal{L}_\omega - \frac{\partial}{\partial X_j} \mathcal{L}_{k_j} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial T} \mathcal{L}_\gamma - \frac{\partial}{\partial X_j} \mathcal{L}_{\beta_j} = 0 \quad (14.71)$$

дополняются условиями совместности

$$\frac{\partial k_i}{\partial T} - \frac{\partial \omega}{\partial X_i} = 0, \quad \frac{\partial \beta_i}{\partial T} - \frac{\partial \gamma}{\partial X_i} = 0, \quad (14.72)$$

$$\frac{\partial k_i}{\partial X_j} - \frac{\partial k_j}{\partial X_i} = 0, \quad \frac{\partial \beta_i}{\partial X_j} - \frac{\partial \beta_j}{\partial X_i} = 0. \quad (14.73)$$

Дальнейшие детали и примеры приведены в статьях автора (Уизем [10, 11, 13]). Приложение к волнам на воде конечной глубины, где дополнительные параметры являются определяющими, будет дано в гл. 16.

В рассматриваемом более общем случае закон сохранения энергии, соответствующий, в силу теоремы Нётер, инвариантности лагранжиана в вариационном принципе (14.69) относительно сдвигов по T , имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial T} (\omega \mathcal{L}_\omega + \gamma \mathcal{L}_\gamma - \mathcal{L}) + \frac{\partial}{\partial X_j} (-\omega \mathcal{L}_{k_j} - \gamma \mathcal{L}_{\beta_j}) = 0. \quad (14.74)$$

Закон сохранения импульса, соответствующий инвариантности относительно сдвигов по X_i , записывается в виде

$$\frac{\partial}{\partial T} (k_i \mathcal{L}_\omega + \beta_i \mathcal{L}_\gamma) + \frac{\partial}{\partial X_j} (-k_i \mathcal{L}_{k_j} - \beta_i \mathcal{L}_{\beta_j} + \mathcal{L} \delta_{ij}) = 0. \quad (14.75)$$

Чтобы получить дальнейшие обобщения, заметим, что если параметры среды не постоянны, а зависят от X и T , то X и T в явном виде войдут в лагранжиан и, следовательно, в $\mathcal{L}$. Вариационные уравнения (14.70) — (14.73) при этом останутся без изменения. Однако в правых частях законов сохранения (14.74) — (14.75) появятся члены $-\mathcal{L}_T$ и $\mathcal{L}_{X_i}$ соответственно. (Это можно проверить непосредственно при помощи (14.70) — (14.73).)

14.8. Адиабатические инварианты

Выше было указано, что величины $\mathcal{L}_\omega$, $\mathcal{L}_{k_j}$ аналогичны адиабатическим инвариантам классической механики. Теперь можно исследовать это соответствие. Механическим аналогом служит теория медленных модуляций в колебательных системах. Единственной независимой переменной является время, так что в этом случае модуляции можно производить только налагаемыми извне изменениями какого-либо параметра $\lambda(t)$. (В случае волн это соответствует вариации параметров среды.) Классическая теория обычно строится в гамильтоновом формализме, непосредственно к волнам неприменимом, но вместо этого мы можем вывести простейшие классические результаты развитыми выше методами. Для осциллятора с одной степенью свободы $q(t)$ и одним медленно меняющимся

ся параметром $\lambda(t)$ вариационный принцип записывается как

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, \lambda) dt = 0$$

и вариационное уравнение имеет вид

$$\frac{d}{dt} L_{\dot{q}} - L_q = 0. \quad (14.76)$$

Этот случай охватывается методами § 14.3 и 14.4 после отбрасывания зависимости от x . Но полезно наметить независимый вывод, используя обычные обозначения механики. Мы будем следовать простому интуитивному подходу § 14.3, который обосновывается в § 14.4.

Вычислим сначала усредненный лагранжиан для периодического движения при фиксированном значении параметра λ . Если период равен $\tau = 2\pi/\nu$, то

$$\mathcal{L} = \frac{\nu}{2\pi} \int_0^\tau L dt. \quad (14.77)$$

Для периодического движения ($\lambda = \text{const}$) уравнение (14.76) имеет интеграл энергии

$$\dot{q} L_{\dot{q}} - L = E. \quad (14.78)$$

Разрешив это уравнение, можно в принципе найти $\dot{q}$ как функцию от q , E и λ , а затем обобщенный импульс $p = L_{\dot{q}}$ также представить в виде

$$p = p(q, E, \lambda).$$

Если в выражение (14.77) подставить L из (14.78), то получим

$$\mathcal{L} = \frac{\nu}{2\pi} \int_0^\tau p \dot{q} dt - E = \frac{\nu}{2\pi} \oint p(q, E, \lambda) dq - E, \quad (14.79)$$

где $\oint p dq$ означает интеграл по полному периоду осцилляции (замкнутый контур в (p, q) -плоскости). Допустим теперь медленные изменения параметра λ с соответствующими медленными изменениями величин ν и E и используем усредненный вариационный принцип

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(\nu, E, \lambda) dt = 0. \quad (14.80)$$

Решающий шаг снова заключается в определении v как производной $\dot{\theta}$ фазы $\theta(t)$, которая за одну осцилляцию возрастает на постоянную нормированную величину. Этот шаг, возможно, выглядит менее естественным, чем в случае волн, но становится ясным при использовании двух масштабов времени. Вариации выражения (14.80) по E и θ дают

$$\mathcal{L}_E = 0, \quad \frac{d}{dt} \mathcal{L}_v = 0 \quad (14.81)$$

соответственно. Первое из этих уравнений соответствует дисперсионному соотношению (14.28), а второе — уравнению сохранения (14.29). В силу (14.79), имеем

$$\mathcal{L}_v = \frac{1}{2\pi} \oint p \, dq = \text{const}, \quad (14.82)$$

т. е. в точности классический результат об адиабатическом инварианте. Когда система модулируется, переменные v и E изменяются индивидуально, но так, что

$$I(v, E) = \frac{1}{2\pi} \oint p \, dq \quad (14.83)$$

остается постоянным. Согласно (14.79) и (14.81), период равен

$$\tau = \frac{2\pi}{v} = I_E, \quad (14.84)$$

что также является классическим результатом. (Превосходный обзор обычной теории можно найти в книге Ландау и Лифшица [1] стр. 193.)

В двухмасштабной форме (14.59) величина Π определяется как $\partial L / \partial \Phi_0$, тогда как обобщенный импульс p равен $\partial L / \partial \varphi_t$. Поскольку в низшем порядке $\varphi_t = v\Phi_0$, то $\Pi = vr$ и выражения (14.59) и (14.79) согласуются.

Из этого сравнения ясно, что в случае волн производная $\mathcal{L}_\omega$ родственна адиабатическому инварианту и что производные $\mathcal{L}_{k_j}$ играют роль пространственных модуляций. Для волн нет необходимости в утечке энергии, поскольку модуляции по времени могут компенсироваться пространственными модуляциями. Однако, если среда неоднородна, имеется дополнительный эффект за счет параметров, аналогичных λ . Тем не менее уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{L}_\omega - \frac{\partial}{\partial x_j} \mathcal{L}_{k_j} = 0 \quad (14.85)$$

все еще остается в силе. Это уравнение известно под названием уравнения сохранения волнового действия.

В частном случае волнового пакета, однородного в пространстве, но изменяющегося за счет изменений параметров среды во време-

ни, имеем

$$\mathcal{L}_\omega = \text{const.}$$

Аналогичным образом для волнового пакета фиксированной частоты, движущегося в среде, параметры которой зависят от одной пространственной переменной x , имеем

$$\mathcal{L}_k = \text{const.}$$

Эти уравнения позволяют простым способом определять амплитуду. В общем случае модуляции в пространстве и по времени компенсируются, согласно (14.85), и происходит *распространение* модуляций.

Величины $\mathcal{L}_\gamma$ и $\mathcal{L}_{\beta_j}$ в (14.74) подобны производным $\mathcal{L}_\omega$ и $\mathcal{L}_{k_j}$. Они появляются из-за наличия дополнительных зависимых переменных в точности так же, как для обычных динамических систем (с одной независимой переменной — временем) с числом степеней свободы большим единицы могут иметь место дополнительные адиабатические инварианты. Рассматриваемые волновые системы имеют только одну существенную частоту и, таким образом, соответствуют вырожденным случаям равных частот в динамике.

14.9. Многофазовые волновые пакеты

Общий случай многопериодических движений в динамике отражается в волновой теории волновыми пакетами с набором существенно различных фазовых функций. Обобщить формализм нетрудно, но вопросы существования нуждаются в разъяснении. Например, для двухфазовых волновых пакетов отправным пунктом будет квазипериодическое решение

$$\varphi = \Psi(\theta_1, \theta_2), \quad \theta_1 = k_1 x - \omega_1 t, \quad \theta_2 = k_2 x - \omega_2 t, \quad (14.86)$$

для которого функция Ψ является 2π -периодической как по θ_1 , так и по θ_2 . Далее можно было бы строить теорию модуляций так же, как и выше. Однако даже в обычной динамике вопросы существования квазипериодических решений в нелинейном случае связаны с хорошо известными трудностями (малые знаменатели). Если просто постулировать существование решений (14.86) и близлежащих модулированных решений, то уравнения модуляций можно вывести так же, как и выше. Абловиц и Бенни (Абловиц и Бенни [1], Абловиц [1]) рассмотрели некоторые следствия. Делани [1] отметил, что вариационный формализм приводит к правильным уравнениям. Если модулированные волновые пакеты можно описать выражениями

$$\begin{aligned} \varphi &= \Phi(\theta_1, \theta_2, X, T; \varepsilon), \\ \theta_1 &= \varepsilon^{-1}\Theta_1(X, T), \quad \theta_2 = \varepsilon^{-1}\Theta_2(X, T), \end{aligned}$$

то непосредственные вычисления показывают, что уравнение для Φ в двухмасштабной форме и два условия периодичности следуют из вариационного принципа

$$\delta \int \int \bar{L} dX dT = 0,$$

$$\bar{L} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} L (v_1 \Phi_{\theta_1} + v_2 \Phi_{\theta_2} + \varepsilon \Phi_T, k_1 \Phi_{\theta_1} + k_2 \Phi_{\theta_2} + \varepsilon \Phi_X, \Phi) d\theta_1 d\theta_2.$$

Отсюда, как и ранее, выводятся уравнения модуляций.

14.10. Эффекты диссипации

Как и гамильтонова динамика, вариационный формализм естественным образом применим к консервативным системам; диссипативные эффекты описываются несколько неудобным образом как ненулевые добавки к правым частям предыдущих уравнений. Однако можно сохранить различные канонические формы и левые части по-прежнему можно записывать через лагранжиан. Для того чтобы продемонстрировать это, рассмотрим как частный пример уравнение

$$\varphi_{tt} - \varphi_{xx} + V(\varphi) = -\varepsilon D(\varphi, \varphi_t),$$

где член $\varepsilon D(\varphi, \varphi_t)$ описывает малые диссипативные эффекты. Уравнение в двухмасштабной форме, соответствующее (14.42), имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \frac{1}{2} (v^2 - k^2) \Phi_\theta^2 + V(\Phi) - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \Phi_T^2 + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \Phi_X^2 \right\} + \\ + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T} \{ v \Phi_\theta^2 + \varepsilon \Phi_\theta \Phi_T \} - \varepsilon \frac{\partial}{\partial X} \{ k \Phi_\theta^2 + \varepsilon \Phi_\theta \Phi_X \} = \\ = -\varepsilon \Phi_\theta D(\Phi, v \Phi_\theta + \varepsilon \Phi_T). \end{aligned}$$

В низшем порядке имеем

$$\frac{1}{2} (v^2 - k^2) \Phi_\theta^2 + V(\Phi) = A(X, T), \quad (14.87)$$

а условие периодичности дает

$$\frac{\partial}{\partial T} \int_0^{2\pi} v \Phi_\theta^2 d\theta - \frac{\partial}{\partial X} \int_0^{2\pi} k \Phi_\theta^2 d\theta = - \int_0^{2\pi} \Phi_\theta D(\Phi, v \Phi_\theta) d\theta. \quad (14.88)$$

Из уравнения (14.87) можно найти производную Φ_θ как функцию от Φ, v, k, A , и все интегралы в уравнении (14.88) можно записать

как интегралы по замкнутому контуру. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial T} \mathcal{L}_v + \frac{\partial}{\partial X} \mathcal{L}_k = -\mathcal{D}, \quad (14.89)$$

где, как и ранее,

$$\mathcal{L}(v, k, A) = \frac{1}{2\pi} \{2(v^2 - k^2)\}^{1/2} \oint \{A - V(\Phi)\}^{1/2} d\Phi - A$$

и

$$\mathcal{D}(v, k, A) = \frac{1}{2\pi} \oint D(\Phi, \Phi_0) d\Phi.$$

К уравнению (14.89) добавляются уравнения

$$\mathcal{L}_A = 0, \quad \frac{\partial k}{\partial T} - \frac{\partial v}{\partial X} = 0, \quad (14.90)$$

и получается полная система уравнений для v, k, A . Уравнение (14.89) указывает на потерю волнового действия за счет диссипации.

Здесь в уравнениях мы вернулись к методу двух времен, но сохранили канонические формы законов сохранения, следующие из лагранжева формализма. Это, очевидно, менее желательно, чем непосредственное применение данного метода к какому-либо расширенному вариационному принципу. Недавно Хименес [1] достиг некоторого успеха в выводе результатов типа уравнения (14.89) в рамках подхода Пригожина к необратимым системам (Доннелли и др. [4]).

Глава 15

ГРУППОВЫЕ СКОРОСТИ, НЕУСТОЙЧИВОСТЬ И УТОЧНЕНИЕ ЭФФЕКТОВ ДИСПЕРСИИ

Большая часть предыдущей главы была посвящена выводу основных уравнений теории. Изучим теперь уравнения модуляций и их решения более подробно и подчеркнем существенное различие между линейной и нелинейной теориями. В этой главе мы рассмотрим основной случай одномерных волн в однородной среде и для простоты предположим, что псевдочастоты и псевдоволновые числа не возникают. В качестве типичных примеров будем здесь использовать нелинейное уравнение Клейна — Гордона и задачи, приведенные в § 14.1. Более специальные приложения к нелинейной оптике и волнам на воде составят содержание следующей главы. Обобщения на большее число измерений, неоднородную среду и системы высших порядков будут кратко изложены в виде дополнительных замечаний.

Модулированные волновые пакеты во всех порядках приближения описываются вариационным принципом (14.44). В низшем порядке приближения имеем (14.47) — (14.48) и при помощи преобразования Гамильтона получаем усредненный вариационный принцип

$$\delta \iint \mathcal{L}(\omega, k, A) dx dt = 0,$$

где $\omega = -\theta_t$ и $\theta_x = k$. (Мы опускаем обозначения, принятые в конце предыдущей главы, и возвращаемся к исходным, за исключением случаев, когда точное упорядочение членов снова становится существенным.) В этом низшем приближении вариационные уравнения для A , ω и k имеют вид

$$\mathcal{L}_A = 0, \quad (15.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{L}_\omega - \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{L}_k = 0, \quad (15.2)$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0. \quad (15.3)$$

Изучим сначала эти уравнения, а затем вернемся к вариационному принципу (14.44) для учета эффектов дисперсии в приближениях более высокого порядка.

15.1. Почти линейный случай

Прежде чем перейти к основной теме, покажем, как почти линейные уравнения, полученные в § 14.2, согласуются с общим формализмом. Почти линейная теория получается разложением $\mathcal{L}$ по степеням амплитуды. Это разложение можно записать в виде

$$\mathcal{L} = P(\omega, k) A + P_2(\omega, k) A^2 + \dots, \quad (15.4)$$

но обычно оно вводится при помощи разложения в ряд Фурье (ср. (14.52)) в эквивалентной форме

$$\mathcal{L} = G(\omega, k) a^2 + G_2(\omega, k) a^4 + \dots$$

Дисперсионное соотношение $\mathcal{L}_a = 0$ дает

$$\omega = \omega_0(k) + \omega_2(k) a^2 + \dots,$$

где

$$G(\omega_0, k) = 0, \quad \omega_2 = -\frac{2G_2(\omega_0, k)}{G_{\omega}(\omega_0, k)}.$$

Уравнения (15.2) и (15.3) можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \{g(k) a^2 + \dots\} + \frac{\partial}{\partial x} \{g(k) \omega'_0(k) a^2 + \dots\} = 0,$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \{\omega_0(k) + \omega_2(k) a^2 + \dots\} = 0,$$

где $g(k) = G_{\omega}(\omega_0, k)$ и использовано соотношение

$$\omega'_0(k) = -\frac{G_k(\omega_0, k)}{G_{\omega}(\omega_0, k)}$$

для линейной групповой скорости. Коэффициент $g(k)$ можно исключить, в силу второго уравнения для k , и корректным приближением, как было объяснено в § 14.2, является

$$\frac{\partial a^2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \{\omega'_0(k) a^2\} = 0,$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \omega'_0(k) \frac{\partial k}{\partial x} + \omega_2(k) \frac{\partial a^2}{\partial x} = 0.$$

Характеристические уравнения, как легко проверить, имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(\omega''_0) \left\{ \frac{\omega''_0(k)}{\omega_2(k)} \right\}^{1/2} dk \pm da &= 0, \\ \frac{dx}{dt} &= \omega'_0(k) \pm \{\omega_2(k) \omega''_0(k)\}^{1/2} a. \end{aligned} \quad (15.5)$$

Используя разложение (15.4), мы получили бы эквивалентные результаты с заменой амплитуды a на $A^{1/2}$ и заменой G, G_2 в определении ω_2 на P, P_2 .

Рассмотрим теперь точные уравнения (15.1) — (15.3).

15.2. Характеристическая форма уравнений

Существуют две полезные формы характеристических уравнений в зависимости от того, сохраняется симметрия между переменными t и x или нет. Если стремиться к симметрии, то удобнее работать с фазой θ , а не с ω и k . Тогда уравнение (15.2) переходит в следующее:

$$\mathcal{L}_{\omega\omega}\theta_{tt} - 2\mathcal{L}_{\omega k}\theta_{tx} + \mathcal{L}_{kk}\theta_{xx} - \mathcal{L}_{\omega A}A_t + \mathcal{L}_{kA}A_x = 0.$$

Производные A_t , A_x можно исключить в пользу θ при помощи уравнения (15.1), поскольку после дифференцирования по t и x это уравнение дает

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}_{\omega A}\theta_{tt} + \mathcal{L}_{kA}\theta_{tx} + \mathcal{L}_{AA}A_t &= 0, \\ -\mathcal{L}_{\omega A}\theta_{tx} + \mathcal{L}_{kA}\theta_{xx} + \mathcal{L}_{AA}A_x &= 0. \end{aligned}$$

Тогда уравнение второго порядка для θ принимает вид

$$p\theta_{tt} - 2r\theta_{tx} + q\theta_{xx} = 0, \quad (15.6)$$

где

$$\begin{aligned} p &= \mathcal{L}_{\omega\omega}\mathcal{L}_{AA} - \mathcal{L}_{\omega A}^2, \\ q &= \mathcal{L}_{kk}\mathcal{L}_{AA} - \mathcal{L}_{kA}^2, \\ r &= \mathcal{L}_{\omega k}\mathcal{L}_{AA} - \mathcal{L}_{\omega A}\mathcal{L}_{kA}. \end{aligned}$$

Из уравнения (15.1) можно найти A как функцию от θ_t и θ_x , и тогда (15.6) можно рассматривать как квазилинейное уравнение второго порядка для θ . Его характеристики определяются уравнением

$$\frac{dx}{dt} = \frac{-r \pm \sqrt{r^2 - pq}}{p}.$$

В линейном случае

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= P(\omega, k)A, \\ p &= -P_\omega^2, \quad q = -P_k^2, \quad r = -P_\omega P_k, \end{aligned}$$

и имеем двойную характеристическую скорость

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{P_k}{P_\omega},$$

в точности совпадающую с линейной групповой скоростью. Почти линейные результаты можно получить аналогичным образом.

Если отказаться от симметрии между x и t , то одна из полезных возможностей — выбрать в качестве независимых переменных k и $I = \mathcal{L}_\omega$ и считать, что соотношения

$$I = \mathcal{L}_\omega, \quad J = -\mathcal{L}_k, \quad \mathcal{L}_A = 0$$

разрешены относительно функций

$$\omega(k, I), \quad J(k, I), \quad A(k, I).$$

Тогда $\mathcal{L}$ можно также представить как

$$\mathcal{M}(k, I) = \mathcal{L} \{ \omega(k, I), k, A(k, I) \}.$$

Имеем

$$\mathcal{M}_k = \omega_k I - J, \quad \mathcal{M}_I = \omega_I I; \quad (15.7)$$

отсюда, в силу $\mathcal{M}_{kI} = \mathcal{M}_{Ik}$, получаем

$$\omega_k = J_I. \quad (15.8)$$

Система уравнений (15.1) — (15.3) сводится к следующей:

$$\begin{aligned} k_t + \omega_k k_x + \omega_I I_x &= 0, \\ I_t + \omega_k I_x + J_k k_x &= 0. \end{aligned} \quad (15.9)$$

Характеристические уравнения дают, что

$$\sqrt{J_k} dk \pm \sqrt{\omega_I} dI = 0 \quad (15.10)$$

на кривой

$$\frac{dx}{dt} = \omega_k \pm \sqrt{\omega_I J_k}. \quad (15.11)$$

Такой выбор переменных сохраняет гораздо более тесную связь с предыдущими обсуждениями линейного и почти линейного случаев.

В линейном случае $\mathcal{L} = P(\omega, k)A$ и дисперсионное соотношение $P(\omega, k) = 0$ дает

$$\omega = \omega_0(k);$$

поэтому

$$J = -P_k A = -\frac{P_k I}{P_\omega} = \omega'_0(k) I.$$

Поскольку $\omega_I = 0$, обе характеристические скорости (15.11) сводятся к $\omega'_0(k)$. Система, как отмечалось выше, не строго гиперболическая, поскольку имеется только одна дифференциальная форма $dk = 0$, соответствующая соотношению (15.10). Однако после того, как $k(x, t)$ найдено, переменная I находится интегрированием уравнения

$$I_t + \omega'_0(k) I_k + \omega''_0(k) I k_x = 0$$

вдоль тех же самых характеристик.

В почти линейном случае с лагранжианом $\mathcal{L}$, заданным равенством (15.4), имеем

$$\mathcal{L}_A = P(\omega, k) + 2P_2(\omega, k)A + \dots = 0,$$

$$I = \mathcal{L}_\omega = P_\omega(\omega, k)A + \dots, \quad J = -\mathcal{L}_k = -P_k(\omega, k)A + \dots$$

Из этих уравнений можно получить

$$\begin{aligned}\omega &= \omega_0(k) + \tilde{\omega}_2(k) I + \dots, \\ J &= \omega'_0(k) I + \dots\end{aligned}\quad (15.12)$$

Характеристические скорости (15.11) имеют вид

$$\frac{dx}{dt} = \omega'_0(k) \pm \sqrt{\omega''_0(k) \tilde{\omega}_2(k) I} + \dots \quad (15.13)$$

Это согласуется с (15.5), поскольку, если $I = g(k) a^2$, то

$$\omega = \omega_0(k) + \omega_2(k) a^2 + \dots,$$

где

$$\omega_2(k) = g(k) \tilde{\omega}_2(k)$$

и (15.13) переходит в (15.5).

Хейз [2] отмечает, что если одновременно с k и I ввести частичное преобразование Гамильтона

$$\mathcal{H}(k, I) = \omega \mathcal{L}_\omega - \mathcal{L} = \omega I - \mathcal{L}, \quad (15.14)$$

то получим

$$J = \mathcal{H}_k, \quad \omega = \mathcal{H}_I. \quad (15.15)$$

Это можно увидеть также из соотношений (15.7), положив $\mathcal{M} = \omega I - \mathcal{H}$. Уравнения принимают вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{H}_I &= 0, \\ \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{H}_k &= 0.\end{aligned}\quad (15.16)$$

Характеристическими уравнениями являются

$$\begin{aligned}\sqrt{\mathcal{H}_{kk}} dk \pm \sqrt{\mathcal{H}_{II}} dI &= 0, \\ \frac{dx}{dt} &= \mathcal{H}_{Ik} \pm \sqrt{\mathcal{H}_{kk} \mathcal{H}_{II}}.\end{aligned}\quad (15.17)$$

В частных случаях для получения наиболее простых выражений иногда полезно выбирать другие переменные. Например, для уравнения Клейна — Гордона, согласно (14.26), имеем

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= (\omega^2 - k^2)^{1/2} F(A) - A, \\ F(A) &= \frac{1}{2\pi} \oint \{2(A - V(\Psi))\}^{1/2} d\Psi\end{aligned}\quad (15.18)$$

и оказывается, что наиболее удобными переменными являются фазовая скорость $U = \omega/k$ и A . Согласно дисперсионному соотношению $\mathcal{L}_A = 0$,

$$k = \frac{1}{(U^2 - 1)^{1/2} F'(A)}, \quad \omega = \frac{U}{(U^2 - 1)^{1/2} F'(A)},$$

и уравнения (15.2) и (15.3) переходят в следующие:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{UF}{(U^2-1)^{1/2}} \right\} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{F}{(U^2-1)^{1/2}} \right\} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{(U^2-1)^{1/2} F'} \right\} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{U}{(U^2-1)^{1/2} F'} \right\} = 0.$$

Характеристические уравнения записываются так:

$$\frac{dU}{U^2-1} \mp \left(-\frac{F''}{F} \right)^{1/2} dA = 0, \quad (15.19)$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1 \pm U (-FF''/F'^2)^{1/2}}{U \pm (-FF''/F'^2)^{1/2}}. \quad (15.20)$$

Случай нескольких зависимых переменных

Когда имеется несколько зависимых переменных и несколько уравнений, как в (14.70) — (14.73), число характеристик увеличивается в соответствии с порядком системы. Дополнительные характеристики связаны с нелинейным взаимодействием волнового пакета с изменениями средних значений фоновых переменных и не имеют ничего общего с линейной групповой скоростью. Формулы для тех двух скоростей (ассоциированных прежде всего с распространением k и A), которые *соответствуют* линейной групповой скорости, значительно изменяются. В частности, в этих случаях тип уравнений может измениться, если какая-либо дополнительная зависимость осталась незамеченной и были использованы приведенные выше упрощенные формулы. Общие формулы для характеристик выводить не будем, поскольку наиболее целесообразный выбор переменных существенно зависят от конкретной задачи. Типичными примерами служат рассматриваемые ниже уравнения Кортевега — де Фриза и волны Стокса на воде конечной глубины.

15.3. Тип уравнений и устойчивость

Тип уравнений определяется тем, являются характеристики вещественными или мнимыми. Условие гиперболичности системы можно записать в следующих эквивалентных формах:

$$r^2 - pq > 0, \quad \omega_I J_h > 0, \quad \mathcal{B}_{hh} \mathcal{B}_{II} > 0; \quad (15.21)$$

второе выражение ближе всего по форме к почти линейному условию $\omega_2 \omega_0'' > 0$. Если знаки неравенств противоположны, то система является эллиптической.

Как было указано в § 14.2, периодические волновые пакеты в определенном смысле неустойчивы, когда уравнения модуляций эллиптические. Чтобы убедиться в этом, заметим, что уравнения модуляций имеют следующий общий вид:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + a_{ij}(\mathbf{u}) \frac{\partial u_j}{\partial x} = 0. \quad (15.22)$$

В однородном периодическом волновом пакете $\mathbf{u}$ принимает постоянное значение, скажем $\mathbf{u}^{(0)}$. Для малых возмущений полагаем $\mathbf{u} = \mathbf{u}^{(0)} + \mathbf{u}^{(1)}$. Линеаризованные уравнения для $\mathbf{u}^{(1)}$ таковы:

$$\frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial t} + a_{ij}^{(0)} \frac{\partial u_j^{(1)}}{\partial x} = 0, \quad a_{ij}^{(0)} = a_{ij}^{(0)}(\mathbf{u}^{(0)}).$$

Эта система имеет решения

$$\mathbf{u}^{(1)} \propto e^{i\mu(x - Ct)},$$

причем

$$|a_{ij}^{(0)} - C\delta_{ij}| = 0. \quad (15.23)$$

Возможные значения C являются характеристическими скоростями, вычисленными для $\mathbf{u} = \mathbf{u}^{(0)}$ (см. (5.12)). Если среди этих значений C имеются комплексные, то соответствующие решения $\mathbf{u}^{(1)}$ экспоненциально растут со временем. Конечно, как и в более простом линейном анализе устойчивости, это указывает только на то, что могут возникнуть значительные отклонения от однородного состояния, и волновой пакет необязательно становится хаотическим. В настоящем контексте устойчивость и возможные конечные состояния существенно зависят от членов высших порядков модуляционного приближения, как это будет показано в § 15.5.

В случае нелинейного уравнения Клейна — Гордона, согласно (15.20), для волновых пакетов, удовлетворяющих условиям (14.6) с $F(A) > 0$, имеем

$$\begin{aligned} \text{гиперболический тип: } F'' &< 0, \\ \text{эллиптический тип: } F'' &> 0. \end{aligned} \quad (15.24)$$

В частности, когда $V(\Psi) = \frac{1}{2}\Psi^2 + \sigma\Psi^4$, система гиперболическая при $\sigma > 0$ и эллиптическая при $\sigma < 0$. Для любой четной функции $V(\Psi)$ первые члены почти линейного разложения можно представить в таком виде, и тип аналогичным образом зависит от знака коэффициента σ .

Для уравнения Син-Гордона потенциал $V(\Psi) = 1 - \cos \Psi$, и можно показать, что $F''(A) > 0$, так что периодические волновые пакеты неустойчивы. Этот результат применим к осцилляциям около состояния $\Psi = 0$, удовлетворяющего условиям (14.6). В дальнейшем мы отметим существование спиральных волновых пакетов, в которых Ψ монотонно возрастает или убывает. Они

дают периодические решения, поскольку то же самое физическое состояние восстанавливается после каждого изменения на 2π . Эти решения оказываются устойчивыми в рассмотренном здесь смысле.

15.4. Нелинейная групповая скорость, групповое расщепление, ударные волны

В гиперболическом случае характеристические скорости используются для определения *нелинейных групповых скоростей*. Это естественное обобщение линейного случая. Расщепление двойной характеристической скорости линейной теории на две различные скорости, возможно, является наиболее важным и далеко идущим

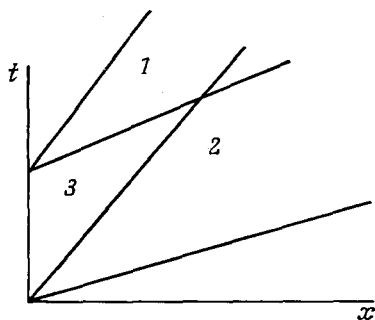


Рис. 15.1. Групповое расщепление.

1 — простая волна на характеристике C_- , 2 — простая волна на характеристике C_+ , 3 — область взаимодействия.

результатом данной теории. Как было указано в § 14.2, это предсказывает неизбежное расщепление модуляций конечных размеров на два независимых возмущения — результат, существенно отличающийся от линейной теории.

В задачах, в которых линейная групповая скорость положительна, обе нелинейные групповые скорости обычно будут также положительны. Тогда модуляции, вносимые расположенным в начале координат источником, будут распространяться по обоим семействам характеристик, как показано на рис. 15.1. В идеале будем считать, что источник, расположенный в точке $x = 0$, генерирует сильно нелинейный волновой пакет вплоть до $t = 0$, затем он модулирует амплитуду и частоту в течение конечного интервала времени t_0 , после чего опять возвращается к генерации исходного волнового пакета. Заметим, что в точке $x = 0$ следует наложить

два граничных условия, так что можно ввести независимые распределения для амплитуды a и частоты ω . Согласно обычным рассуждениям части I, будет существовать определенный период взаимодействия, но впоследствии возмущение разделится на две простые волны, распространяющиеся вдоль C_+ - и C_- -характеристик, как показано на рис. 15.1. Это аналогично задаче Римана с условиями на характеристиках (см. § 6.12).

Можно оценить расстояние до точки разделения через разность характеристических скоростей. Имеем

$$x \approx \frac{C_+ C_-}{C_+ - C_-} t_0,$$

где $C_{\pm}$ — типичные значения характеристических скоростей, а t_0 — время, в течение которого источник производит модуляции. Скорости почти линейной теории (15.5) дают оценку сверху

$$x \approx \frac{\omega_0'^2 t_0}{2a (\omega_2 \omega_0'')^{1/2}}. \quad (15.25)$$

Было бы чрезвычайно ценным иметь экспериментальное свидетельство такого разделения, поскольку оно имеет фундаментальное значение для проверки теории модуляций. Другие родственные нелинейные эффекты наблюдались в нелинейной оптике, но этот, по-видимому, еще не обнаружен.

Простые волны, образуемые таким образом, как указано выше, или как-либо иначе, можно найти аналитически, используя стандартные методы части I. Один инвариант Римана всюду постоянен, а модулируемые переменные ω , k , a остаются постоянными вдоль каждой характеристики из соответствующего семейства. В линейной теории k остается постоянным, но $a \propto t^{-1/2}$ вдоль характеристик. Это различие между нелинейным и линейным поведением, вероятно, не так легко уловимо, как групповое расщепление, и может частично маскироваться эффектами высшего порядка.

Наконец, в рамках гиперболических задач имеется вопрос об опрокидывании и образовании ударных волн. Зависимость характеристических скоростей от модулируемых переменных вводит обычное гиперболическое искажение, и модуляции типа «сжатия» в простой волне приводят к возникновению областей многозначности решения. Что происходит дальше, пока еще не ясно.

В отличие от задач, рассматриваемых в части I, теперь нет возражений против многозначных решений как таковых. Их можно интерпретировать как суперпозицию двух или нескольких волновых пакетов с различными значениями волновых чисел k и амплитуд a . Фактические решения не будут корректно описываться уравнениями (15.1) — (15.3), поскольку эти уравнения были выведены в предположении существования единой фазовой функ-

ции. Но они будут, вероятно, охватываться исходным уравнением. Действительно, именно суперпозиция имеет место в линейном случае. Хотя мы и не задавались этим вопросом в предыдущих обсуждениях, можно представить себе волновой пакет с линейной групповой скоростью $C_0(k)$, убывающей по направлению к волновому фронту. Тогда, поскольку значения волнового числа k распространяются со скоростью $C_0(k)$, со временем в волновом пакете возникнут области наложения.

В линейной теории суперпозиция не вносит каких-либо трудностей и весь процесс можно изучать при помощи точного решения в виде интеграла Фурье. Хотя в нелинейном случае этот процесс трудно проследить аналитически, качественно поведение кажется вполне доступным анализу. По-видимому, в области наложения понадобится что-то вроде многофазового решения, упоминавшегося в § 14.9, но исследование переходного процесса является трудной задачей.

Вторая возможность состоит в том, что члены высшего порядка модуляционного приближения играют большую роль при ситуации, близкой к опрокидыванию, и препятствуют развитию многозначного решения. В общем случае легко убедиться (и это будет достаточно подробно показано в следующем параграфе), что за счет эффектов высшего порядка в уравнениях (15.2) и (15.3) обычно появляются дополнительные члены, содержащие производные третьего порядка. Внешне эти уравнения становятся подобными уравнениям Буссинеска и Кортевега — де Фриза. По аналогии можно ожидать, что опрокидывание подавляется этими дополнительными членами. Конечно, как и в случае волн на воде, дополнительные члены вводятся как малые поправки к крупномасштабным процессам и являются первыми членами бесконечного ряда высших производных. Было бы непоследовательно считать, что от них во всех случаях зависит, произойдет ли опрокидывание. Похоже на то, что это имеет место для малых симметричных модуляций, которые развиваются в серию уединенных волн, тогда как существенно асимметричные модуляции в некотором смысле опрокидываются.

Теперь к вопросу об ударных волнах. Формально в решениях уравнений (15.2) и (15.3) разрывы переменных ω , k , A допустимы. Их следует интерпретировать как слабые решения, и условия на разрыве должны определяться соответствующими уравнениями сохранения, как описано в § 5.8. Теоретически это наиболее привлекательная ситуация, но в данном конкретном контексте она, вероятно, менее всего соответствует действительности.

Неуверенность в интерпретации делает менее ясным и выбор подходящих условий на разрыве. Уравнения (15.2) и (15.3) уже имеют форму законов сохранения, но столь же очевидными кандидатами являются уравнения сохранения энергии и сохранения

импульса. Последние имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial t} (\omega \mathcal{L}_\omega - \mathcal{L}) - \frac{\partial}{\partial x} (\omega \mathcal{L}_k) = 0, \quad (15.26)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (k \mathcal{L}_\omega) - \frac{\partial}{\partial x} (k \mathcal{L}_k - \mathcal{L}) = 0. \quad (15.27)$$

В действительности существует бесконечно много уравнений сохранения. Однако только уравнения (15.2), (15.3), (15.26) и (15.27) имеют очевидный смысл. Наша система, по существу, — система второго порядка (равенство (15.1) не является дифференциальным уравнением), так что два уравнения сохранения должны быть выбраны для обеспечения двух условий на разрыве. Этот выбор связан с тем, что по нашему мнению представляют из себя ударные волны. Если они рассматриваются как приближения к решениям, еще охватываемым исходным подробным уравнением для φ , то следует выбрать условия на разрыве, исходя из уравнений (15.26) и (15.27). Причина состоит в том, что энергия и импульс сохраняются при более подробном описании φ и, следовательно, должны сохраняться в приближении, основанном на предположении о медленном изменении. При этом условия на разрыве записываются так:

$$U_s [\omega \mathcal{L}_\omega - \mathcal{L}] + [\omega \mathcal{L}_k] = 0, \quad (15.28)$$

$$U_s [k \mathcal{L}_\omega] + [k \mathcal{L}_k - \mathcal{L}] = 0, \quad (15.29)$$

где U_s — скорость ударной волны. Сохранение фазы (15.3) и сохранение волнового действия (15.2) при переходе через разрыв обеспечить нельзя. Они были выведены для решений специального вида в предположении медленных изменений, так что нет возражений против их нарушения в области резких изменений, соответствующей ударной волне. Эти ударные волны, следовательно, будут являться источником осцилляций и содержать скачки адиабатических инвариантов; последнее напоминает квантовые скачки адиабатических инвариантов в квантовой теории!

Следует снова подчеркнуть, что все это просто формализм без позитивной точки зрения на структуру этих ударных волн или даже на необходимость их возникновения. Более того, эти разрывы будут иметь необратимые свойства, в то время как исходное уравнение для φ обратимо. Здесь имеется связь с классическими примерами задач о системах, обратимых на некотором точном уровне описания и оказывающихся необратимыми в макроскопических приближениях.

С другой стороны, если предположить, что разрывы соответствуют явлениям, не описываемым исходным уравнением, но учитываемым некоторым еще более подробным описанием, содержащим какого-либо рода диссипацию, то выбор будет другим. Импульс, вероятно, будет сохраняться, а энергия, по-видимому, нет. Не похо-

же, чтобы уравнение (15.2) было правильной альтернативой, но уравнением (15.3) можно заняться. Как показано в § 13.15, при наличии диссипации в диспергирующих моделях можно построить гладкие осциллирующие изменения между двумя различными *постоянными* состояниями. В этом случае концевые состояния постоянны, поскольку диссипация гасит осцилляции по обеим сторонам переходной области.

Таким образом, уравнение (15.3) не описывает изменение состояния внутри осциллирующего волнового пакета, как предполагается здесь. Но оно указывает на существование однозначной фазовой функции, и это является доводом в пользу выбора уравнения (15.3) в качестве возможного условия на разрыве при учете диссипации. Все это опять весьма умозрительно, и бессмысленно двигаться дальше в этом направлении, не имея более определенной информации и результатов.

15.5. Дисперсионные эффекты в приближении более высокого порядка

Рассмотрим теперь уравнения модуляций в следующем после (15.1) — (15.3) порядке приближения. Для простоты будем работать с примером

$$\Phi_{tt} - \Phi_{xx} + \Phi + 4\sigma\Phi^3 = 0 \quad (15.30)$$

и ограничим анализ почти линейным случаем. Но результаты типичны для задачи в целом, и более содержательные физические приложения будут указаны при изложении нелинейной оптики в § 16.4.

Вариационный принцип для (15.30) включает лагранжиан

$$L = \frac{1}{2} \Phi_t^2 - \frac{1}{2} \Phi_x^2 - \frac{1}{2} \Phi^2 - \sigma \Phi^4, \quad (15.31)$$

и *точные* уравнения модуляций находятся из условия

$$\delta \iint \bar{L} dX dT = 0, \quad (15.32)$$

$$\begin{aligned} \bar{L} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1}{2} (-\omega\Phi_\theta + \varepsilon\Phi_T)^2 - \frac{1}{2} (k\Phi_\theta + \varepsilon\Phi_X)^2 - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \Phi^2 - \sigma\Phi^4 \right\} d\theta, \end{aligned} \quad (15.33)$$

как показано в (14.44). (Мы возвращаемся к обычной частоте $\omega = -\nu$.) Для почти линейной теории можно использовать ряд Фурье

$$\Phi = a \cos \theta + a_3 \cos 3\theta + a_5 \cos 5\theta + \dots,$$

как и при выводе (14.52). Но теперь мы сохраним также члены следующего порядка по ε . Коэффициенты a_n пропорциональны a^n , и данный случай особенно прост, поскольку в нужном нам порядке приближения дает вклад только член $a \cos \theta$. Имеем

$$\bar{L} = \frac{1}{4} (\omega^2 - k^2 - 1) a^2 - \frac{3}{8} \sigma a^4 + \frac{1}{4} \varepsilon^2 (a_T^2 - a_X^2) + O(a^6, \varepsilon^2 a^4). \quad (15.34)$$

Это двойное разложение, в котором предполагается, что ε и a — величины одинакового порядка¹⁾. Линейный член равен $\frac{1}{4} (\omega^2 - k^2 - 1) a^2$, первая нелинейная поправка дает $-\frac{3}{8} \sigma a^4$, и первая поправка за счет дисперсии высшего порядка составляет $\frac{1}{4} \varepsilon^2 (a_T^2 - a_X^2)$. Вариационные уравнения записываются так:

$$\delta a: (\omega^2 - k^2 - 1) a - 3\sigma a^3 - \varepsilon^2 (a_{TT} - a_{XX}) = 0, \quad (15.35)$$

$$\delta \Theta: \frac{\partial}{\partial T} (\omega a^2) + \frac{\partial}{\partial X} (k a^2) = 0, \quad (15.36)$$

а условие совместности — так:

$$\frac{\partial k}{\partial T} + \frac{\partial \omega}{\partial X} = 0. \quad (15.37)$$

Следует отметить, что, в силу (15.35), $\Theta(X, T)$ теперь зависит также и от ε и что последовательное разделение в цепочку уравнений для различных порядков по ε не было проведено. Вариационный принцип (15.32) является точным, и мы всего лишь применили его к приближенному лагранжиану (15.34).

В данном конкретном случае уравнения модуляций высшего порядка оказываются более сложными по форме, чем исходное уравнение (15.30)! Тем не менее по ним легче определить поведение модуляций, чем по исходному уравнению. Конечно, обычно при переходе к уравнениям модуляций достигается значительное упрощение, но как бы то ни было система (15.35) — (15.37) типична для общего случая.

Когда члены с ε опущены, уравнения модуляций становятся гиперболическими при $\sigma > 0$ и эллиптическими при $\sigma < 0$. Эффекты дисперсии высшего порядка вводят в уравнения (15.35) — (15.37) третьи производные от a , и уравнения модуляций сами становятся диспергирующими. В случае $\sigma > 0$ они по структуре аналогичны уравнениям Буссинеска.

Следует ожидать, что следствия для опрокидывания будут такими же, как было указано в § 15.4. Относительно существования периодических решений и уединенных волн мы ограничимся краткими замечаниями. Сначала, однако, посмотрим, какое

¹⁾ Эквивалентным образом можно положить a величиной порядка $O(1)$, принять σ за меру нелинейности и использовать двойное разложение по малым параметрам σ и ε^2 .

влияние оказывают дополнительные члены на неустойчивость, обнаруженную в эллиптическом случае $\sigma < 0$.

Однородный волновой пакет является решением с постоянными величинами $\omega^{(0)}$, $k^{(0)}$, $a^{(0)}$, удовлетворяющими дисперсионному соотношению (15.35). Для малых возмущений $\omega^{(1)}$, $k^{(1)}$, $a^{(1)}$ этих значений линеаризованные уравнения (15.35) — (15.37) являются однородными и имеют постоянные коэффициенты, зависящие от $\omega^{(0)}$, $k^{(0)}$, $a^{(0)}$. Для возмущений $\omega^{(1)}$, $k^{(1)}$, $a^{(1)}$ имеются элементарные решения, пропорциональные $e^{i\mu(X-CT)}$, где C удовлетворяет соотношению

$$\{\omega^{(0)}C - k^{(0)}\}^2 - (1 - C)^2 \left\{ \frac{3\sigma a^{(0)2}}{2} + \frac{\varepsilon^2 \mu^2}{4} (1 - C^2) \right\} = 0. \quad (15.38)$$

Параметр μ определяет волновое число для модуляций. Для малых значений $a^{(0)}$ и ε

$$C = \frac{k^{(0)}}{\omega^{(0)}} \pm \frac{1}{\omega^{(0)2}} \left(\frac{3\sigma a^{(0)2}}{2} + \frac{\varepsilon^2 \mu^2}{4\omega^{(0)2}} \right)^{1/2}. \quad (15.39)$$

Если пренебречь членом с μ , то это будут просто характеристические скорости, комплексные при $\sigma < 0$. Влияние дисперсии за счет поправки по μ имеет стабилизирующий характер, и неустойчивость теперь ограничена областью

$$0 < \varepsilon^2 \mu^2 < 6 |\sigma| \omega^{(0)2} a^{(0)2} \quad (15.40)$$

изменения модуляционного волнового числа $\varepsilon \mu$.

В обоих случаях $\sigma > 0$ и $\sigma < 0$ важно заметить, что система (15.35) — (15.37) имеет решения в виде стационарных профилей, распространяющихся без изменения формы. Они находятся обычным образом как решения, у которых все величины являются функциями от переменной $X - VT$. Имеем

$$\varepsilon^2 (1 - V^2) a'' + (\omega^2 - k^2 - 1) a - 3\sigma a^3 = 0, \quad (15.41)$$

$$(\omega V - k) a^2 = R, \quad (15.42)$$

$$\omega - V k = S, \quad (15.43)$$

где R и S — постоянные интегрирования. Последние два уравнения можно использовать для исключения из первого уравнения переменных ω и k , что дает

$$\varepsilon^2 (1 - V^2)^2 a'' = \frac{R^2 - S^2 a^4 + (1 - V^2) (a^4 + 3\sigma a^6)}{a^3}. \quad (15.44)$$

В общем случае это уравнение имеет периодические решения (волновые пакеты, образованные огибающей исходного модулированного волнового пакета), в которых a осциллирует между двумя простыми нулями числителя правой части. Уединенные волны соответствуют предельным случаям.

Уединенная волна с $a \rightarrow 0$ при $X \rightarrow \pm\infty$ представляет особый интерес; она описывает волновой пакет, изображенный на рис. 15.2.

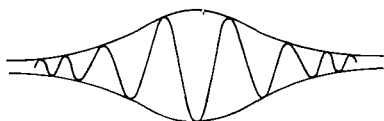


Рис. 15.2. Модуляция типа уединенной волны.

В этом случае в равенстве (15.42) $R = 0$, поскольку $a \rightarrow 0$ на ∞ . Отсюда

$$V = \frac{k}{\omega}; \quad (15.45)$$

далее, в свою очередь, в силу соотношения (15.43), величины ω и k являются постоянными. Для этого примера линейное дисперсионное соотношение имеет вид $\omega_0 = (k^2 + 1)^{1/2}$ и линейная групповая скорость выражается формулой

$$C_0 = \frac{k}{(k^2 + 1)^{1/2}} = \frac{k}{\omega_0} < 1.$$

Мы видим, что скорость V является нелинейным аналогом скорости C_0 ; для малых амплитуд V и C_0 будут близки. Поскольку $C_0 < 1$, можно считать, что $V < 1$. Так как ω и k постоянны, уравнение (15.41) для a интегрируется и дает

$$\varepsilon^2 (1 - V^2) a'^2 = \frac{3}{2} \sigma a^4 - (\omega^2 - k^2 - 1) a^2. \quad (15.46)$$

Чтобы $a \rightarrow 0$ на ∞ , должно выполняться неравенство

$$\omega^2 - k^2 - 1 < 0.$$

Для максимального значения a имеем

$$\omega^2 - k^2 - 1 = \frac{3}{2} \sigma a_m^2, \quad (15.47)$$

так что уединенные волны данного типа существуют только в эллиптическом случае $\sigma < 0$. Скорость (15.45) для такого волнового пакета равна

$$V = \frac{k}{(k^2 + 1)^{1/2}} - \frac{3}{4} \frac{|\sigma| a_m^2}{(k^2 + 1)^{3/2}};$$

он движется несколько медленнее, чем возмущения с линейной групповой скоростью. Для аналогичной задачи нелинейной оптики Островский [1] предположил, что результатом неустойчивости может быть периодическое решение, по существу являющееся последовательностью таких волновых пакетов.

В гиперболическом случае $\sigma > 0$ такие предельные уединенные волны отсутствуют, но можно найти периодические волновые пакеты и уединенные волны с амплитудой a , отделенной от нуля. Это похоже на истину, поскольку при $\sigma > 0$ модуляции в гиперболической теории ($\epsilon = 0$) приводят к искажениям, но не нарастают. Дисперсия может противодействовать этим искажениям и привести к стационарным профилям, и нет причины для возрастания, ведущего к предельному случаю с $a = 0$. Наличие таких профилей подтверждает существующее мнение, что в некоторых случаях не происходит опрокидывания, и в области опрокидывания волновой пакет стремится к стационарному осциллирующему профилю.

В почти линейной теории дисперсионные члены высокого порядка возникают за счет квадратичной части лагранжиана и легко показать, что общее выражение, отвечающее лагранжиану (15.34), имеет вид

$$\bar{L} = G(\omega, k) a^2 + G_2(\omega, k) a^4 + \frac{1}{2} \epsilon^2 \{G_{\omega\omega} a_T^2 + 2G_{\omega k} a_T a_X + G_{kk} a_X^2\}.$$

Вариационные уравнения аналогичны уравнениям (15.35) — (15.37).

15.6. Анализ Фурье и нелинейные взаимодействия

Если амплитуды малы и используются лишь несколько фурье-компонент, то нелинейные взаимодействия между компонентами можно изучать непосредственно. Это дает возможность иного подхода к некоторым из предыдущих результатов. Именно таким подходом Бенджамен [1] обнаружил неустойчивость типа (15.40) для волн Стокса на глубокой воде. Подробное исследование этой неустойчивости, основанное как на модуляциях, так и на взаимодействиях, будет проведено в § 16.11. Здесь для демонстрации самого метода мы применим рассуждения Бенджамена к уравнению Клейна — Гордона, где выкладки проще.

Для конечного числа фурье-компонент функцию ϕ можно представить в виде

$$\phi = \frac{1}{2} \sum \phi_v(t) e^{i\kappa_v x}, \quad (15.48)$$

где v пробегает значения $\pm 1, \pm 2, \dots, \pm N$ и мы полагаем $\kappa_{-n} = -\kappa_n$, $\phi_{-n}(t) = \phi_n^*(t)$, $n = 1, \dots, N$, чтобы обеспечить вещественность ϕ . Для уравнения

$$\phi_{tt} - \phi_{xx} + \phi = -4\sigma\phi^3 \quad (15.49)$$

линейное решение (без учета правой части) имеет вид

$$\phi_v(t) = A_v e^{-i\omega_v t}, \quad (15.50)$$

где

$$\omega_n = (\kappa_n^2 + 1)^{1/2}, \quad \omega_{-n} = -\omega_n, \quad A_{-n} = A_n^* \quad (15.51)$$

и A_v — постоянные. Можно развить почти линейную теорию, считая параметр σ малым.

Формально разложив φ в степенной ряд теории возмущений

$$\varphi = \varphi^{(0)} + \sigma \varphi^{(1)} + \sigma^2 \varphi^{(2)} + \dots,$$

получим цепочку уравнений

$$\varphi_{tt}^{(0)} - \varphi_{xx}^{(0)} + \varphi^{(0)} = 0, \quad (15.52)$$

$$\varphi_{tt}^{(1)} - \varphi_{xx}^{(1)} + \varphi^{(1)} = -4\varphi^{(0)3} \quad (15.53)$$

и т. д. Запишем решение линейного уравнения (15.52) в виде

$$\varphi^{(0)} = \frac{1}{2} \sum A_v e^{i\kappa_v x - i\omega_v t}$$

и подставим его в правую часть уравнения для $\varphi^{(1)}$. Однако резонанс приводит к вековым членам у $\varphi^{(1)}$, и разложение имеет неравномерный характер. Это фактически несколько более общий случай ситуации, отмеченной при рассмотрении разложения Стокса периодических решений в § 13.13. Равномерная аппроксимация получается включением резонирующих членов третьего порядка в уравнение предыдущего приближения для $\varphi^{(0)}$. Это приводит к более определенной точке зрения на фурье-анализ и к группированию членов согласно их вкладам в различные компоненты $e^{i\kappa_v x}$. Таким образом, мы подставляем разложение (15.48) в уравнение (15.49) и для каждой из исходных компонент $e^{i\kappa_v x}$ имеем

$$\frac{d^2 \varphi_v}{dt^2} + \omega_v^2 \varphi_v = -\sigma \sum_{\kappa_\alpha + \kappa_\beta + \kappa_\gamma = \kappa_v} \varphi_\alpha \varphi_\beta \varphi_\gamma, \quad (15.54)$$

где ω_v такие же, как и в (15.51). Кубические члены будут также генерировать новые компоненты, которые следует добавить в (15.48), но они не резонируют (по крайней мере в кубическом порядке), и в первом приближении ими можно пренебречь. Поэтому мы рассмотрим решения уравнения (15.54).

Чтобы исключить главные осцилляции, введем

$$\varphi_v(t) = A_v(t) e^{-i\omega_v t},$$

причем — и это важное отличие — от линейной теории — $A_v(t)$ является функцией от t . Имеем

$$\frac{d^2 A_v}{dt^2} - 2i\omega_v \frac{dA_v}{dt} = -\sigma \sum_{\kappa_\alpha + \kappa_\beta + \kappa_\gamma = \kappa_v} A_\alpha A_\beta A_\gamma e^{i(\omega_v - \omega_\alpha - \omega_\beta - \omega_\gamma)t}.$$

Масштаб времени имеет теперь порядок $O(\sigma^{-1})$, и каждое дифференцирование по t увеличивает на единицу порядок соответствующего члена по σ . Следовательно, можно опустить вторую производ-

ную от A_ν , что дает

$$\frac{dA_\nu}{dt} = -\frac{i\sigma}{2\omega_\nu} \sum_{\kappa_\alpha + \kappa_\beta + \kappa_\gamma = \kappa_\nu} A_\alpha A_\beta A_\gamma e^{i(\omega_\nu - \omega_\alpha - \omega_\beta - \omega_\gamma)t}. \quad (15.55)$$

Резонанс возникает при.

$$\begin{aligned} \kappa_\alpha + \kappa_\beta + \kappa_\gamma &= \kappa_\nu, \\ \omega_\alpha + \omega_\beta + \omega_\gamma &= \omega_\nu. \end{aligned} \quad (15.56)$$

Самодействие

$$(\kappa_\nu, \kappa_\nu, -\kappa_\nu) \rightarrow \kappa_\nu$$

(и его перестановки) всегда относится к этому случаю. Они приводят к эффекту Стокса для частоты. Если существует только одна мода κ_0 , то имеем уравнение

$$\frac{dA_0}{dt} = -\frac{3i\sigma}{2\omega_0} A_0^2 A_0^*, \quad \omega_0 = (\kappa_0^2 + 1)^{1/2},$$

с решением

$$A_0 = a_0 e^{-(3i\sigma/(2\omega_0))a_0^2 t}, \quad (15.57)$$

и тогда

$$\varphi = a_0 \cos \left\{ \kappa_0 x - \left(\omega_0 + \frac{3}{2} \frac{\sigma a_0^2}{\omega_0} \right) t \right\} + \dots$$

Это совпадает с результатом Стокса (14.12).

При изучении устойчивости Бенджамен рассматривает эффект близких «боковых частот» с волновыми числами $\kappa_0 \pm \tilde{\mu}$ при основном волновом числе κ_0 . Таким образом, множество κ_n , $n = 1, \dots, N$, имеет вид $\{\kappa_0, \kappa_0 - \tilde{\mu}, \kappa_0 + \tilde{\mu}\}$, и для получения полного множества κ_ν следует добавить их отрицательные значения. Обозначим соответствующие величины A_n через A_0 , A_- , A_+ , а сопряженные им величины — так же, как в (15.51). Тогда уравнения (15.55) примут вид

$$\frac{dA_0}{dt} = -\frac{i\sigma}{2\omega_0} \{3A_0^2 A_0^* + 6A_0 A_+ A_+^* + 6A_0 A_- A_-^* + 6A_0^* A_+ A_- e^{-i\Omega t}\}, \quad (15.58)$$

$$\frac{dA_-}{dt} = -\frac{i\sigma}{2\omega_-} \{6A_0 A_0^* A_- + 3A_0^2 A_+^* e^{i\Omega t} - 6A_+ A_+^* A_- + 3A_-^2 A_0^*\}, \quad (15.59)$$

где

$$\Omega = \omega_+ + \omega_- - 2\omega_0; \quad (15.60)$$

для того чтобы получить уравнение для A_+ , нужно поменять местами индексы плюс и минус. Тип взаимодействия легко восстанавливается по амплитудам A , дающим вклад. Первый член в (15.58) описывает самодействие (Стокс); второй член соответ-

ствует резонансу $(\kappa_0, \kappa_0 + \tilde{\mu}, -\kappa_0 - \tilde{\mu}) \rightarrow \kappa_0$ и т. д. Члены с множителем $e^{i\Omega t}$, строго говоря, не удовлетворяют резонансному условию для частот. Но если $\tilde{\mu}$ мало, то Ω тоже мало и этот множитель оставляется для сохранения равномерности приближения при $\tilde{\mu} \rightarrow 0$. Числовые коэффициенты перед каждым членом соответствуют числу перестановок для каждого конкретного взаимодействия.

При анализе устойчивости предполагается, что $A_{\pm} \ll A_0$, и уравнения линеаризуются:

$$\begin{aligned}\frac{dA_0}{dt} &= -\frac{3i\sigma}{2\omega_0} A_0^2 A_0^*, \\ \frac{dA_{\pm}}{dt} &= -\frac{i\sigma}{2\omega_{\pm}} \{6A_0 A_0^* A_{\pm} + 3A_0^2 A_{\pm}^* e^{i\Omega t}\}.\end{aligned}$$

Эффекты имеют второй порядок по A_0 . Как и в (15.57), полагаем

$$A_0 = a_0 e^{-i\rho t}, \quad \rho = \frac{3}{2} \frac{\sigma a_0^2}{\omega_0}, \quad (15.61)$$

где a_0 вещественно. Для малых $\tilde{\mu}$ в коэффициентах уравнений для $A_{\pm}$ достаточно положить $\omega_{\pm} \simeq \omega_0$ и аппроксимировать Ω выражением

$$\Omega \simeq \omega_0''(\kappa_0) \tilde{\mu}^2. \quad (15.62)$$

Тогда линейные уравнения для $A_{\pm}$ примут вид

$$\begin{aligned}\frac{dA_{-}}{dt} &= -i\rho \{2A_{-} + A_{+}^* e^{i(\Omega-2\rho)t}\}, \\ \frac{dA_{+}}{dt} &= -i\rho \{2A_{+} + A_{-}^* e^{i(\Omega-2\rho)t}\}.\end{aligned}$$

Они имеют решения $A_{\pm} = a_{\pm} e^{i\lambda_{\pm} t}$, где $\lambda_{\pm}$ удовлетворяют уравнению

$$\lambda^2 + (2\rho - \Omega) \lambda + \rho(\rho - 2\Omega) = 0. \quad (15.63)$$

Малые возмущения амплитуд боковых частот растут, если корни уравнения (15.63) комплексны, т. е. если

$$\left(\rho + \frac{\Omega}{4}\right) \Omega < 0. \quad (15.64)$$

Для нашего конкретного примера $\omega_0 = (\kappa_0^2 + 1)^{1/2}$, $\omega_0'' = \omega_0^{-3}$, так что (15.64) приводит к условию

$$\left(\frac{3}{2} \sigma a_0^2 + \frac{\tilde{\mu}^2}{4\omega_0^2}\right) < 0.$$

Данный результат согласуется с (15.39) и (15.40), если при сопоставлении положить $\tilde{\mu} = \epsilon\mu$. При $\sigma > 0$ амплитуды боковых частот всегда остаются малыми. При $\sigma < 0$ имеется неустойчивость

в области

$$\tilde{\mu}^2 < 6 |\sigma| \omega_0^2 a_0^2.$$

Опять это неустойчивость по линейному приближению; нелинейные уравнения (15.58) — (15.59) сохраняют суммарную энергию. Это согласуется с предположением, что окончательным результатом является решение с конечными амплитудными осцилляциями.

Должно быть достаточно ясно, что предыдущий анализ, хотя и проведенный на конкретном примере, имеет общий характер. Действительно, из (15.61) видно, что ρ всегда является поправкой Стокса к частоте, обозначенной в § 14.2 через $\omega_2 a^2$. Выражение (15.62) для Ω имеет общий вид. Таким образом, критерий (15.64) можно записать в виде

$$\left(\omega_2 a^2 + \frac{1}{4} \omega_0'' \tilde{\mu}^2 \right) \omega_0'' \tilde{\mu}^2 < 0.$$

Это выражение следует сравнить с радикалом в характеристической скорости (14.21); дополнительный член с $\tilde{\mu}^2$ связан с дисперсионными эффектами высшего порядка.

Подходы, основанные на взаимодействиях и модуляциях, можно сопоставить, заметив, что модуляцию $k = k^{(0)} + k^{(1)}$, $a = a^{(0)} + a^{(1)}$, использованную при выводе (15.39), можно аппроксимировать следующими разложениями:

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{2} \{a^{(0)} + a^{(1)}\} \exp i \{\theta^{(0)} + \theta^{(1)}\} + \\ &\quad + \text{комплексно сопряженное выражение} \simeq \\ &\simeq \frac{1}{2} a^{(0)} \exp i \theta^{(0)} + \frac{1}{2} a^{(1)} \exp i \theta^{(0)} + \frac{1}{2} i \theta^{(1)} a^{(0)} \exp i \theta^{(0)} + \\ &\quad + \text{комплексно сопряженное выражение.} \end{aligned} \quad (15.65)$$

Если теперь для основного волнового пакета положить

$$a^{(0)} = a_0, \quad \theta^{(0)} = \kappa_0 x - (\omega_0 + \rho) t$$

и выразить возмущения $a^{(1)}$, $\theta^{(1)}$ через соответствующие линейные комбинации экспонент $e^{\pm i \tilde{\mu} x}$, то получится описание в терминах боковых частот.

Теория взаимодействий оказывается эффективной только в почти линейном случае и только для модуляций, содержащих конечное число фурье-компонент. Даже в этом случае выкладки оказываются значительно сложнее, чем в модуляционном подходе. Их можно до некоторой степени упростить, снова обратившись к вариационному принципу. Если в лагранжиан подставить выражение

$$\varphi = \frac{1}{2} \sum A_v(t) e^{i \kappa_v x - i \omega_v t},$$

то все члены, за исключением резонансных, будут осциллировать по x . Исключив их усреднением, можно при помощи вариационного принципа получить уравнения для A_n . В простейших случаях, подобных рассмотренному выше, упрощение не очень велико. Довольно легко получаем усредненный лагранжиан

$$\begin{aligned} \hat{L} = & \frac{1}{4} \sum \{ \dot{A}_n \dot{A}_n^* - i\omega_n A_n \dot{A}_n^* + i\omega_n \dot{A}_n A_n^* \} - \\ & - \frac{\sigma}{16} \left\{ 6 \sum A_n^2 A_n^{*2} + 24 \sum_{m \neq n} \sum A_m A_m^* A_n A_n^* \right\} - \\ & - \frac{\sigma}{16} \{ 12 A_0^2 A_+^* A_-^* e^{i\Omega t} + 12 A_0^{*2} A_+ A_- e^{-i\Omega t} \}, \end{aligned} \quad (15.66)$$

где суммирование проводится по A_0 , A_+ , A_- . Но дальнейший анализ вариационных уравнений, по существу, таков же. Главное преимущество данной формы записи лагранжиана заключается в каноничности формы.

Теория взаимодействий не ограничена «соседними» волновыми числами. При достаточно общих дисперсионных соотношениях можно рассматривать резонансы, удовлетворяющие равенству (15.56), для сильно отличающихся волновых чисел k_v . В этом случае существует значительный обмен энергией между различными модами. Такие случаи исследовал Филлипс [1], который приводит и ссылки на другие работы. Иллюстративный пример можно найти в нелинейной оптике (см. § 16.5). Этот тип взаимодействия между сильно отличающимися волновыми числами тесно связан с многофазовыми решениями, указанными в § 14.9.

Нелинейная оптика

16.1. Основные идеи

Одной из наиболее интересных для изучения нелинейных дисперсионных эффектов областей является нелинейная оптика. Теоретические идеи здесь естественно связываются с результатами экспериментов и используются при конструировании физических приборов. Теория модуляций дает естественный подход к ряду явлений, в силу высоких частот и волновых чисел основных волновых пакетов. Этим способом изучаются самофокусировка и устойчивость пучков. Нелинейные взаимодействия, приводящие к возникновению и усилению суммарных и разностных частот, имеют важное значение и наглядно демонстрируются изменением цвета лазерного луча при его прохождении через нелинейный кристалл. Эксперименты, по-видимому, легче осуществляются и точнее контролируются, чем это возможно, например, для волн на воде, где из-за многочисленности мод движения жидкости трудно выделить конкретные желаемые эффекты.

Простейшие формулировки теории очень близки к анализу уравнения Клейна — Гордона, и результаты можно получить по аналогии с этим случаем. Мы начнем с классической модели, в которой электрическая поляризация среды обусловлена смещением связанных электронов электрическим полем. В дальнейшем полученные результаты можно будет интерпретировать более широким образом. Рассмотрим основной одномерный волновой пакет и будем считать, что волны распространяются в x -направлении, а поля имеют компоненты E и B в z - и y -направлениях соответственно. Электроны смещаются в z -направлении, и мы будем описывать это смещение функцией $r(x, t)$. Уравнения Максвелла сводятся к следующему виду:

$$\begin{aligned} B_t - E_x &= 0, \\ E_t + \frac{qN}{\epsilon_0} r_t &= c_0^2 B_x, \end{aligned} \tag{16.1}$$

где q — заряд электрона, N — число электронов на единицу объема, c_0 — скорость света в вакууме и ϵ_0 — диэлектрическая проницаемость свободного пространства. Для того чтобы эта система была полной, необходимо соотношение между r и E . Мы предположим, что действие поля E на электрон можно представить в виде потенциальной ямы, так что развивается нелинейная возвращающая сила. В соответствии с этим искомое соотношение таково:

$$mr_{tt} + U'(r) = qE. \quad (16.2)$$

Если ввести поляризацию $P = Nqr$ и исключить из уравнений Максвелла компоненту B , то получится

$$E_{tt} + \frac{1}{\epsilon_0} P_{tt} = c_0^2 E_{xx}, \quad (16.3)$$

$$P_{tt} + V'(P) = \epsilon_0 v_p^2 E, \quad (16.4)$$

где

$$V(P) = \frac{qN}{m} U(r), \quad v_p^2 = \frac{Nq^2}{\epsilon_0 m}, \quad (16.5)$$

причем v_p — плазменная частота.

Каждый осциллятор подвергается также суммарному воздействию всех остальных осцилляторов. В элементарном описании это учитывается заменой поля E в правой части уравнений (16.2) и (16.4) на $E + P/(3\epsilon_0)$, что равно полю внутри сферической полости, окруженной диэлектриком с поляризацией P . Для наших целей можно считать, что дополнительный член включен в $V'(P)$.

Анализ существенно упрощается, если потенциальная яма симметрична и $V'(P)$ — нечетная функция от P . По большей части мы будем считать, что это выполняется, а там, где будет уместно, укажем, что будет происходить в более общем случае.

Однородные волновые пакеты

Для однородного волнового пакета $E = E(\theta)$, $P = P(\theta)$, $\theta = kx - \omega t$. Интегрирование уравнения (16.3) при этом дает

$$(\omega^2 - c_0^2 k^2) \epsilon_0 E = -\omega^2 P + \text{const}. \quad (16.6)$$

Если $V'(P)$ — нечетная функция от P , то без потери общности постоянную интегрирования можно положить равной нулю. В других случаях, однако, эта постоянная может потребоваться и будет играть важную роль. Например, если в $V'(P)$ входит член с P^2 , то из (16.4) видно, что средние значения компонент E и P отличаются на член, квадратичный по амплитуде; следовательно, в (16.6) требуется постоянная, пропорциональная квадрату амплитуды. Однако если $V'(P)$ — нечетная функция, то замечаем, что можно положить средние значения компонент E и P равными нулю, и при таком выборе постоянная в (16.6) должна быть нуле-

вой. Тогда имеем

$$\varepsilon_0 E = -\frac{\omega^2}{\omega^2 - c_0^2 k^2} P, \quad (16.7)$$

$$\omega^2 P_{\theta\theta} + V'(P) + \frac{\omega^2 v_p^2}{\omega^2 - c_0^2 k^2} P = 0. \quad (16.8)$$

В линейном случае $V'(P) = v_p^2 P$, решение уравнения (16.8) синусоидально по θ и мы получаем дисперсионное соотношение

$$n_0^2 = \frac{c_0^2 k^2}{\omega^2} = 1 - \frac{v_p^2}{\omega^2 - v_0^2}. \quad (16.9)$$

В полосе поглощения около резонансной частоты v_0 становится важным демпфирование, которое исключает сингулярное поведение в этой области. Однако вдали от резонансной частоты этот эффект мал, и при первом рассмотрении им можно пренебречь.

В почти линейном случае можно положить¹

$$\begin{aligned} V'(P) &= v_0^2 P - \alpha P^3 + \dots, \\ P &= b_1 \cos \theta + b_3 \cos 3\theta + \dots, \\ E &= a \cos \theta + a_3 \cos 3\theta + \dots \end{aligned} \quad (16.10)$$

и вывести дисперсионное соотношение

$$n^2 = \frac{c_0^2 k^2}{\omega^2} = 1 - \frac{v_p^2}{\omega_0^2 - v_0^2} + \frac{3}{4} \frac{\alpha \varepsilon_0^2 v_p^6}{(\omega^2 - v_0^2)^4} a^2 + \dots \quad [(16.11)]$$

В полностью нелинейном случае уравнение (16.8) имеет осциллирующие решения, как показано для уравнения Клейна — Гордона (см. (14.3)); тесная связь между этими двумя случаями становится очевидной.

Усредненный лагранжиан

Вариационный принцип можно сформулировать в терминах потенциала ψ , т. е. z -компоненты векторного потенциала. Компоненты поля даются равенствами $E = -\psi_t$, $B = -\psi_x$, и соответствующий лагранжиан имеет вид

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} \varepsilon_0 (\psi_t^2 - c_0^2 \psi_x^2) - N q \psi_t r + N \left\{ \frac{1}{2} m r_t^2 - U(r) \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon_0 (\psi_t^2 - c_0^2 \psi_x^2) - \psi_t P + \frac{1}{\varepsilon_0 v_p^2} \left\{ \frac{1}{2} P_t^2 - V(P) \right\}. \end{aligned} \quad (16.12)$$

Если $V'(P)$ — нечетная функция от P , то для однородного волнового пакета достаточно считать ψ и P периодическими функциями от θ . Тогда, согласно (16.7) и (16.8), имеем

$$E = \omega \psi_\theta = -\frac{\omega^2}{\omega^2 - c_0^2 k^2} \frac{P}{\varepsilon_0}, \quad (16.13)$$

$$\frac{1}{2} \omega^2 P_\theta^2 + V(P) + \frac{1}{2} \frac{\omega^2 v_p^2}{\omega^2 - c_0^2 k^2} P^2 = A, \quad (16.14)$$

где второе уравнение было проинтегрировано и при этом в него вошла постоянная интегрирования A как амплитудный параметр. Усредненный лагранжиан затем получается подстановкой равенств (16.13)–(16.14) в (16.12) и последующими стандартными выкладками. Результат имеет вид

$$\mathcal{L}(\omega, k, A) = \frac{1}{\epsilon_0 v_p^2} \left(\frac{\omega}{2\pi} \oint \left\{ 2A - 2V(P) - \frac{\omega^2 v_p^2}{\omega^2 - \epsilon_0^2 k^2} P^2 \right\}^{1/2} dP - A \right). \quad (16.15)$$

Опять можно отметить сходство со случаем уравнения Клейна — Гордона (14.26).

Если функция $V'(P)$ не является нечетной, то потребуется более общее выражение

$$\psi = \beta x - \gamma t + \Psi(\theta). \quad (16.16)$$

Параметры β и γ дают ненулевые средние значения для B и E , и их следует рассматривать как псевдодолговое число и псевдочастоту, как было объяснено в § 14.7. В уравнение (16.6) теперь следует ввести вторую постоянную интегрирования, скажем $\tilde{A}$, и тройка $(\gamma, \beta, \tilde{A})$ аналогична основной тройке (ω, k, A) . В теории модуляций связь изменений тройки (ω, k, A) с изменениями средних полевых параметров $(\gamma, \beta, \tilde{A})$ приводит к чрезвычайно важному эффекту. Мы не будем выяснять здесь детали; они аналогичны случаю волн на воде, который будет рассмотрен ниже.

Основываясь на лагранжиане (16.15) и используя описанные в предыдущих главах методы, можно вывести общие результаты. Однако большая часть результатов нелинейной оптики связана с почти линейным случаем. В этом конкретном контексте он обладает тем преимуществом, что хотя для обоснования теории используется специальная модель, более широкая интерпретация формул достаточно ясна. Почти линейную форму лагранжиана $\mathcal{L}$ легче всего получить непосредственной подстановкой разложений (16.10) в (16.12), а не аппроксимацией выражения (16.15). Вычисление лагранжиана $\mathcal{L}$ вплоть до четвертого порядка по a особенно просто, поскольку коэффициенты a_3 , b_3 , которые имеют третий порядок по a , дают вклад лишь в члены шестого порядка и выше. (Ср. с выводом выражения (14.52).) Таким образом, в этом порядке

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{\epsilon_0^2 k^2}{\omega^2} \right) \epsilon_0 a^2 + \frac{1}{2} ab + \frac{\omega^2 - v_0^2}{4\epsilon_0 v_p^2} b^2 + \frac{3}{32} \frac{\alpha}{\epsilon_0 v_p^2} b^4. \quad (16.17)$$

Вариационное уравнение $\mathcal{L}_b = 0$ позволяет выразить b через a :

$$b = -\frac{\epsilon_0 v_p^2}{\omega^2 - v_0^2} a + \frac{3}{4} \frac{\epsilon_0^3 v_p^6}{(\omega^2 - v_0^2)^4} a^3. \quad (16.18)$$

Подставляя этот результат в выражение для $\mathcal{L}$, получаем

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{c_0^2 k^2}{\omega^2} - \frac{v_p^2}{\omega^2 - v_0^2} \right) \varepsilon_0 a^2 + \frac{3}{32} \frac{\alpha \varepsilon_0^3 v_p^6}{(\omega^2 - v_0^2)^4} a^4. \quad (16.19)$$

В качестве проверки отметим, что дисперсионное соотношение $\mathcal{L}_a = 0$ совпадает с (16.11), как и должно быть.

Первый член в (16.12), который можно записать в виде $\frac{1}{2} \varepsilon_0 (E^2 - c_0^2 B^2)$, является основным волновым оператором для электромагнитных волн в свободном пространстве. Он всегда приводит к члену

$$\frac{1}{4} \left(1 - \frac{c_0^2 k^2}{\omega^2} \right) \varepsilon_0 a^2$$

в лагранжиане $\mathcal{L}$, где a — амплитуда электрического поля. Другие члены в выражении (16.19) описывают отклик среды на осциллирующее электрическое поле. Для других моделей, а также для учета заданных свойств среды можно, по-видимому, предположить по аналогии, что

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{c_0^2 k^2}{\omega^2} \right) \varepsilon_0 a^2 + g_2(\omega) \varepsilon_0 a^2 + g_4(\omega) \varepsilon_0 a^4, \quad (16.20)$$

где $g_2(\omega)$ и $g_4(\omega)$ — некоторые функции. Тогда дисперсионное соотношение $\mathcal{L}_a = 0$ позволит связать функции g_2 , g_4 с поведением показателя преломления. Если потребовать, чтобы дисперсионное соотношение имело вид

$$n = \frac{c_0 k}{\omega} = \overline{n_0(\omega)} + \frac{1}{2} n_2(\omega) a^2, \quad (16.21)$$

то мы должны положить

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} \left\{ n_0^2(\omega) - \frac{c_0^2 k^2}{\omega^2} \right\} \varepsilon_0 a^2 + \frac{1}{8} n_0(\omega) n_2(\omega) \varepsilon_0 a^4. \quad (16.22)$$

Коэффициент $n_0(\omega)$ — это линейный показатель преломления, и теперь его можно задать выражением, более близким к действительности, чем (16.9). Например, включив большее число резонансных частот ν_j , будем иметь

$$n_0^2(\omega) = 1 - v_p^{2k} \sum_j \frac{f_j}{\omega^2 - \nu_j^2}, \quad \sum_j f_j = 1,$$

где $f_j = N_j/N$ — относительное число электронов с резонансной частотой ν_j . Это согласуется и с квантотеоретическим описанием, для которого ν_j — частоты перехода, а f_j — вероятности перехода. Аналогичным образом, нелинейный коэффициент $n_2(\omega)$ можно выбрать так, чтобы описать другие модели или известные физические свойства среды. Однако всегда следует помнить о том, что мы ограничиваемся случаями, в которых отсутствуют квадратичные средние поля.

16.2. Одномерные модуляции

В почти линейной теории можно поступать точно так же, как и в § 14.2. В оптике более принято, чтобы дисперсионное соотношение выражало k или n как функцию от ω , так что в теории модуляций мы примем за основные переменные ω и a . Дисперсионное соотношение можно записать в виде ¹⁾

$$k = k_0(\omega) + k_n(\omega)a^2, \quad (16.23)$$

где

$$k_0(\omega) = \frac{\omega n_0(\omega)}{c_0}, \quad k_n(\omega) = \frac{\omega n_2(\omega)}{2c_0}. \quad (16.24)$$

В низшем порядке уравнения модуляций, соответствующие уравнениям (14.18)–(14.19), имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial a^2}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \{k'_0(\omega) a^2\} &= 0, \\ \frac{\partial \omega}{\partial x} + k'_0(\omega) \frac{\partial \omega}{\partial t} + k_n(\omega) \frac{\partial a^2}{\partial t} &= 0. \end{aligned} \quad (16.25)$$

Характеристические скорости определяются равенствами

$$\frac{1}{C} = k'_0(\omega) \pm \{k_n(\omega) k''_0(\omega)\}^{1/2} a. \quad (16.26)$$

Уравнения являются гиперболическими, если $k_n k''_0 > 0$, и эллиптическими, если $k_n k''_0 < 0$. В силу дисперсионного соотношения (16.11), знак k''_0 совпадает со знаком $v_0^2 - \omega^2$, а знак k_n совпадает со знаком α . Отсюда видим, что уравнения

$$\begin{aligned} \text{гиперболические: } \alpha (v_0^2 - \omega^2) &> 0, \\ \text{эллиптические: } \alpha (v_0^2 - \omega^2) &< 0. \end{aligned} \quad (16.27)$$

Эти результаты впервые были получены Островским [1]. Обычно в оптике $\omega^2 < v_0^2$, $\alpha > 0$, так что уравнения оказываются гиперболическими. Однако Островский [2] сообщает об экспериментах на радиочастотах с ферритами и полупроводниковыми диодами, где можно получить оба случая. Обнаружены как гиперболическое искажение, так и эллиптическая неустойчивость, и, по-видимому, в результате образуются устойчивые модуляции (ср. с обсуждением эффектов более высокого порядка в § 15.5).

Эффекты следующего порядка приводят к тому, что в выражении (16.17) для $\mathcal{L}$ появляются квадратичные по производным от a и b члены. Тогда уравнения модуляций оказываются по структу-

¹⁾ Для обозначений нелинейного коэффициента мы используем k_n вместо k_2 , поскольку k_2 потребуются в дальнейшем для обозначения x_2 -компоненты вектора $\mathbf{k}$.

ре подобными уравнениям, рассмотренным в § 15.5. Качественно явления одинаковы, так что детали для этого случая приводить не будем. Основные результаты были получены Островским [1], а Смолл [1] показал, как можно использовать вариационный подход. Мы, однако, изучим в следующем параграфе аналогичную задачу о пространственных модуляциях и самофокусировке пучка. Для них важны эффекты высшего порядка, так что мы кратко обрисовем теорию.

Полностью нелинейные результаты, соответствующие выражениям (16.26) — (16.27), можно получить из § 15.2, используя подходящий лагранжиан. Для простой модели, рассмотренной выше, такой лагранжиан дается равенством (16.15).

16.3. Самофокусировка светового пучка

Если нелинейный член в дисперсионном соотношении (16.24) положителен ($n_2(\omega) > 0$), то фазовая скорость $c = \omega/k = c_0/n$ возрастает при убывании амплитуды по мере удаления от оси пучка. Интуитивно это указывает на стремление пучка сфокусироваться. Конечно, это весьма примитивный довод, и мы теперь рассмотрим подобные вопросы более детально.

Для пространственных модуляций мы предположим, что локально волну можно описать как периодический волновой пакет, распространяющийся в направлении волнового вектора $\mathbf{k}$. Это определяет усредненный лагранжиан, и в простейших случаях, когда отсутствуют псевдочастоты, он принимает вид $\mathcal{L}(\omega, \mathbf{k}, a)$, где ω — частота, а a — амплитуда электрического поля. В почти линейном случае $\mathcal{L}(\omega, \mathbf{k}, a)$ дается равенством (16.22) с $k = |\mathbf{k}|$.

Для решений, в которых $\omega, \mathbf{k}, a$ не зависят от t , имеем $\omega = \text{const}$, и уравнения модуляций, полученные из усредненного вариационного принципа, имеют следующий вид:

$$\mathcal{L}_a = 0, \quad (16.28)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \mathcal{L}_{k_i} = 0, \quad \frac{\partial k_i}{\partial x_j} - \frac{\partial k_j}{\partial x_i} = 0. \quad (16.29)$$

Если среда изотропна, так что $\mathcal{L}$ зависит только от модуля k вектора $\mathbf{k}$, то уравнения (16.29) сводятся к таким:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (k_i \rho) = 0, \quad \frac{\partial k_i}{\partial x_j} - \frac{\partial k_j}{\partial x_i} = 0, \quad (16.30)$$

где

$$\rho = -k^{-1} \mathcal{L}_k. \quad (16.31)$$

Дисперсионное соотношение (16.28) устанавливает связь между a и k ; отсюда в принципе ρ можно выразить как функцию от k (хотя на практике не всегда удобно действительно исключать a).

Интересно, что уравнения (16.30) совпадают с уравнениями сжимаемого безвихревого течения жидкости, в которых волновой вектор $\mathbf{k}$ занял место вектора скорости, а ρ — место плотности. Соотношение между ρ и k , заданное равенством (16.31), соответствует уравнению Бернулли, связывающему плотность и скорость в задаче о течении жидкости. В этой аналогии световой пучок соответствует струе жидкости. Но при выводе качественных результатов непосредственно из задачи о течении жидкости необходима осторожность, поскольку в оптике ρ обычно является возрастающей функцией от k , тогда как в жидкости плотность и скорость меняются противоположным образом. В то же время можно с успехом использовать известные методы нахождения решений.

Тип уравнений (16.30) — (16.31) определяет их математическую структуру. Это не связано с вопросом об эллиптичности исходных зависящих от времени уравнений. Более того, эллиптичность стационарных уравнений не указывает на неустойчивость; их тип влияет только на свойства решения и вид граничных условий.

Для плоских или осесимметричных пучков направим x вдоль оси пучка и r в поперечном или радиальном направлении. Волновой вектор будет соответственно иметь компоненты (k_1, k_2) , и уравнения (16.30) — (16.31) запишутся в виде

$$\frac{\partial k_2}{\partial x} - \frac{\partial k_1}{\partial r} = 0, \quad (16.32)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho k_1) + \frac{\partial}{\partial r} (\rho k_2) + \frac{m \rho k_2}{r} = 0, \quad (16.33)$$

$$\rho = \rho(k), \quad (16.34)$$

где $m = 0$ для плоского пучка и $m = 1$ для осесимметричного пучка.

Тип уравнений

Характеристики легче всего найти, временно восстановив фазу θ . Произведем замену

$$k_1 = \theta_x, \quad k_2 = \theta_r$$

и запишем (16.33) как уравнение второго порядка:

$$\left(1 + \frac{k_1^2}{k} \frac{\rho'}{\rho}\right) \theta_{xx} + \frac{2k_1 k_2}{k} \frac{\rho'}{\rho} \theta_{xr} + \left(1 + \frac{k_2^2}{k} \frac{\rho'}{\rho}\right) \theta_{rr} + \frac{m}{r} \theta_r = 0.$$

Тогда характеристики в (x, r) -плоскости должны удовлетворять уравнению

$$\left(1 + \frac{k_1^2}{k} \frac{\rho'}{\rho}\right) dr^2 - \frac{2k_1 k_2}{k} \frac{\rho'}{\rho} dr dx + \left(1 + \frac{k_2^2}{k} \frac{\rho'}{\rho}\right) dx^2 = 0.$$

Характеристики будут мнимыми, а уравнение эллиптическим, если

$$1 + k \frac{\rho'}{\rho} > 0;$$

в противном случае характеристики вещественны и уравнение гиперболическое.

Для почти линейной теории, описываемой лагранжианом (16.22), имеем

$$\rho = -k^{-1} \mathcal{L}_k = \frac{\varepsilon_0 c_0^2}{2\omega^2} a^2, \quad (16.35)$$

и, следовательно,

$$\frac{c_0 k}{\omega} = n_0(\omega) + \frac{1}{2} n_2(\omega) a^2 = n_0(\omega) + \frac{\omega^2 n_2(\omega)}{\varepsilon_0 c_0^2} \rho. \quad (16.36)$$

Если $n_2(\omega) > 0$, то $\rho'(k) > 0$ и стационарные уравнения эллиптические. Мы рассмотрим только этот случай. Заметим, что, в силу (16.26), исходные зависящие от времени уравнения будут гиперболическими, если, кроме того, выполняется условие $k_0''(\omega) > 0$.

Фокусировка

«Линии тока», определяемые векторным полем $\mathbf{k}$, являются ортогональными траекториями семейства фазовых поверхностей $\theta = \text{const}$. В изотропной среде групповая скорость имеет то же направление, что и $\mathbf{k}$, и линии тока являются лучами. Можно представить себе, что фазовые поверхности движутся вдоль этих лучей и фокусировка связана с тем, что лучи сходятся. При анализе удобно преобразовать уравнения (16.32) — (16.34) и ввести координаты (ξ, η) , связанные с этими лучами и фазовыми поверхностями. Если ввести

$$\begin{aligned} k_1 &= \xi_x, & k_2 &= \xi_r, & \theta &= \xi(x, r) - \omega t, \\ \rho k_1 r^m &= \eta_r, & \rho k_2 r^m &= -\eta_x, \end{aligned} \quad (16.37)$$

то уравнения (16.32) — (16.33) будут удовлетворяться тождественно; последовательные положения фазовой поверхности даются равенством $\xi = \text{const}$, а линий тока — равенством $\eta = \text{const}$. Соотношения (16.37) можно обратить:

$$\begin{aligned} x_\xi &= \frac{\cos \chi}{k}, & x_\eta &= -\frac{\sin \chi}{\rho k r^m}, \\ r_\xi &= \frac{\sin \chi}{k}, & r_\eta &= \frac{\cos \chi}{\rho k r^m}, \end{aligned}$$

где χ — угол между вектором $\mathbf{k}$ и осью x . Таким образом, уравнения совместности можно записать в виде

$$\frac{\partial \chi}{\partial \xi} = \frac{\rho r^m}{k} \frac{\partial k}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial \chi}{\partial \eta} = k \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{\rho k r^m} \right). \quad (16.38)$$

Если ρ убывает при удалении от оси, то, в силу (16.36) и предположения $n_2 > 0$, это же имеет место и для k . Следовательно, из первого уравнения (16.38) следует, что $\partial\chi/\partial\xi < 0$; это указывает на то, что лучи загибаются к оси и пучок фокусируется. Соответственно если $n_2 < 0$, то происходит дефокусировка.

Узкие пучки

Некоторые интересные решения приведенных выше уравнений были построены Ахмановым, Сухоруковым и Хохловым [1] при предположении, что пучок узок. Предполагалось, что нелинейные эффекты дают малую поправку к линейной плоской волне с постоянным волновым числом K и что производные по r имеют больший порядок, чем производные по x , вследствие того, что пучок узок. Пусть

$$\theta = -\omega t + Kx + Ks(x, r),$$

где производные s_x и s_r обе малы, но s_x и s_r^2 имеют одинаковый порядок. (Этого можно добиться формально, положив

$$\theta = -\omega t + Kx + K\varepsilon^2 s\left(x, \frac{r}{\varepsilon}\right),$$

где ε — амплитудный параметр.) В этом приближении имеем

$$k \simeq K \left(1 + s_x + \frac{1}{2} s_r^2 \right),$$

и почти линейное дисперсионное соотношение $n = c_0 k / \omega = n_0 + \frac{1}{2} n_2 a^2$ дает

$$s_x + \frac{1}{2} s_r^2 = \frac{1}{2} \frac{n_2}{n_0} a^2 \quad (16.39)$$

в предположении, что $c_0 K / \omega = n_0(\omega)$. Поскольку, в силу (16.35), $\rho \propto a^2$, то в (16.33) ρ можно заменить на a^2 . Тогда, учитывая предположение $s_x \ll s_r$, уравнение (16.33) можно переписать так:

$$\frac{\partial a^2}{\partial x} + s_r \frac{\partial a^2}{\partial r} + \left(s_{rr} + \frac{m}{r} s_r \right) a^2 = 0. \quad (16.40)$$

Уравнения (16.39) и (16.40) образуют замкнутую систему относительно функций s и a^2 .

Можно ожидать, что в окрестности оси s имеет вид

$$s = \sigma(x) + \frac{1}{2} \frac{r^2}{R(x)} + O(r^4), \quad (16.41)$$

где $R(x)$ — радиус кривизны фазовой поверхности у оси. Удивительно, что существует точное решение, для которого $s(x, r)$ имеет в точности эти два члена. Из (16.39) видно, что a^2 должно быть квадратичным по r , и уравнение (16.40) дает соотношения между

различными коэффициентами. Эти соотношения имеют вид

$$a^2 = \frac{a_0^2}{f^{m+1}(x)} \left\{ 1 - \frac{r^2}{r_0^2 f^2(x)} \right\}, \quad (16.42)$$

$$\sigma' = \frac{1}{2} \frac{n_2}{n_0} \frac{a_0^2}{f^{m+1}(x)}, \quad \frac{1}{R(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)}, \quad (16.43)$$

где

$$f'^2 = \frac{2n_2 a_0^2}{(m+1) n_0 r_0^2} \left(\frac{1}{f^{m+1}} - 1 \right) + \frac{1}{R_0^2}, \quad f(0) = 1; \quad (16.44)$$

здесь r_0 — начальный радиус пучка, a_0 — начальная амплитуда на оси, а R_0 — начальный радиус кривизны фазовой поверхности.

Если фазовые поверхности в точке $x = 0$ плоские ($R_0^{-1} = 0$), то решения уравнения (16.44) имеют вид

$$m = 0: x = \left(\frac{n_0}{2n_2} \right)^{1/2} \frac{r_0}{a_0} \left\{ f^{1/2} (1-f)^{1/2} - \arcsin f^{1/2} + \frac{\pi}{2} \right\}, \quad (16.45)$$

$$m = 1: x = \left(\frac{n_0}{n_2} \right)^{1/2} \frac{r_0}{a_0} (1-f^2)^{1/2}. \quad (16.46)$$

Пучок фокусируется, и решение становится сингулярным в точке, где $f(x) \rightarrow 0$; здесь радиус кривизны $R(x) \rightarrow 0$ и амплитуда $a \rightarrow \infty$. Расстояние до этой точки фокуса составляет

$$x_f = \frac{\pi}{2} \left(\frac{n_0}{2n_2} \right)^{1/2} \frac{r_0}{a_0} \quad \text{для } m = 0, \quad (16.47)$$

$$x_f = \left(\frac{n_0}{n_2} \right)^{1/2} \frac{r_0}{a_0} \quad \text{для } m = 1. \quad (16.48)$$

В окрестности особенности производные высшего порядка от a начинают играть важную роль и должны быть включены в уравнения (16.39)–(16.40). Как мы увидим, эти дополнительные члены вводят дисперсионные эффекты, которые препятствуют фокусировке и приводят к непрерывным решениям.

Прежде чем это сделать, упомянем о красивом решении плоской задачи ($m = 0$), найденном Ахмановым, Сухоруковым и Хохловым. Введем

$$v = s_y, \quad \tau = a^2;$$

тогда система (16.39)–(16.40) примет вид

$$\begin{aligned} v_x + vv_y - \gamma \tau_y &= 0, \quad \gamma = \frac{n_2}{2n_0}, \\ \tau_x + v\tau_y + \tau v_y &= 0, \end{aligned}$$

где для плоского случая мы заменили r на y . Эти уравнения подобны уравнениям нестационарной одномерной газовой динамики, за исключением изменения знака у γ . При помощи преобразования

годографа они сводятся к *линейным*:

$$y_\tau - vx_\tau - \gamma x_v = 0,$$

$$y_v - vx_v + \tau x_\tau = 0.$$

Вследствие линейности эти уравнения допускают возможность построения общего решения при помощи суперпозиции. Однако в упомянутом здесь частном решении авторы заметили, что предпочтительнее использовать переменные

$$p = x\tau, \quad q = y - vx.$$

Уравнения годографа

$$q_\tau - \frac{\gamma}{\tau} p_v = 0, \quad q_v + p_\tau = 0$$

преобразуются затем к виду

$$v_p - \frac{\gamma}{\tau} \tau_q = 0, \quad \tau_p + v_q = 0.$$

Положив $v = -\Phi_p$, $\tau = \Phi_q$, получим

$$\Phi_q \Phi_{pp} + \gamma \Phi_{qq} = 0.$$

Это уравнение имеет решение с разделяющимися переменными

$$\Phi = \left(ha_0^2 + \frac{\gamma}{h} p^2 \right) \operatorname{th} \frac{q}{h},$$

которое и описывает пучок. В исходных переменных решение выражается через параметры p и q следующим образом:

$$s_y = v = -\frac{2\gamma p}{h} \operatorname{th} \frac{q}{h}, \quad a^2 = \tau = \left(a_0^2 + \frac{\gamma}{h^2} p^2 \right) \operatorname{sech}^2 \frac{q}{h},$$

$$x = \frac{p}{\tau}, \quad y = \frac{vp}{\tau} + q.$$

На начальной плоскости $x = 0$ имеем

$$s_y = 0, \quad a^2 = a_0^2 \operatorname{sech}^2 (y/h).$$

В начале пучок состоит из лучей, параллельных оси x , и имеет близкое к действительности распределение амплитуд. Можно показать, что пучок фокусируется в точке

$$x_f = \frac{1}{2\gamma^{1/2}} \frac{h}{a_0} = \left(\frac{n_0}{2n_2} \right)^{1/2} \frac{h}{a_0}. \quad (16.49)$$

Чтобы это решение согласовывалось около оси с формулой (16.42), следует положить $h = r_0$, и мы видим, что формула (16.47) для фокусного расстояния дает хорошее приближение.

16.4. Дисперсионные эффекты в приближении более высокого порядка

Временно вернемся к частной модели с лагранжианом (16.12), чтобы оценить влияние членов следующего порядка в модуляционном приближении. В почти линейной теории исходными, как и ранее, являются разложения (16.10), но теперь после подстановки сохраняются производные коэффициентов $a, a_3, \dots, b, b_3, \dots$, как было объяснено в § 15.5. Для стационарных пучков эти параметры модуляций являются функциями только от x , и из (16.12) видно, что производные по x возникают только в члене $-c_0^2 \psi_{x_i}^2$ (обобщенном на большее число пространственных измерений). Подставляя разложение

$$\psi = \frac{a}{\omega} \sin \theta + \frac{a^3}{3\omega} \sin 3\theta + \dots,$$

эквивалентное (16.10), видим, что в усредненном лагранжиане (16.17) появляется дополнительный член

$$-\frac{1}{4} \frac{\varepsilon_0 c_0^2}{\omega^2} a_{x_i}^2.$$

Исключение параметра b с помощью (16.18) не затрагивает этого члена; следовательно, он добавляется и к (16.19). Наконец, обобщив выражение (16.19), как и выше, имеем

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} \left\{ n_0^2(\omega) - \frac{c_0^2 k^2}{\omega^2} \right\} \varepsilon_0 a^2 + \frac{1}{8} n_0(\omega) n_2(\omega) \varepsilon_0 a^4 - \frac{1}{4} \frac{\varepsilon_0 c_0^2}{\omega^2} a_{x_i}^2. \quad (16.50)$$

Вариационные уравнения теперь имеют вид

$$\delta a: \left(n_0^2 - \frac{c_0^2 k^2}{\omega^2} \right) a + n_0 n_2 a^3 + \frac{c_0^2}{\omega^2} a_{x_i x_i} = 0 \quad (16.51)$$

$$\delta \theta: \frac{\partial}{\partial x_i} (k_i a^2) = 0, \quad (16.52)$$

а уравнение совместности — вид

$$\frac{\partial k_i}{\partial x_j} - \frac{\partial k_j}{\partial x_i} = 0. \quad (16.53)$$

Дополнительный член в (16.51) носит дисперсионный характер и противодействует фокусировке. Для того чтобы пучок начал фокусироваться, нелинейный член $n_0 n_2 a^3$ должен доминировать над дисперсионным членом $c_0^2 a_{x_i x_i} / \omega^2$. Если начальный радиус пуч-

ка равен r_0 , то это дает оценку

$$a_0^2 \gtrsim \frac{n_0}{n_2} \frac{1}{k^2 r_0^2} \quad (16.54)$$

для требуемой критической интенсивности. По мере того как пучок фокусируется, возрастает (за счет сокращения поперечного масштаба) влияние члена $a_{x_i x_i}$ и появление особенности предотвращается. В общем случае можно ожидать, что ширина пучка будет осциллировать в соответствии с осциллирующим влиянием нелинейности и дисперсии.

В качестве частного случая следует ожидать, что имеется решение, представляющее однородный пучок, все параметры которого не зависят от расстояния вдоль оси. Для плоского или осесимметричного пучка уравнения имеют вид

$$k_2 = 0, \quad k_1 = k = \text{const},$$

$$\frac{c_0^2}{\omega^2} \left(a_{rr} + \frac{m}{r} a_r \right) + \left(n_0^2 - \frac{c_0^2 k^2}{\omega^2} \right) a + n_0 n_2 a^3 = 0.$$

Обозначим через a^* амплитуду, для которой

$$\frac{c_0^2 k^2}{\omega^2} = n_0^2 + n_0 n_2 a^{*2}; \quad (16.55)$$

тогда

$$a_{rr} + \frac{m}{r} a_r = 2\gamma K^2 a (a^{*2} - a^2), \quad (16.56)$$

где, как и ранее, $\gamma = n_2/(2n_0)$, $K^2 = \omega_0^2 n_0^2 / c_0^2$. В плоском случае $m = 0$ и уравнения интегрируются, давая

$$a_y^2 = \gamma K^2 a^2 (a_0^2 - a^2), \quad (16.57)$$

где $a_0 = a^* \sqrt{2}$ — максимальная амплитуда (a^* — амплитуда в точке перегиба профиля). Соответствующее решение имеет вид

$$a = a_0 \operatorname{sech}(\gamma^{1/2} K a_0 y). \quad (16.58)$$

Это аналог уединенной волны нестационарной теории. Если в равенство (16.57) ввести постоянную интегрирования, то можно получить осциллирующие периодические по y решения. Они аналогичны кноидальным волнам.

Для осесимметричного пучка с $m = 1$ решения уравнения (16.56) были получены численно Кью, Гармайром и Таунсом [1], а также Хаусом [1]. Первые вычислили решение, соответствующее решению (16.58), и оказалось, что оно монотонно убывает от a_0 при $r = 0$ до нуля при $r \rightarrow \infty$. Хаус нашел осциллирующие решения с постепенно затухающей амплитудой, описывающие пучок, окруженный дифракционными кольцами. Смолл [1] заметил, что уравнение (16.56) в безразмерной форме с $\bar{a} = a/a^*$ и

$\bar{r} = rKa^* (2\gamma)^{1/2}$ ассоциируется с вариационным принципом

$$\delta \int_0^\infty \bar{r} \left(\bar{a}_r^2 + \bar{a}^2 - \frac{1}{2} \bar{a}^4 \right) d\bar{r} = 0,$$

и, используя метод Рэлея — Ритца, показал, что

$$\bar{a} = 0,8488 \exp(-0,2495\bar{r}^2) + 1,3156 \exp(-1,1810\bar{r}^2)$$

является хорошим приближением к решению Кьяо, Гармайра и Таунса. В этих безразмерных переменных требуемая интенсивность равна

$$P = \int_0^\infty \bar{a}^2 \bar{r} d\bar{r} \simeq 1,86.$$

Узкие пучки

В приближении узких пучков уравнения (16.51) — (16.52) преобразуются при тех же предположениях, что привели к (16.39) — (16.40). Теперь имеется дополнительный член со второй производной, включенный в (16.39), так что имеем

$$K^2 (2s_x + s_r^2) a = \frac{n_2}{n_0} K^2 a^3 + \left(a_{rr} + \frac{m}{r} a_r \right), \quad (16.59)$$

$$\frac{\partial a^2}{\partial x} + s_r \frac{\partial a^2}{\partial r} + \left(s_{rr} + \frac{m}{r} s_r \right) a^2 = 0. \quad (16.60)$$

Положим

$$\Psi = a e^{iKs};$$

тогда эти два уравнения объединяются в одно

$$2iK \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \nabla_\perp^2 \Psi + \frac{n_2}{n_0} K^2 |\Psi|^2 \Psi = 0, \quad (16.61)$$

где

$$\nabla_\perp^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{m}{r} \frac{\partial}{\partial r}.$$

Это нелинейное уравнение Шредингера, встречающееся в ряде различных задач, имеет некую каноническую структуру в том же смысле, что и уравнение Кортевега — де Фриза. Удивительно, что для плоских пучков ($m = 0$) можно получить широкий класс точных решений, используя метод, развитый Гарднером, Грином, Крускалом и Миурой [1] для уравнения Кортевега — де Фриза. Это было указано Захаровым и Шабатом [1], которые пошли дальше и дали исчерпывающий анализ этого уравнения. Результаты будут изложены в гл. 17.

К настоящему моменту было сделано столько различных приближений, что проще вывести уравнение (16.61) непосредственно

из уравнений Максвелла, предположив, что $\mathbf{P}$ и $\mathbf{E}$ связаны некоторой нелинейной зависимостью. Для плоского пучка имеем

$$E_{tt} + \frac{1}{\varepsilon_0} P_{tt} = c_0^2 (E_{xx} + E_{yy})$$

и, добавив соотношение

$$P = (n_0^2 - 1) \varepsilon_0 E + n_0 n_2 \varepsilon_0 a^2 E,$$

получим (с достаточной точностью)

$$n_0^2 E_{tt} + n_0 n_2 a^2 E_{tt} = c_0^2 (E_{xx} + E_{yy}).$$

Тогда если

$$E = \frac{1}{2} \Psi(x, y) e^{iKx - i\omega t} + \frac{1}{2} \Psi^*(x, y) e^{-iKx + i\omega t},$$

то

$$\frac{n_2}{n_0} K^2 |\Psi|^2 \Psi = -2iK\Psi_x - \Psi_{xx} - \Psi_{yy}.$$

Пренебрегая Ψ_{xx} , получаем (16.61).

16.5. Генерация второй гармоники

Одним из наиболее впечатляющих экспериментов нелинейной оптики является превращение красного луча в синий при прохождении через нелинейный кристалл. Это характерный пример образования второй гармоники за счет нелинейных эффектов; его теория строится в духе общих идей § 15.6. Такой эксперимент впервые поставили Франкен, Хилл, Петерс и Вайнрайх [1]. Полное изложение теории дано Яриком [1, гл. 21]. Отметим кратко основные моменты.

В этом случае соответствующим нелинейным эффектом является *квадратичная* зависимость $\mathbf{P}$ от $\mathbf{E}$ и предполагается, что компоненты $\mathbf{P}$ задаются соотношениями

$$P_i = (n_0^2 - 1) \varepsilon_0 E_i + d_{ijk} E_j E_k. \quad (16.62)$$

Такое поведение (с ненулевыми d_{ijk} при неравных между собой i , j и k) демонстрирует, например, дигидрофосфат аммония. Анизотропия этого соотношения соответствует анизотропии кристалла. Для трехмерного варианта уравнения (16.4) оно моделируется несимметричной потенциальной ямой

$$V(\mathbf{P}) \propto P_i P_j P_k.$$

В общем случае вследствие дисперсии величина n_0 зависит от частоты ω , но коэффициенты d_{ijk} , как правило, от ω не зависят.

Уравнения Максвелла можно привести к одному уравнению

$$\frac{\partial^2 E_i}{\partial t^2} + \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial^2 P_i}{\partial t^2} = c_0^2 \nabla^2 E_i. \quad (16.63)$$

Однако, в случае когда существует несколько взаимодействующих мод с различными частотами, необходима известная осторожность при непосредственном использовании соотношения (16.62), поскольку n_0 зависит от ω . В то же время если P_i расщепляется на две части $P_i = P'_i + P''_i$, где P'_i относится к линейной части, а P''_i — к нелинейной, мы знаем, что для любой отдельной частоты

$$\frac{1}{c_0^2} \left(\frac{\partial^2 E_i}{\partial t^2} + \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial^2 P'_i}{\partial t^2} \right) = -\frac{n_0^2 \omega^2}{c_0^2} E_i = -k^2 E_i, \quad (16.64)$$

где $k(\omega)$ — соответствующее волновое число для линейных волн. Рассмотрим теперь ряд взаимодействующих плоских волн, y - и z -компоненты которых соответственно равны

$$E_i = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} A_i^{(\alpha)}(x) \exp(ik_{\alpha}x - i\omega_{\alpha}t);$$

здесь $\alpha = \pm 1, \pm 2, \dots$,

$$k_{-n} = k_n, \quad \omega_{-n} = -\omega_n, \quad A^{(-n)} = A^{(n)*}$$

и k_n, ω_n удовлетворяют линейному дисперсионному соотношению. Подставив эти выражения в (16.63), получим

$$\sum_{\alpha} \left\{ ik_{\alpha} \frac{dA_i^{(\alpha)}}{dx} + \frac{1}{2} \frac{d^2 A_i^{(\alpha)}}{dx^2} \right\} \exp(ik_{\alpha}x - i\omega_{\alpha}t) = \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} P''_i.$$

Нелинейный член P'' приводит к модуляциям амплитуд $A^{(\alpha)}$. Предполагается, что эти модуляции медленные по сравнению с периодом волны и что вторыми производными по x можно пренебречь. Полагая

$$P''_i = d_{ijk} E_j E_k,$$

имеем

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} ik_{\alpha} \frac{dA_i^{(\alpha)}}{dx} \exp(ik_{\alpha}x - i\omega_{\alpha}t) &= \\ &= -\frac{\mu_0}{4} \sum_{\beta, \gamma} (\omega_{\beta} + \omega_{\gamma})^2 d_{ijk} A_j^{(\beta)} A_k^{(\gamma)} \exp\{i(k_{\beta} + k_{\gamma})x - i(\omega_{\beta} + \omega_{\gamma})t\}. \end{aligned} \quad (16.65)$$

Для трех взаимодействующих волн с частотами, удовлетворяющими условию резонанса

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_3, \quad (16.66)$$

члены, пропорциональные $e^{i\omega t}$, дают

$$\frac{dA_i^{(1)}}{dx} = \frac{i\mu_0 c_0}{2n_0} \omega_1 d_{ijk} A_j^{(3)} A_k^{(2)*} \exp\{i(k_3 - k_1 - k_2)x\}.$$

Аналогичным образом

$$\frac{dA_i^{(2)}}{dx} = \frac{i\mu_0 c_0}{2n_0} \omega_2 d_{ijk} A_j^{(3)} A_k^{(1)*} \exp \{i(k_3 - k_1 - k_2)x\},$$

$$\frac{dA_i^{(3)}}{dx} = \frac{i\mu_0 c_0}{2n_0} \omega_3 d_{ijk} A_j^{(1)} A_k^{(2)} \exp \{-i(k_3 - k_1 - k_2)x\}.$$

Если предположить, что первоначально при $x = 0$ амплитуда $A^{(3)} = 0$ и что первичные волны $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$ очень мало ослабляются взаимодействием, то в уравнении для $dA^{(3)}/dx$ можно считать $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$ постоянными и получить

$$A_i^{(3)} = \frac{\mu_0 c_0}{2n_0} \omega_3 d_{ijk} A_j^{(1)} A_k^{(2)} \frac{(1 - e^{-ix\Delta k})}{\Delta k},$$

$$\Delta k = k_3 - k_1 - k_2.$$

Амплитуда пропорциональна $(\sin (1/2 x\Delta k))/(1/2 \Delta k)$. Если взаимодействующие волны удовлетворяют условию резонанса

$$\Delta k = k_3 - k_1 - k_2 = 0 \quad (16.67)$$

точно, то сначала амплитуда $A^{(3)}$ возрастает линейно по x , но затем следует включить в рассмотрение другие уравнения взаимодействия (из которых следует, что $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$ уменьшаются по мере возрастания $A^{(3)}$). Энергия осциллирует между взаимодействующими модами. На последующих стадиях необходимо учитывать затраты энергии на образование гармоник высших порядков, а также диссипацию энергии.

Рассмотрим генерацию второй гармоники. Вторая гармоника образуется за счет самодействия, для которого

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega, \quad \omega_3 = 2\omega_1.$$

В нормальных условиях, однако, $\Delta k = k(2\omega) - 2k(\omega) \neq 0$ вследствие дисперсии, и амплитуда второй гармоники мала. Чтобы улучшить положение дел и получить истинный резонанс, Джордмейн [1] и Мейкер с соавторами [1] предложили остроумный способ использования двоякопреломляющих кристаллов (описанных в § 12.8) для согласования обыкновенного луча с частотой ω с необыкновенным лучом с частотой 2ω . Условие согласования

$$k^{(e)}(2\omega) - 2k^{(o)}(\omega) = 0$$

эквивалентно условию

$$n^{(e)}(2\omega) - n^{(o)}(\omega) = 0,$$

где индексы (e) и (o) отвечают необыкновенному и обыкновенному лучам соответственно. Изменение коэффициентов $n^{(e)}(2\omega)$ и $n^{(o)}(\omega)$ при изменении угла между волновым вектором и оптической осью показано на рис. 16.1. Вектор $\mathbf{k}$ изображен в положении, обеспе-

чивающем требуемый резонанс. Для луча рубинового лазера ($\lambda = 6940 \text{ \AA}$) в кристалле дигидрофосфата калия угол равен $50,4^\circ$. Все детали, а также возможные альтернативы приводятся в книге Ярива [1].

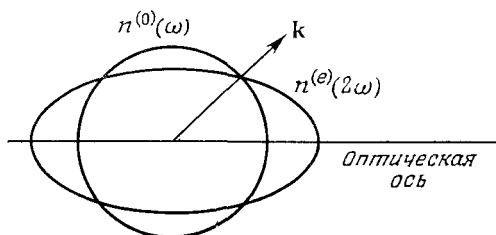


Рис. 16.1. Схема согласования обыкновенного и необыкновенного лучей.

При таких улучшениях условия резонанса эксперименты прекрасно подтверждают теорию. Замечательная фотография, сделанная Терхуном, воспроизведена на фронтисписе книги Ярива.

Волны на воде

16.6. Усредненный вариационный принцип для волн Стокса

Применим теперь вариационный подход к некоторым задачам теории волн на воде. Вариационный принцип дается равенствами (13.16) — (13.17) из § 13.2, а приближенный анализ Стокса и Кортвега — де Фриза, подтверждаемый последующими доказательствами математических теорем существования, убеждает в существовании периодических диспергирующих волновых пакетов. Поскольку ϕ — потенциал и в лагранжиане фигурируют только его производные, наиболее общая форма периодического волнового пакета такова:

$$\phi = \beta x - \gamma t + \Phi(\theta, y), \quad \theta = kx - \omega t, \quad \eta = N(\theta); \quad (16.68)$$

здесь $\Phi(\theta, y)$ и $N(\theta)$ — периодические функции от θ . Параметр β — средняя горизонтальная скорость ϕ_x , а величина γ связана со средней высотой волн. В однородном случае можно выбрать систему отсчета, в которой $\beta = 0$ и средняя высота равна нулю, что делалось и ранее (см. (13.120) и (13.121)). Заметим, что $\gamma \neq 0$ даже при таком выборе.

В теории модуляций изменения средней скорости и средней высоты связаны с изменениями амплитуды. Вследствие этого β , γ и соответствующий параметр для средней высоты следует оставить свободными. Нелинейная связь амплитудных модуляций со средней скоростью и высотой является важным физическим эффектом и допускает естественное математическое описание. Это первый пример ситуации, введенной формулами (14.62) и обсуждавшейся в § 14.7.

В низшем порядке модуляционного приближения усредненный лагранжиан находится подстановкой периодического решения (16.68) в выражение (13.17). Для начала мы рассмотрим случай, когда дно горизонтально, и выберем начало отсчета $y = 0$ у дна, так что $h_0 = 0$. Имеем

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} L d\theta, \quad (16.69)$$

где

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{N(\theta)} \rho \left\{ \gamma + \omega \Phi_\theta - \frac{1}{2} (\beta + k \Phi_\theta)^2 - \frac{1}{2} \Phi_y^2 - gy \right\} dy = \\ &= \rho \left(\gamma - \frac{1}{2} \beta^2 \right) N - \frac{1}{2} \rho g N^2 + (\omega - \beta k) \rho \int_0^N \Phi_\theta dy - \\ &\quad - \rho \int_0^N \left(\frac{1}{2} k^2 \Phi_\theta^2 + \frac{1}{2} \Phi_y^2 \right) dy. \end{aligned} \quad (16.70)$$

Поскольку точные выражения для $\Phi(\theta, y)$ и $N(\theta)$ неизвестны, для дальнейшего исследования необходимо принять либо почти линейные разложения Стокса, либо длинноволновую теорию Бусинеска и Кортевега — де Фриза. Мы воспользуемся анализом Стокса. Периодические функции $\Phi(\theta, y)$ и $N(\theta)$ представляются в виде рядов Фурье

$$\Phi(\theta, y) = \sum_1^\infty \frac{A_n}{n} \operatorname{ch} nky \sin n\theta, \quad (16.71)$$

$$N(\theta) = h + a \cos \theta + \sum_2^\infty a_n \cos n\theta. \quad (16.72)$$

Основными параметрами в конце концов будут триады (ω, k, a) и (γ, β, h) ; здесь a — амплитудный параметр, а h — средняя высота поверхности воды. Можно заранее предположить, что коэффициенты a_n и A_n для малых амплитуд будут иметь порядок $O(a^n)$. Подставляя разложения (16.71) и (16.72) в (16.69) и (16.70), получа-

ем выражение для $\mathcal{L}$ в любом желаемом порядке по a . Основной интерес представляют первые нелинейные члены $\mathcal{L}$, которые имеют порядок a^4 , так что удобно вычислить $\mathcal{L}$ до членов этого порядка включительно. В соответствующее выражение кроме двух основных триад войдут коэффициенты A_1 , A_2 и a_1 , но их можно исключить, решив вариационные уравнения

$$\mathcal{L}_{A_1} = 0, \quad \mathcal{L}_{A_2} = 0, \quad \mathcal{L}_{a_1} = 0$$

относительно A_1 , A_2 , a_1 и подставив результаты в $\mathcal{L}$. Эти выкладки утомительны, но неизбежны, какой бы подход не использовался. В целом получить соотношения для A_1 , A_2 и a_1 при помощи вариационного принципа несколько проще, чем непосредственно из уравнений, как в § 13.13. Этот способ обладает и тем преимуществом, что $\mathcal{L}$ определяется раз и навсегда, а все остальные величины, такие, как масса, импульс и поток энергии, просто выводятся из него без повторения аналогичных алгебраических выкладок.

Окончательное выражение для $\mathcal{L}$ имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \rho \left(\gamma - \frac{1}{2} \beta^2 \right) h - \frac{1}{2} \rho g h^2 + \frac{1}{2} E \left\{ \frac{(\omega - \beta k)^2}{gk \operatorname{th} kh} - 1 \right\} - \\ & - \frac{1}{2} \frac{k^2 E^2}{\rho g} \left\{ \frac{9T^4 - 10T^2 + 9}{8T^4} \right\} + O(E^3), \end{aligned} \quad (16.73)$$

где

$$E = \frac{1}{2} \rho g a^2, \quad T = \operatorname{th} kh.$$

Ниже будет показано, что E — плотность энергии для линейных волн, распространяющихся по спокойной воде. Эту величину удобно использовать в качестве амплитудного параметра (вместо a).

В общем случае изменения средних значений (γ , β , h) связаны с волновым движением, и будет видно, что эти изменения имеют порядок $O(a^2)$. Следовательно, в члене с a^4 корректно заменить h на невозмущенную глубину h_0 , а T — на

$$T_0 = \operatorname{th} kh_0.$$

В членах низших порядков важно, однако, сохранить h . В первоначальном выводе выражения для $\mathcal{L}$ (Уизем [11]) предполагалось, что γ и β имеют порядок $O(a^2)$, поскольку изучался случай распространения волн по спокойной воде. Но выражение (16.73) в действительности верно и без такого ограничения. Это расширение позволяет изучать, например, волны на потоках, где изменения параметра β , обусловленные волнами, имеют порядок $O(a^2)$, но сам параметр β включает ненулевое невозмущенное значение скорости потока.

Принятая выше форма лагранжиана $\mathcal{L}$ зависит от выбора нулевого уровня потенциальной энергии. При выводе выражения (16.73) из (13.17) нулевой уровень принимался у дна, которое счи-

талось горизонтальным. В более общем случае положим, что на средней поверхности воды $y = b$, а у дна $y = -h_0$; тогда в выражении (16.73) член $\frac{1}{2}\rho gh^2$ заменяется на

$$\frac{1}{2}\rho gb^2 - \frac{1}{2}\rho gh_0^2, \quad (16.74)$$

а прочие члены остаются прежними, но h заменяется на $h_0 + b$. Эту модификацию следует использовать в том случае, когда дно не является горизонтальным и, следовательно, больше не может служить уровнем отсчета потенциальной энергии. Мы будем считать дно горизонтальным и использовать выражение (16.73), если явно не оговорено противное.

16.7. Уравнения модуляций

Для модулированного волнового пакета член $\beta x - \gamma t$ в (16.68) следует заменить на псевдофазу $\psi(x, t)$, а γ , β определить равенствами

$$\gamma = -\psi_t, \quad \beta = \psi_x,$$

точно так же, как $kx - \omega t$ заменяется на фазу $\theta(x, t)$ (см. § 14.7). Усредненный вариационный принцип

$$\delta \int \int \mathcal{L}(\omega, k, E; \gamma, \beta, h) dx dt = 0 \quad (16.75)$$

для вариаций δE , $\delta \theta$, δh , $\delta \psi$ дает

$$\delta E: \mathcal{L}_E = 0, \quad (16.76)$$

$$\delta \theta: \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{L}_\omega - \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{L}_k = 0, \quad \frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0, \quad (16.77)$$

$$\delta h: \mathcal{L}_h = 0, \quad (16.78)$$

$$\delta \psi: \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{L}_\gamma - \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{L}_\beta = 0, \quad \frac{\partial \beta}{\partial t} + \frac{\partial \gamma}{\partial x} = 0. \quad (16.79)$$

Дисперсионное соотношение $\mathcal{L}_E = 0$ дает

$$\frac{(\omega - \beta k)^2}{gk \operatorname{th} kh} = 1 + \frac{9T_0^4 - 10T_0^2 + 9}{4T_0^4} \frac{k^2 E}{\rho g} + O(E^2), \quad (16.80)$$

что согласуется с формулой (13.123). Родственное соотношение $\mathcal{L}_h = 0$ дает

$$\gamma = \frac{1}{2}\beta^2 + gh + \frac{1}{2} \left(\frac{1 - T_0^2}{T_0} \right) \frac{kE}{\rho} + O(E^2).$$

Поскольку $\gamma = -\psi_t$, $\beta = \psi_x$, это уравнение типа Бернулли для потенциала усредненного течения ψ , модифицированное волновым вкладом, пропорциональным a^2 . В таких соотношениях, по-

видимому, удобно выразить коэффициенты, зависящие от T_0 , через

$$\omega_0(k) = (gk \operatorname{th} kh_0)^{1/2}, \quad c_0(k) = (gk^{-1} \operatorname{th} kh_0)^{1/2},$$

$$C_0(k) = \frac{1}{2} c_0(k) \left\{ 1 + \frac{2kh_0}{\operatorname{sh} 2kh_0} \right\},$$

т. е. через линейные значения для волн, распространяющихся по спокойной воде глубиной h_0 . Имеем

$$\gamma = \frac{1}{2} \beta^2 + gh + \frac{1}{2} \left(\frac{2C_0}{c_0} - 1 \right) \frac{E}{\rho h_0} + O(E^2). \quad (16.81)$$

16.8. Уравнения сохранения

Плотность и поток волнового действия в (16.77) равны соответственно

$$\mathcal{L}_\omega = \frac{E(\omega - \beta k)}{gk \operatorname{th} kh} = \frac{E}{\omega_0} + O(E^2), \quad (16.82)$$

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}_k &= \frac{E\beta(\omega - \beta k)}{gk \operatorname{th} kh} + \frac{1}{2} \frac{E(\omega - \beta k)^2}{(gk \operatorname{th} kh)^2} \frac{d}{dk} \omega_0^2 + O(E^2) = \\ &= \frac{E}{\omega_0} (\beta + C_0) + O(E^2). \end{aligned} \quad (16.83)$$

В терминах плотности энергии E они принимают обычный вид.

Сохранение массы

Аналогичные (16.82) и (16.83) величины, входящие в (16.79), имеют вид

$$\mathcal{L}_\gamma = \rho h, \quad -\mathcal{L}_\beta = \rho h \beta + \frac{E}{c_0} + O(E^2). \quad (16.84)$$

Таким образом, ясно, что первое уравнение в (16.79) представляет собой уравнение сохранения массы и что волны вносят в массу течения суммарный вклад E/c_0 . Поэтому следует выделить в явном виде скорость потока массы

$$U = \beta + \frac{E}{\rho c_0 h}. \quad (16.85)$$

Энергия и импульс

Плотность и поток энергии, определенные в (14.74), оказываются равными

$$\omega \mathcal{L}_\omega + \gamma \mathcal{L}_\gamma - \mathcal{L} = \frac{1}{2} \rho h U^2 + \frac{1}{2} \rho g h^2 + E + O(E^2), \quad (16.86)$$

$$\begin{aligned} -\omega \mathcal{L}_k - \gamma \mathcal{L}_\beta &= \rho h U \left(\frac{1}{2} U^2 + gh \right) + U \left(\frac{2C_0}{c_0} - \frac{1}{2} \right) E + \\ &+ (U + C_0) E + O(E^2). \end{aligned} \quad (16.87)$$

Плотность и поток импульса (см. (14.75)) выражаются формулами

$$k\mathcal{L}_\omega + \beta\mathcal{L}_\gamma = \rho h\beta + \frac{E}{c_0} = \rho hU + O(E^2), \quad (16.88)$$

$$-k\mathcal{L}_k - \beta\mathcal{L}_\beta + \mathcal{L} = \rho hU^2 + \frac{1}{2}\rho gh^2 + \left(\frac{2C_0}{c_0} - \frac{1}{2}\right)E + O(E^2). \quad (16.89)$$

Следует особо отметить простоту этих формул, достигнутую за счет введения U вместо β . Легко различимы вклады среднего течения, волн и их взаимодействия. Выражение (16.86) подтверждает, что E — плотность энергии волн. Волновой импульс E/c_0 в (16.88) имеет обычную форму, но суммарную величину удобно записывать и как ρhU . Выражение для потока импульса (16.89) содержит интересное слагаемое

$$S = \left(\frac{2C_0}{c_0} - \frac{1}{2}\right)E; \quad (16.90)$$

это впервые было замечено и использовано Лонге-Хиггинсом и Стюартом [1, 2], которые назвали его напряжением излучения. Следует отметить, что в потоке энергии (16.87) выражение US соответствует работе; этот член описывает добавку за счет волнового взаимодействия к обычному потоку энергии $(U + C_0)E$. Если механическая система описывается в системе отсчета, движущейся вместе с ее центром масс, то полная энергия составляет

$$\frac{1}{2} \sum m(U+v)^2 = \frac{1}{2} U^2 \sum m + U \sum mv + \frac{1}{2} \sum mv^2,$$

где средний член равен произведению относительного импульса на U ; три первые члена в формуле (16.87) являются аналогом этого простого разложения.

Учитывая полученные выше выражения, исходные уравнения (16.77) — (16.79) можно записать так:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{E}{\omega_0} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ (\beta + C_0) \frac{E}{\omega_0} \right\} = 0, \quad \frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0, \quad (16.91)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho h) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho h\beta + \frac{E}{c_0} \right) = 0, \quad \frac{\partial \beta}{\partial t} + \frac{\partial \gamma}{\partial x} = 0, \quad (16.92)$$

где ω и γ даются соотношениями (16.80) — (16.81), а члены порядка $O(E^2)$ опущены. Альтернативная система, вводящая уравнения сохранения энергии и импульса вместо уравнения сохранения волнового действия и уравнения совместности, связывающего β и γ ,

имеет вид

$$k_t + \omega_x = 0, \quad (16.93)$$

$$(\rho h)_t + (\rho h U)_x = 0, \quad (16.94)$$

$$(\rho h U)_t + \left(\rho h U^2 + \frac{1}{2} \rho g h^2 + S \right)_x = 0, \quad (16.95)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2} \rho h U^2 + \frac{1}{2} \rho g h^2 + E \right)_t + \\ & + \left\{ \rho h U \left(\frac{1}{2} U^2 + g h \right) + U S + (U + C_0) E \right\}_x = 0. \end{aligned} \quad (16.96)$$

В первых работах, посвященных волнам на поверхности потока, стоял вопрос о правильной форме уравнения сохранения «волновой энергии» E . Один из способов вывода правильного выражения состоит в возможно более полном исключении h и U из уравнения (16.96) при помощи предыдущих уравнений. Легко проверить, что уравнение

$$E_t + \{(U + C_0)E\}_x + S U_x = 0 \quad (16.97)$$

правильно. Необходимость в дополнительном члене $S U_x$ была отмечена Лонге-Хиггинсом и Стюартом [2]. Конечно, уравнение (16.97) эквивалентно уравнению сохранения волнового действия в (16.91), которое представляется в данном подходе более естественным. Чтобы установить эту эквивалентность, заметим, что уравнение сохранения волнового действия можно переписать в виде

$$E_t + \{(\beta + C_0)E\}_x + \left[\frac{k}{\omega_0} \frac{\partial \omega_0}{\partial k} + \frac{h}{\omega_0} \frac{\partial \omega_0}{\partial h} \right] E \beta_x = 0.$$

Коэффициент в квадратных скобках равен $(2C_0/c_0 - 1/2)$, а $\beta = U + O(E)$, так что эти два уравнения совпадают.

16.9. Индуцированное среднее течение

Уравнения (16.92) или эквивалентную систему (16.94) — (16.95) можно рассматривать как уравнения, описывающие индуцируемые волнами изменения параметров h и U . Это длинноволновые уравнения (см. (13.79)) с дополнительным волновым членом S . Мы интересуемся здесь изменениями параметров h и U , индуцированными волновым пакетом. Для волн, движущихся по спокойной воде глубиной h_0 , можно предположить, что U и $b = h - h_0$ малы, и линеаризовать уравнения; это дает

$$\begin{aligned} b_t + h_0 U_x &= 0, \\ U_t + g b_x &= -\frac{S_x}{\rho h_0}. \end{aligned} \quad (16.98)$$

Для многих целей достаточно считать S известным силовым полем, уже определенным с помощью линейной дисперсионной теории для распределений k и E . Поскольку в этой теории

$$k_t + C_0(k) k_x = 0, \quad E_t + (C_0 E)_x = 0$$

и S имеет форму $f(k)E$, получаем, что

$$\{g(k)S\}_t + \{g(k)C_0 S\}_x = 0$$

для любой функции $g(k)$. Тогда легко проверить, что решением системы (16.98) являются

$$\begin{aligned} b &= h - h_0 = -\frac{h_0}{gh_0 - C_0^2(k)} \cdot \frac{S}{\rho h_0}, \\ U &= \beta + \frac{E}{\rho c_0 h_0} = -\frac{C_0(k)}{gh_0 - C_0^2(k)} \cdot \frac{S}{\rho h_0}. \end{aligned} \quad (16.99)$$

К этим выражениям можно добавить решения однородных уравнений, т. е. функции от $x \pm \sqrt{gh_0} t$. Из (16.99) видно, что разность групповой скорости и длинноволновой скорости $\sqrt{gh_0}$ не должна быть слишком мала по сравнению с a^2 . Но именно это требуется для справедливости разложения Стокса; в пределе $C_0^2 \rightarrow gh_0$ мы приходим к уравнению Кортевега — де Фриза.

При образовании волнового пакета неустановившиеся длинные волны распространяются со скоростями $\pm \sqrt{gh_0}$, но (опять предполагая, что C_0 и $\sqrt{gh_0}$ достаточно хорошо разделены) среднее течение и средняя высота, *сопутствующие* волновому пакету, даются равенствами (16.99). Неустановившиеся волны, возникающие за движущимся в воде препятствием, подробно изучены Бенджаменом [2].

16.10. Глубокая вода

Для глубокой воды, когда $kh_0 \gg 1$, индуцированные изменения параметров h и β пренебрежимо малы. Этого следовало ожидать заранее, но это подтверждается и явно формулами (16.99). Усредненный лагранжиан (16.73) принимает вид

$$\mathcal{L}_W = \frac{1}{2} \left(\frac{\omega^2}{gk} - 1 \right) E - \frac{1}{2} \frac{k^2 E^2}{\rho g} + O(E^3). \quad (16.100)$$

Взаимодействие между средним течением и волнами, описываемыми лагранжианом $\mathcal{L}_W$, отсутствует. Что касается волн, то можно работать исключительно с лагранжианом $\mathcal{L}_W$. Он согласуется с простым выражением из предыдущих задач, где псевдочастоты не возникали и ω , k , E были единственными волновыми параметра-

ми. Дисперсионное соотношение $\mathcal{L}_E = 0$ имеет вид

$$\omega^2 = gk \left(1 + \frac{2k^2 E}{\rho g} + \dots \right) = gk (1 + k^2 a^2 + \dots), \quad (16.101)$$

что согласуется с предыдущими результатами. Уравнения модуляций для E и k даются равенствами (16.77).

Для заданного потока со скоростью U_0 предыдущие доводы относятся скорее к $\beta - U_0$, чем к самому параметру β , и в пределе глубокой воды усредненный лагранжиан $\mathcal{L}_W$ модифицируется:

$$\mathcal{L}_W = \frac{1}{2} \left\{ \frac{(\omega - U_0 k)^2}{gk} - 1 \right\} E - \frac{1}{2} \frac{k^2 E^2}{\rho g} + O(E^3). \quad (16.102)$$

16.11. Устойчивость волн Стокса

Для волн на глубокой воде применима простая теория § 14.2. Согласно (16.101), имеем

$$\omega_0(k) = (gk)^{1/2}, \quad \omega_2(k) = \frac{1}{2} (gk)^{1/2} k.$$

Величина $\omega_0' \omega_2 < 0$ и, следовательно, модуляции со временем растут. Для конечной глубины становится важной связь с индуцированным средним течением, носящая стабилизирующий характер.

Устойчивость определяется типом полной системы уравнений (16.91) — (16.92), которая является системой четвертого порядка для неизвестных функций k , E , β , h . Тип в свою очередь определяется характеристиками. Характеристические скорости можно найти непосредственными вычислениями, но последние довольно громоздки.

Анализ можно упростить и придать ему более выразительную форму, разбив переменные на две части. Прежде всего формулы (16.99) с достаточной точностью выражают h и β через E . В то же время этот первый шаг дает величины двух характеристических скоростей, а именно $\pm \sqrt{gh_0}$. Теперь выражения для h и β можно подставить в уравнения (16.91) для k и E и определить две остальные характеристические скорости.

Считая, что $b = h - h_0$ и β имеют порядок $O(E)$, дисперсионное соотношение (16.80) можно аппроксимировать равенством

$$\omega = \omega_0 + k\beta + k \left(C_0 - \frac{1}{2} c_0 \right) \frac{b}{h_0} + \frac{9T_0^4 - 10T_0^2 + 9}{8T_0^3} \frac{k^2 E}{\rho c_0} + O(E^2).$$

В силу (16.99), это дает

$$\omega = \omega_0(k) + \Omega_2(k) \frac{k^2 E}{\rho c_0} + O(E^2), \quad (16.103)$$

где

$$\Omega_2 = \frac{9T_0^4 - 10T_0^2 + 9}{8T_0^3} - \frac{1}{kh_0} \left\{ \frac{(2C_0 - 1/2 c_0)^2}{gh_0 - c_0^2} + 1 \right\}.$$

Поскольку b и β исключены, мы теперь имеем для k и E простые уравнения модуляций рассмотренного в § 14.2 типа и можем выписать характеристические скорости без дальнейших выкладок! Искомые характеристические скорости равны

$$C_0 \pm \left(\frac{\omega_0^* \Omega_2 k^2 E}{\rho c_0} \right)^{1/2}. \quad (16.104)$$

Здесь $\omega_0 = (gk \tanh kh_0)^{1/2}$ и ω_0^* всегда отрицательна. Таким образом, характеристики являются мнимыми при $\Omega_2 > 0$ и вещественными при $\Omega_2 < 0$. Формула для Ω_2 ясно указывает на стабилизирующий эффект среднего течения по мере убывания величины kh_0 от предела глубокой воды. Критическое значение определяется величиной kh_0 , для которой $\Omega_2 = 0$. Это значение было найдено численно и оказалось равным $kh_0 = 1,36$. При $kh_0 > 1,36$ модуляции растут; при $kh_0 < 1,36$ они распространяются типичным гиперболическим образом.

Неустойчивость для волн на глубокой воде впервые была установлена Бенджаменом [1] ¹⁾ при помощи рядов Фурье, указанных в § 15.6. Именно тогда была понята важность эллиптических уравнений модуляций и было выведено критическое значение $kh_0 = 1,36$ для случая конечной глубины. Это значение затем было подтверждено Бенджаменом с помощью его фурье-компонентного подхода. Такая последовательность событий указывает на ценную взаимосвязь двух подходов.

Следует опять отметить, что «неустойчивый случай» указывает на рост модуляций и необязательно на хаотическое движение. Чтобы оценить окончательное поведение, следует включить дисперсионные члены высшего порядка, как было описано в § 15.5. Из проведенного там анализа мы заключаем, что следующей стадией будет развитие модуляций, для которых огибающей волнового пакета явится последовательность уединенных волн.

16.12. Волны Стокса на отмели

Для волнового пакета, приближающегося к отмели, параметры модуляций можно считать не зависящими от t . Тогда из уравнений модуляций имеем четыре соотношения

$$\omega = \text{const}, \quad -\mathcal{L}_k = \text{const}, \quad \gamma = \text{const}, \quad -\mathcal{L}_\beta = \text{const},$$

определяющие $k(x)$, $E(x)$, $\beta(x)$, $h(x)$ через их начальные постоянные значения на глубине и распределение глубин $h_0(x)$. В низ-

¹⁾ См. также следующие статьи: Захаров В. Е., Об устойчивости волн в нелинейных средах с дисперсией, *ЖЭТФ*, 51 (1966), вып. 10; Об устойчивости волн на поверхности тяжелой жидкости, *ПМТФ* (1968), № 2.— *Прим. ред.*

шем порядке приближения первые два соотношения имеют вид

$$\begin{aligned}\omega &= \omega_0 = (gk \operatorname{th} kh_0)^{1/2} = \text{const}, \\ -\mathcal{L}_k &= \frac{E}{\omega_0} C_0 = \text{const}.\end{aligned}\quad (16.105)$$

Этих соотношений достаточно для определения распределений $k(x)$ и $E(x)$ в терминах распределения глубин $h_0(x)$. Поскольку частота ω_0 постоянна, соотношение для E можно также интерпретировать как постоянство потока энергии EC_0 , но, по-видимому, для таких «адиабатических» процессов предпочтительнее формулировка в терминах волнового действия. Соотношения $\gamma = \text{const}$, $-\mathcal{L}_\beta = \text{const}$ определяют сопутствующие малые изменения параметров $h - h_0$ и β . Результаты таковы:

$$\begin{aligned}b = h - h_0 &= -\frac{1}{2} \left(\frac{2C_0}{c_0} - 1 \right) \frac{E}{\rho g h_0}, \\ \beta &= -\frac{E}{\rho c_0 h_0}.\end{aligned}\quad (16.106)$$

(При вычислении параметра γ использована незначительная модификация, отмеченная в (16.74).) Эти формулы указывают на некоторое понижение средней поверхности и на встречное течение, компенсирующее индуцируемый волнами поток массы.

На шельфе амплитуда возрастает с уменьшением глубины. При достаточно больших амплитудах, которые можно оценить либо как $a/\lambda = 0,142$, согласно вычислениям Мичелла для глубокой воды, либо как $a/h_0 = 0,78$, согласно оценкам Мак-Кауэна для уединенной волны, гребни заостряются и теория Стокса перестает быть применимой.

16.13. Волны Стокса на поверхности потока

Подобные рассуждения применимы к волнам, распространяющимся вдоль неоднородного потока, имеющего скорость $U_0(x)$, что можно считать следствием изменения глубины $h_0(x)$ или подтока жидкости снизу. В этом случае имеем равенство

$$\omega = kU_0(x) + \omega_0(k) = kU_0(x) + \{gk \operatorname{th} kh_0(x)\}^{1/2} = \text{const} \quad (16.107)$$

для определения $k(x)$ и равенство

$$-\mathcal{L}_k = \frac{E}{\omega_0} \{U_0(x) + C_0(x)\} = \text{const} \quad (16.108)$$

для определения амплитуды. В случае глубокой воды

$$\omega_0 = (gk)^{1/2}, \quad c_0 = \left(\frac{g}{k}\right)^{1/2}, \quad C_0 = \frac{1}{2} c_0$$

и результаты можно представить в виде

$$\begin{aligned} kU_0 + (gk)^{1/2} &= \text{const}, \\ Ec_0 (2U_0 + c_0) &= \text{const}. \end{aligned} \quad (16.109)$$

Эти выражения впервые были получены Лонге-Хиггинсом и Стюартом [2] после подробного непосредственного анализа уравнений движения. Для волн, движущихся навстречу потоку, формулы дают особенность, предсказывающую, что $E \rightarrow \infty$, когда величина групповой скорости приближается к скорости потока. На этой стадии следующие члены порядка E^2 становятся решающими и определяют конечный результат. Этот вопрос был изучен Креппером [1] и Холлидеем [1].

Уравнение Кортевега — де Фриза

Завершая эту главу, построим теорию модуляций для уравнений Кортевега — де Фриза. Этот вывод имеет ряд специфических черт, и для получения точных соотношений на характеристиках необходимы нетривиальные приемы. По-видимому, их стоит здесь описать, учитывая центральное положение данного уравнения в изучаемом предмете и возможные связи с дальнейшим анализом его точного решения.

16.14. Вариационная формулировка

Удобно выбрать такую нормировку, в которой уравнение принимает вид

$$\eta_t + 6\eta\eta_x + \eta_{xxx} = 0. \quad (16.110)$$

Для этого уравнения в его настоящем виде вариационный принцип отсутствует и необходимо ввести какое-либо потенциальное представление. Простейший способ — положить $\eta = \varphi_x$; тогда уравнение переходит в следующее:

$$\varphi_{xt} + 6\varphi\varphi_{xx} + \varphi_{xxxx} = 0 \quad (16.111)$$

и соответствующий лагранжиан таков:

$$L = -\frac{1}{2} \varphi_t \varphi_x - \varphi_x^3 + \frac{1}{2} \varphi_{xx}^2. \quad (16.112)$$

Можно было бы в уравнение (16.111) ввести $\chi = \varphi_{xx}$, работать с двумя функциями φ и χ и использовать лагранжиан, содержащий только первые производные. Этот способ обладает тем преимуществом, что к нему применима общая теория § 14.7, но проще иметь дело с лагранжианом (16.112), пользуясь некоторыми специальными приемами.

Необходимость в потенциальном представлении характерна для структуры данной задачи и затрагивает ряд параметров однородного волнового пакета. Мы должны положить

$$\varphi = \psi + \Phi(\theta), \quad \psi = \beta x - \gamma t, \quad \theta = kx - \omega t.$$

Тогда

$$\eta = \beta + k\Phi_\theta \quad (16.113)$$

и параметр β отвечает среднему значению переменной η . В терминах η решение уравнения (16.110) типа однородного волнового пакета получается из соотношения

$$k^2\eta_{\theta\theta\theta} + 6\eta\eta_\theta - \frac{\omega}{k}\eta_\theta = 0,$$

которое, очевидно, интегрируется, давая

$$\begin{aligned} k^2\eta_{\theta\theta} + 3\eta^2 - \frac{\omega}{k}\eta + B &= 0, \\ k^2\eta_\theta^2 + 2\eta^3 - \frac{\omega}{k}\eta^2 + 2B\eta - 2A &= 0; \end{aligned} \quad (16.114)$$

здесь A и B — постоянные интегрирования. Для этого решения лагранжиан (16.112) можно сначала выразить через η :

$$L = \frac{1}{2} \left(\gamma - \frac{\omega}{k} \beta \right) \eta + \frac{1}{2} \frac{\omega}{k} \eta^2 - \eta^3 + \frac{1}{2} k^2 \eta_\theta^2,$$

а затем при помощи (16.114) представить в эквивалентной форме

$$L = k^2 \eta_\theta^2 + \left\{ B + \frac{1}{2} \left(\gamma - \frac{\omega}{k} \right) \beta \right\} \eta - A. \quad (16.115)$$

Далее получаем усредненный лагранжиан

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} L \, d\theta.$$

Согласно (16.113),

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \eta \, d\theta = \bar{\eta} = \beta;$$

согласно (16.114),

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k^2 \eta_\theta^2 \, d\theta = \frac{1}{2\pi} \oint k^2 \eta_\theta \, d\eta = kW,$$

где ¹⁾ (16.116)

$$W(A, B, U) = \frac{1}{2\pi} \oint \{2A - 2B\eta + U\eta^2 - 2\eta^3\}^{1/2} d\eta, \quad U = \omega/k.$$

¹⁾ Символ U теперь обозначает нелинейную фазовую скорость (в отличие от § 16.9—16.13, где он использовался для обозначения скорости потока массы).

Наконец,

$$\mathcal{L} = kW(A, B, U) + \beta B + \frac{1}{2}\beta\gamma - \frac{1}{2}U\beta^2 - A. \quad (16.117)$$

Вариационные уравнения для тройки (γ, β, B) имеют вид

$$\delta B: \quad \beta = -kW_B,$$

$$\delta\psi: \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2}\beta \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(U\beta - \frac{1}{2}\gamma - B \right) = 0,$$

$$\text{совместность:} \quad \frac{\partial\beta}{\partial t} + \frac{\partial\gamma}{\partial x} = 0.$$

В силу последних двух уравнений, без потери общности можно положить $\gamma = U\beta - B$, так что имеем

$$\beta = -kW_B, \quad \gamma = -kUW_B - B$$

и

$$\frac{\partial}{\partial t} (kW_B) + \frac{\partial}{\partial x} (kUW_B + B) = 0. \quad (16.118)$$

Для тройки (ω, k, A) вариационное уравнение для $\delta\theta$ удобно заменить уравнением сохранения импульса

$$\frac{\partial}{\partial t} (k\mathcal{L}_\omega + \beta\mathcal{L}_\gamma) + \frac{\partial}{\partial x} (\mathcal{L} - k\mathcal{L}_k - \beta\mathcal{L}_\beta) = 0.$$

Имеем

$$\delta A: \quad kW_A = 1, \quad (16.119)$$

$$\text{импульс:} \quad \frac{\partial}{\partial t} (kW_U) + \frac{\partial}{\partial x} (kUW_U - A) = 0, \quad (16.120)$$

$$\text{совместность:} \quad \frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (kU) = 0, \quad \omega = kU. \quad (16.121)$$

Уравнения (16.118), (16.120) и (16.121) можно рассматривать как три уравнения для A, B, U с переменной k , заданной уравнением (16.119). Более симметричная эквивалентная система имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_B}{\partial t} + U \frac{\partial W_B}{\partial x} + W_A \frac{\partial B}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial W_U}{\partial t} + U \frac{\partial W_U}{\partial x} - W_A \frac{\partial A}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial W_A}{\partial t} + U \frac{\partial W_A}{\partial x} - W_A \frac{\partial U}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (16.122)$$

В терминах этих переменных волновое число, частота и среднее значение $\bar{\eta} = \beta$ определяются равенствами

$$k = \frac{1}{W_A}, \quad \omega = \frac{U}{W_A}, \quad \beta = -\frac{W_B}{W_A}. \quad (16.123)$$

Амплитуда a определяется из формул, связывающих нули кубического по W выражения с коэффициентами A, B, U . В физических задачах в качестве основных параметров естественно выбрать k, β, a ; тройка A, B, U является эквивалентным набором. Дисперсионное соотношение $\omega = \omega(k, \beta, a)$ неявно задается вторым из уравнений (16.123).

Уравнения (16.122) имеют разумно симметричный вид, в то время как исходные вариационные уравнения для β и γ выглядят неуклюже. Это, по-видимому, связано с гибридной природой уравнения Кортевега — де Фриза как приближения к исходной теории волн на воде. При выводе этого приближения скорость жидкости выражается через глубину (см. (13.102)), так что тройка γ, β, B перемешивается несимметричным образом. Например, параметр β вводится как средняя высота в выражении (16.113), однако в своей естественной роли он равен средней скорости жидкости. В более симметричной системе (16.122) такая двойственность сглаживается. Кроме того, из-за потенциального представления нам сначала пришлось иметь дело с системой четвертого порядка, и более удобное выражение восстановилось только после того, как мы вернулись к системе третьего порядка.

16.15. Характеристические уравнения

Система (16.122) в общем случае является гиперболической, и мы теперь рассмотрим характеристические уравнения. Функцию W и ее производные W_A, W_B, W_U можно выразить через полные эллиптические интегралы и можно непосредственно вывести уравнения в характеристической форме, но при этом придется изрядно потрудиться. Удивительно, однако, что если вместо A, B, U в качестве переменных использовать нули p, q, r кубического уравнения

$$\eta^3 - \frac{1}{2}U\eta^2 + B\eta - A = 0 \quad (16.124)$$

и если учесть различные (нетривиальные) тождества между вторыми производными функции W , то уравнения можно представить в простой форме, для которой характеристические соотношения и скорости очевидны. Оказывается, что уравнения можно записать как

$$(q+r)_t + P(q+r)_x = 0, \\ P = 2 \left\{ (p+q+r) - \frac{p(W_q - W_r) + q(W_r - W_p) + r(W_p - W_q)}{W_q - W_r} \right\}, \quad (16.125)$$

плюс аналогичные уравнения для $r + p$ и $p + q$, получаемые циклической перестановкой. Таким образом, инварианты Римана равны просто

$$q + r, r + p, p + q, \quad (16.126)$$

а соответствующие характеристические скорости P, Q, R равны коэффициенту в (16.125) и соответствующим циклическим перестановкам.

В этом месте полезно выразить интересующие нас величины через эллиптические интегралы. Введем

$$a = \frac{p-q}{2}, \quad s^2 = \frac{p-q}{p-r}, \quad p > q > r; \quad (16.127)$$

здесь a — амплитудная переменная, а s — модуль эллиптических интегралов. Тогда можно показать, что

$$\beta = \bar{\eta} = p - 2a \frac{D(s)}{K(s)},$$

где $D(s), K(s)$ — полные эллиптические интегралы в стандартных обозначениях (Янке и Эмде [1]). Если в качестве основных переменных мы предпочтем использовать β, a, s , то получим

$$p = \beta + 2a \frac{D}{K}, \quad q = \beta + 2a \left(\frac{D}{K} - 1 \right), \quad (16.128)$$

$$r = \beta + 2a \left(\frac{D}{K} - \frac{1}{s^2} \right).$$

Волновое число и фазовая скорость равны соответственно

$$k = \frac{1}{W_A} = \frac{\pi a^{1/2}}{sK}, \quad (16.129)$$

$$U = \frac{\omega}{k} = 2(p + q + r) = 6\beta + 4a \left(\frac{3D}{K} - \frac{1+s^2}{s^2} \right). \quad (16.130)$$

Инварианты Римана и характеристические скорости оказываются следующими.

Инвариант Римана	Характеристическая скорость
$q + r$	$P = U - \frac{4aK}{s^2 D}$
$r + p$	$Q = U - \frac{4a(1-s^2)K}{s^2(K-D)}$
$p + q$	$R = U - \frac{4a(1-s^2)K}{s^2(s^2 D - K)}$

В общем случае скорости P, Q, R различны, причем $P < Q < R$. Таким образом, система является гиперболической. Оба предела $s^2 \rightarrow 0$ и $s^2 \rightarrow 1$ дают особенность в том смысле, что две из скоростей становятся равными. Предельные уравнения не будут строго гиперболическими, но поскольку одно из них отщепляется, их все еще можно решать интегрированием вдоль характеристик. С этой ситуацией мы уже встречались ранее в линейной теории, соответствующей пределу $s^2 \rightarrow 0$.

Случай малой амплитуды

В пределе $a \rightarrow 0, s^2 \rightarrow 0$, сохраняя волновое число k , определенное формулой (16.129), конечным и ненулевым, имеем

$$s \sim \frac{2a^{1/2}}{k}.$$

Вычисление пределов при $s^2 \rightarrow 0$ дает

$$P, Q \rightarrow 6\beta - 3k^2, \quad R \rightarrow 6\beta.$$

В линейной теории изменениями параметра β можно пренебречь, так что линейная групповая скорость $-3k^2$ будет двойной характеристической скоростью. С поправками следующего порядка, т. е. в почти линейной теории, найдем

$$\begin{aligned} P &\sim 6\beta - 3k^2 - 3a + O\left(\frac{a^2}{k^2}\right), \\ Q &\sim 6\beta - 3k^2 + 3a + O\left(\frac{a^2}{k^2}\right), \\ R &\sim 6\beta + O\left(\frac{a^2}{k^2}\right). \end{aligned} \quad (16.131)$$

В соответствующем приближении исходные уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \beta_t + 6\beta\beta_x + \left[\frac{3}{2}a^2\right]_x &= 0, \\ k_t + \left(6\beta k - k^3 + \left[\frac{3}{2}\frac{a^2}{k}\right]\right)_x &= 0, \\ (a^2)_t + \{(6\beta - 3k^2)a^2\}_x + 6a^2\beta_x &= 0. \end{aligned} \quad (16.132)$$

Члены в квадратных скобках являются почти линейными поправками к линейной теории. В линейной теории уравнение для β отщепляется и его можно решить независимо; оно дает характеристическую скорость $R = 6\beta$. Как правило, однако, подходит решение $\beta = 0$, и мы имеем обычные уравнения модуляций для a и k . Почти линейные поправки приводят к важным качественным изменениям, делающим систему строго гиперболической и расщепляющим оставшиеся групповые скорости.

Решающее значение имеет модификация уравнения для β . Если бы вводилась только поправка к частоте (во втором уравнении), то система двух уравнений имела бы мнимые характеристики и случай представлялся бы неустойчивым. В обозначениях § 14.2 имеем $\omega_0 = -k^3$, $\omega_2 = 3/2 k$, $\omega_0 \omega_2 < 0$. Но наличие связи с β стабилизирует модуляции, и полная система оказывается гиперболической. Можно было бы просто найти характеристики системы (16.132) и проверить формулы (16.131), но опять целесообразнее использовать подход, развитый в § 16.11. Если параметр β полностью индуцирован волновым движением, то можно использовать второе и третье уравнения системы (16.132) и показать в низшем порядке, что $(a^2)_x = (a^2/(3k^2))_t$. Тогда, в силу первого уравнения,

$$\beta = -\frac{a^2}{2k^2}.$$

После подстановки этого выражения во второе уравнение находим эффективное изменение частоты

$$\Omega_2 = 6\beta k + \frac{3}{2} \frac{a^2}{k} = -\frac{3}{2} \frac{a^2}{k}.$$

Теперь уравнения для a и k являются гиперболическими, а характеристические скорости равны $-3k^2 \pm 3a$, что согласуется с формулами (16.131).

16.16. Последовательность уединенных волн

В другом пределе $s^2 \rightarrow 1$ волновой пакет переходит в последовательность волн, близких к уединенным. В этом случае K и D имеют асимптотику

$$K = \Lambda + O(1-s^2), \quad D = \Lambda - O(1-s^2), \quad \Lambda = \ln \frac{4}{(1-s^2)^{1/2}}.$$

В пределе уединенных волн естественно считать амплитуду равной высоте от подошвы до гребня и волновое число определить как число волн на единицу длины (а не число волн на длину 2π). В соответствии с этим

$$a_1 = 2a, \quad k_1 = \frac{k}{2\pi},$$

и, в силу (16.129), имеем

$$\Lambda = \frac{(2a_1)^{1/2}}{4k_1}. \quad (16.133)$$

Ошибки порядка $1 - s^2$ экспоненциально малы, и мы ограничимся членами порядка $(2a_1)^{1/2}/k_1$. Тогда

$$p \sim \beta + a_1 - 2k_1(2a_1)^{1/2}, \quad q, r \sim \beta - 2k_1(2a_1)^{1/2}, \quad (16.134)$$

$$U \sim 6\beta + 2a_1 - 12k_1(2a_1)^{1/2}, \quad (16.135)$$

$$P \sim 6\beta - 16k_1(2a_1)^{1/2} \left\{ \frac{1 - 3k_1(2a_1)^{-1/2}}{1 - 4k_1(2a_1)^{-1/2}} \right\},$$

$$Q, R \sim 6\beta + 2a_1 - 12k_1(2a_1)^{1/2}. \quad (16.136)$$

Заметим, что

$$q = r + O \left\{ \exp \left(\frac{-a_1^{1/2}}{k_1} \right) \right\}, \quad Q = R + O \left\{ \exp \left(\frac{-a_1^{-1/2}}{k_1} \right) \right\}.$$

В почти линейном пределе изменения параметра β переносятся в основном по быстреей характеристике (со скоростью R), а параметры a и k переносятся в основном по двум более медленным. Наоборот, в данном пределе β переносится в основном по самой медленной характеристике (P), а a_1 и k_1 распространяются быстрее. В головной области можно интегрировать вдоль P -характеристики и получить, что величина $q + r$ остается равной своему первоначальному значению. Но в этом пределе $q \simeq r$ всюду, так что q и r по отдельности также остаются равными своим первоначальным значениям. В обычной нормировке $q = r = 0$; следовательно, они и остаются нулевыми. Тогда из (16.134) имеем

$$\beta \simeq 2k_1(2a_1)^{1/2} \quad (16.137)$$

и

$$p \sim a_1, \quad q, r \sim 0, \quad U \sim 2a_1, \quad Q, R \sim 2a_1.$$

Соответствующие приближенные уравнения, как можно показать, имеют вид

$$\begin{aligned} k_{1t} + (2a_1 k_1)_x &= 0, \\ a_{1t} + 2a_1 a_{1x} &= 0. \end{aligned} \quad (16.138)$$

В этом приближении система не является строго гиперболической, но можно сначала интегрированием вдоль характеристик $dx/dt = 2a_1$ найти a_1 , а затем интегрированием вдоль этих же характеристик найти k_1 . Такая структура аналогична структуре, имевшей место в линейной теории. Однако на этот раз a_1 остается постоянной на характеристиках, а k_1 убывает как $1/t$.

Как и в случае линейного предела, следующий за (16.137) — (16.138) порядок приближения модифицирует структуру уравнений; характеристики разделяются, и система становится строго гиперболической.

Уравнения (16.138) стали теперь настолько простыми, что можно предположить, что существует их прямой вывод, не требующий

предварительного изучения общего случая. Это, несомненно, так. Уравнение Кортевега — де Фриза можно записать в форме уравнения сохранения

$$\eta_t + (3\eta^2 + \eta_{xx})_x = 0, \quad (16.139)$$

и, усреднив его, получить

$$(\bar{\eta})_t + (3\bar{\eta}^2)_x = 0. \quad (16.140)$$

Далее, уединенная волна с $q = r = 0$ и $p = a_1$ дается выражением

$$\eta = a_1 \operatorname{sech}^2 \left\{ \left(\frac{a_1}{2} \right)^{1/2} x - 4 \left(\frac{a_1}{2} \right)^{3/2} t \right\}. \quad (16.141)$$

Если, используя это решение, вычислить средние значения

$$\bar{\eta} = k_1 \int_{-\infty}^{\infty} \eta dx, \quad \bar{\eta}^2 = k_1 \int_{-\infty}^{\infty} \eta^2 dx,$$

то будем иметь

$$\bar{\eta} = 4k_1 \left(\frac{a_1}{2} \right)^{1/2}, \quad \bar{\eta}^2 = \frac{16k_1}{3} \left(\frac{a_1}{2} \right)^{3/2}.$$

Уравнение (16.140) принимает вид

$$(k_1 a_1^{1/2})_t + (2k_1 a_1^{3/2})_x = 0. \quad (16.142)$$

В силу (16.141), фазовая скорость $U = 2a_1$; следовательно, уравнение совместности $k_{1t} + (k_1 U)_x = 0$ записывается как

$$k_{1t} + (2a_1 k_1)_x = 0. \quad (16.143)$$

Система уравнений, полученная для k_1 и a_1 , эквивалентна системе (16.138). Заметим, что в этом выводе неявно предполагалось, что q и r при модуляциях остаются равными нулю.

Эти уравнения имеют важное частное решение

$$a_1 = \frac{x}{2t}, \quad k_1 = \frac{1}{2t} f\left(\frac{x}{2t}\right), \quad (16.144)$$

где f — произвольная функция. Такой результат легко интерпретировать. Уединенная волна с амплитудой a_1 движется со скоростью $2a_1$. Следовательно, равенства (16.144) описывают последовательность уединенных волн, сохраняющих постоянные амплитуды и движущихся по траектории $x = 2a_1 t$. Убывание волнового числа k_1 связано с тем, что уединенные волны, имеющие различные амплитуды, разбегаются. Решение изображено на рис. 17.1 (см. стр. 572), где оно получено при обсуждении точных решений. Однако там оно завершается разрывами у a_1 и k_1 . Рассмотрим поэтому, как выглядят для наших уравнений условия на разрыве.

Снова возникает обычный вопрос: какие уравнения сохранения должны оставаться справедливыми при переходе через разрыв?

Если принять систему (16.142)—(16.143), то условия на разрыве имеют вид

$$\begin{aligned}-V [k_1 a_1^{1/2}] + [2k_1 a_1^{3/2}] &= 0, \\ -V [k_1] + [2a_1 k_1] &= 0,\end{aligned}$$

где V — скорость разрыва. Скачкообразный переход от $a_1 = 0$ до некоторого ненулевого значения $a_1^{(0)}$ будет, следовательно, распространяться со скоростью $V = 2a_1^{(0)}$. Это — фазовая скорость, и полученный результат указывает на то, что решение (16.144) может быть оборвано на любой из последовательных уединенных волн.

Именно такой выбор подтверждается точным решением, которое будет приведено в § 17.5. Функцию f и амплитуду $a_1^{(0)}$ можно определить только из начальных условий, также приведенных в § 17.5. Конечно, в случае уравнения Кортевега — де Фриза точный анализ дает более сильные результаты, чем теория модуляций уединенных волн. Но подтверждение результатов в этом случае оправдывает аналогичное использование теории модуляций в задачах, где точные решения неизвестны.

Наконец, можно отметить, что если уединенную волну записать в виде

$$\eta = a_1 \operatorname{sech}^2 \left(\frac{a_1}{2} \right)^{1/2} \left(x - \frac{\omega_1}{k_1} t \right)$$

и использовать это выражение для вычисления усредненного лагранжиана

$$\mathcal{L} = k_1 \int_{-\infty}^{\infty} L dx,$$

то найдем

$$\mathcal{L} \propto \omega_1 a_1^{3/2} - \frac{6}{5} k_1 a_1^{5/2}.$$

Вариационные уравнения имеют вид

$$\delta a: \quad \omega_1 = 2a_1 k_1,$$

$$\delta \theta: \quad (a_1^{3/2})_t + \left(\frac{6}{5} a_1^{5/2} \right)_x = 0,$$

$$\text{совместность:} \quad k_1 t + \omega_1 x = 0.$$

Эти уравнения эквивалентны системе (16.142)—(16.143).

Глава 17

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ; ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИЕ УЕДИНЕННЫЕ ВОЛНЫ

17.1. Канонические уравнения

Одним из наиболее замечательных достижений в недавних исследованиях по нелинейным диспергирующим волнам является открытие многих точных решений для некоторых простых канонических уравнений теории. Это касается в основном следующих уравнений.

1. Уравнение Кортевега — де Фриза, нормированное теперь к виду

$$\eta_t + \sigma \eta \eta_x + \eta_{xxx} = 0, \quad (17.1)$$

где σ — некоторая постоянная.

2. Кубическое уравнение Шредингера

$$iu_t + u_{xx} + \nu |u|^2 u = 0. \quad (17.2)$$

3. Уравнение Син-Гордона

$$\varphi_{tt} - \varphi_{xx} + \sin \varphi = 0. \quad (17.3)$$

Можно построить явные решения, описывающие взаимодействие произвольного числа уединенных волн, и предсказать точное количество уединенных волн, которые в конце концов образуются из любого финитного начального возмущения.

Эти уравнения являются каноническими для рассматриваемой теории в том смысле, что они объединяют некоторые простейшие типы дисперсии с простейшими типами нелинейности. Уравнение Кортевега — де Фриза объединяет линейную дисперсию

$$\omega = -\kappa^3 \quad (17.4)$$

с тиличным нелинейным оператором переноса. Уравнение (17.2) объединяет дисперсию

$$\omega = \kappa^2 \quad (17.5)$$

с простой кубической нелинейностью. В обоих случаях дисперсионное соотношение можно рассматривать как начало разложения в ряд Тейлора более общего дисперсионного соотношения, причем (17.4) относится к нечетному по κ случаю, а (17.5) — к четному. (Если в (17.4) или в (17.5) добавлен член, пропорциональный κ ,

то его можно исключить переходом к движущейся системе отсчета.) По этой причине это не просто модельные уравнения, а уравнения, которые часто можно рассматривать как длинноволновые приближения. Линейное дисперсионное соотношение $\omega^2 = \kappa^2 + 1$ в (17.3) также имеет довольно общий вид, не считая даже его первоначальной связи с релятивистскими частицами через уравнение Клейна — Гордона. Ряд задач, в которых соответствующий нелинейный член равен $\sin \varphi$, был указан в § 14.1.

Сразу же после решения Коулом и Хопфом уравнения Бюргерса начались бесчисленные попытки применить аналогичные приемы к уравнению (17.1), но окончательный метод решения потребовал большего, нежели простой замены. Гарднер, Грин, Крускал и Миура [1] разработали остроумный способ, связывающий это уравнение с обратной задачей рассеяния. Конечный результат состоит в сведении уравнения (17.1) к линейному интегральному уравнению, но кажется невероятным, чтобы кто-нибудь смог обнаружить это без промежуточных шагов. Зная ответ, можно увидеть, что подстановка

$$\sigma\eta = 12 (\ln F)_{xx}, \quad (17.6)$$

являющаяся разумным обобщением подстановки

$$c = -2v (\ln \varphi)_x$$

для уравнения Бюргерса, дает легкий способ получения частных решений, описывающих взаимодействие уединенных волн. Уравнение для F нелинейно, но имеет специальную структуру, и решения в виде ряда по экспонентам приводят к уединенным волнам. Однако не ясно, как из этого уравнения для F извлечь более общую информацию.

Уравнение (17.2) было решено Захаровым и Шабатом [1] при помощи аналогичной техники обратной задачи рассеяния, связанной до некоторой степени с общими идеями Лакса [1].

Явное решение уравнения (17.3) для двух взаимодействующих уединенных волн впервые было получено Перрингом и Скирмом [1], видимо, на основе численного анализа. Дж. Лэмб [1, 2] затем нашел, как, последовательно используя преобразование Беклунда, можно получить дальнейшие решения. Недавно Дж. Лэмб [3], а также Абловиц, Кауп, Ньюэлл и Сегюр [1] показали, как можно использовать обратную задачу рассеяния.

Удивительный общий результат состоит в том, что если уединенные волны, первоначально разделенные в пространстве, вступают во взаимодействие, то со временем они выходят из области взаимодействия и восстанавливают свои исходные формы и скорости. Единственным напоминанием о взаимодействии являются постоянные смещения от положений, которые они занимали бы

в противном случае. Интересна аналогия со столкновением частиц. Основные решения и методы их получения будут описаны ниже.

Мы добавим два связанных с этими идеями примера. Тогда [1, 2] рассматривает цепочку из соединенных пружинами точечных масс, являющуюся дискретным аналогом некоторых из наших задач. Если растяжение n -й пружины относительно ее равновесной длины равно $r_n(t)$, то уравнения можно записать в виде

$$m\ddot{r}_n = 2f(r_n) - f(r_{n+1}) - f(r_{n-1}), \quad (17.7)$$

где $f(r_i)$ — сила натяжения i -й пружины. Непрерывным пределом этого разностного уравнения будет волновое уравнение, причем нелинейное, если $f(r)$ нелинейная функция от r . В нелинейном случае существование решений уравнений (17.7) в виде однородных волновых пакетов можно доказать, основываясь на разложениях типа Стокса по степеням амплитуды. Но Тогда обнаружил хитроумные точные выражения в эллиптических функциях для случая

$$f(r) = -\alpha(1 - e^{-\beta r}). \quad (17.8)$$

Более того, эти решения содержат уединенные волны как предельные случаи, и Тогда смог найти решения, описывающие взаимодействия и подобные соответствующим решениям уравнений с частными производными.

Наконец, уравнение

$$(1 - \varphi_t^2)\varphi_{xx} + 2\varphi_x\varphi_t\varphi_{xt} - (1 + \varphi_x^2)\varphi_{tt} = 0 \quad (17.9)$$

было предложено Борном и Инфельдом [1] в виде вариационного принципа

$$\delta \iint \{1 - \varphi_t^2 + \varphi_x^2\}^{1/2} dx dt = 0. \quad (17.10)$$

Идея состояла в обобщении обычного волнового уравнения (с лагранжианом $1/2 \varphi_t^2 - 1/2 \varphi_x^2$) и во введении нелинейных эффектов с сохранением свойств лоренцевой инвариантности. Это уравнение допускает волны произвольной формы, движущиеся со скоростями $+1$ или -1 . Их можно было бы рассматривать как уединенные волны, если бы не отсутствие у них специфической внутренней структуры, характерной для предыдущих случаев. Однако Барбашов и Черников [1] показали, что можно найти явные решения, описывающие взаимодействия, опять со свойствами сохранения формы и со смещением положения вследствие взаимодействия. Мы проводим краткое описание этих решений, хотя, возможно, у них и нет глубокой связи с остальными уравнениями.

Уравнение Кортевега — де Фриза

17.2. Взаимодействующие уединенные волны

Приведем сначала решения, которые можно получить при помощи преобразования (17.6). Параметр σ можно, конечно, исключить нормировкой как из (17.1), так и из (17.6), но в литературе использовались различные нормировки (отвечающие $\sigma = 1$, $\sigma = 6$, $\sigma = -6$), и имеет смысл оставить этот параметр свободным для удобства сопоставления результатов. Вывод уравнения (17.1) для волн на воде и его более общее значение как длинноволнового приближения в других контекстах (см. соотношение (17.4)) были объяснены в § 13.11.

Переход от η к F проще всего совершить в два этапа. Сначала положим $\eta = p_x$ и, проинтегрировав, получим уравнение

$$p_t + \frac{1}{2} \sigma p_x^2 + p_{xxx} = 0.$$

После нелинейной замены

$$\sigma p = 12 (\ln F)_x$$

получаются члены до четвертой степени функции F и ее производных включительно, но специфическая черта данного преобразования состоит в том, что в окончательном выражении члены третьей и четвертой степеней выпадают. В результате получаем квадратичное уравнение

$$F(F_t + F_{xxx})_x - F_x(F_t + F_{xxx}) + 3(F_{xx}^2 - F_x F_{xxx}) = 0. \quad (17.11)$$

Отметим появление характерного оператора

$$\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^3}{\partial x^3}$$

и некоторую симметричность уравнения. Возможная (но довольно натянутая) мотивировка введенного преобразования связана с решением, которое описывает уединенную волну и может быть представлено в виде

$$\sigma \eta = 3\alpha^2 \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\theta - \theta_0}{2} \right), \quad \theta = \alpha x - \alpha^3 t, \quad (17.12)$$

где α и θ_0 — параметры. Это производная по x от выражения

$$6\alpha \left\{ \operatorname{th} \left(\frac{\theta - \theta_0}{2} \right) - 1 \right\},$$

которое в свою очередь является производной по x от $12 \ln F$, где

$$\begin{aligned} F &= 1 + \exp \{ -(\theta - \theta_0) \} = \\ &= 1 + \exp \{ -\alpha(x-s) + \alpha^3 t \}, \quad s = \frac{\theta_0}{\alpha}. \end{aligned} \quad (17.13)$$

Этот «вывод» нацеливает на общее рабочее правило поиска точных решений в этой области: рассматривать преобразования, которые переводят решения типа уединенной волны в простые экспоненты. Для сравнения можно отметить, что преобразование $c = -2v(\ln \varphi)_x$ для уравнения Бюргерса переводит решение (4.23), описывающее стационарную ударную волну, в

$$\varphi = \exp(-\alpha_1 x + v\alpha_1^2 t) + \exp(-\alpha_2 x + v\alpha_2^2 t), \quad \alpha_i = \frac{c_i}{2v}. \quad (17.14)$$

Чем бы мы ни руководствовались, сразу видно, что выражение (17.13) является решением уравнения (17.11) при любых α и s . Это решение соответствует оператору

$$\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^3}{\partial x^3},$$

оно удовлетворяет уравнению $F_t + F_{xxx} = 0$, а третий член в (17.11) обращается в нуль вследствие однородности по производным.

Если бы уравнение (17.11) было линейным, то мы могли бы строить линейные комбинации таких решений с различными α и s , но, в силу нелинейности, возникнут взаимодействующие члены. В обычном подходе теории взаимодействий следовало бы положить

$$F = 1 + F^{(1)} + F^{(2)} + \dots,$$

где $F^{(i)}$ находится из цепочки уравнений

$$\begin{aligned} \{F_t^{(1)} + F_{xxx}^{(1)}\}_x &= 0, \\ \{F_t^{(2)} + F_{xxx}^{(2)}\}_x &= -3 \{F_{xx}^{(1)2} - F_x^{(1)} F_{xxx}^{(1)}\} \end{aligned}$$

и т. д. Возьмем в качестве $F^{(1)}$ два члена подобных (17.13):

$$F^{(1)} = f_1 + f_2, \quad f_j = \exp \{ -\alpha_j(x-s_j) + \alpha_j^3 t \}, \quad j = 1, 2. \quad (17.15)$$

Для $F^{(2)}$ получаем уравнение

$$\{F_t^{(2)} + F_{xxx}^{(2)}\}_x = 3\alpha_1\alpha_2(\alpha_2 - \alpha_1)^2 f_1 f_2, \quad (17.16)$$

которое имеет решение

$$F^{(2)} = \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)^2}{(\alpha_2 + \alpha_1)^2} f_1 f_2. \quad (17.17)$$

Удивительно, что тогда во всех остальных уравнениях цепочки правые части обращаются в нуль, и поэтому

$$F = 1 + f_1 + f_2 + \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)^2}{(\alpha_2 + \alpha_1)^2} f_1 f_2 \quad (17.18)$$

является *точным решением* уравнения (17.11).

Отличительная черта этого решения состоит в том, что взаимодействующие члены приводят в правой части уравнения (17.16) только к произведению $f_1 f_2$, а члены f_1^2 и f_2^2 , которых также можно было ожидать, отсутствуют. Этот результат обобщается на высшие порядки, так что нелинейные члены в уравнении никогда не приводят к произведениям функций f с повторяющимися индексами. Так, при двух исходных членах, как в (17.15), необходимы лишь комбинации f_1 , f_2 , $f_1 f_2$ и мы имеем точное решение. Если начать с

$$F^{(1)} = \sum_{j=1}^N f_j,$$

то $F^{(2)}$ содержит все члены $f_j f_k$ с $j \neq k$, но не содержит f_j^2 ; $F^{(3)}$ содержит все члены $f_j f_k f_l$ с $j \neq k \neq l$, но не содержит f_j^3 или $f_j^2 f_k$ и т. д. Таким образом, последовательность обрывается на

$$F^{(N)} \propto f_1 f_2 \dots f_N$$

(исчерпывающем все произведения без повторяющихся индексов), и существует точное решение вида

$$F = 1 + \sum_j f_j + \sum_{j \neq k} a_{jk} f_j f_k + \sum_{j \neq k \neq l} a_{jkl} f_j f_k f_l + \dots + a_{12 \dots N} f_1 f_2 \dots f_N.$$

Это уже достаточно поразительно, однако можно еще показать, что решение можно записать в виде

$$F = \det \| F_{mn} \|, \quad (17.19)$$

где¹⁾

$$F_{mn} = \delta_{mn} + \frac{2\alpha_m}{\alpha_m + \alpha_n} f_m. \quad (17.20)$$

Этот результат впервые был обнаружен при более общем подходе, который будет описан в следующем параграфе, но его можно проверить непосредственной подстановкой в (17.11) (см. Хирота [1]).

Решение с N модами f_j описывает взаимодействие N уединенных волн. Рассмотрим случай $N = 2$. Решение для F дается формулой (17.18), а соответствующее выражение для η , заданное фор-

¹⁾ Существует ряд эквивалентных выражений F_{mn} , приводящих к одному и тому же окончательному выражению для η .

мулой (17.6), имеет вид

$$\frac{\sigma}{12} \eta = \frac{\alpha_1^2 f_1 + \alpha_2^2 f_2 + 2(\alpha_2 - \alpha_1)^2 f_1 f_2}{(1 + f_1 + f_2 + \{(\alpha_2 - \alpha_1)/(\alpha_2 + \alpha_1)\}^2 f_1 f_2)^2} + \frac{\{(\alpha_2 - \alpha_1)/(\alpha_2 + \alpha_1)\}^2 (\alpha_2^2 f_1^2 f_2 + \alpha_1^2 f_1 f_2^2)}{(1 + f_1 + f_2 + \{(\alpha_2 - \alpha_1)/(\alpha_2 + \alpha_1)\}^2 f_1 f_2)^2}, \quad (17.21)$$

где

$$f_j = \exp \{ -\alpha_j (x - s_j) + \alpha_j^2 t \}.$$

Уединенную волну (17.12) можно записать через f в виде

$$\frac{\sigma}{12} \eta = \frac{|\alpha^2 f|}{(1 + f)^2}, \quad (17.22)$$

где $\sigma \eta$ достигает максимума при $f = 1$. Отметим, что

$$\text{максимум амплитуды } \sigma \eta = 3\alpha^2,$$

$$\text{положение максимума} = s + \alpha^2 t, \quad (17.23)$$

$$\text{скорость волны} = \alpha^2.$$

Решение (17.21) близко к уединенной волне с параметром α_1 в областях (x, t) -плоскости, где $f_1 \simeq 1$ и f_2 либо велико, либо мало. Чтобы проверить это, заметим следующее.

1. При $f_1 \simeq 1$, $f_2 \ll 1$,

$$\frac{\sigma}{12} \eta \simeq \frac{\alpha_1^2 f_1}{(1 + f_1)^2}.$$

2. При $f_1 \simeq 1$, $f_2 \gg 1$,

$$\frac{\sigma}{12} \eta \simeq \frac{\{(\alpha_2 - \alpha_1)/(\alpha_2 + \alpha_1)\}^2 \alpha_1^2 f_1 f_2^2}{(f_2 + \{(\alpha_2 - \alpha_1)/(\alpha_2 + \alpha_1)\}^2 f_1 f_2)^2} = \frac{\alpha_1^2 \tilde{f}_1}{(1 + \tilde{f}_1)^2},$$

$$f_1 = \left(\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_2 + \alpha_1} \right)^2 f_1.$$

Последнее выражение описывает уединенную волну α_1 , у которой параметр s_1 заменен на

$$\tilde{s}_1 = s_1 - \frac{1}{\alpha_1} \ln \left(\frac{\alpha_2 + \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1} \right)^2; \quad (17.24)$$

это отвечает конечному смещению профиля в x -направлении. Аналогично, там, где $f_2 \simeq 1$, а f_1 либо велико, либо мало, имеем уединенную волну α_2 со сдвигом (или без сдвига) у s_2 . Там, где $f_1 \simeq 1$ и $f_2 \simeq 1$, находится область взаимодействия; там, где f_1 и f_2 обе малы или велики, имеем $\sigma \eta \simeq 0$.

Теперь ясно поведение взаимодействующих уединенных волн, описываемых равенством (17.21). Положим для определенности $\alpha_2 > \alpha_1 > 0$ и заметим, что, согласно (17.23), уединенная волна α_2 больше и движется быстрее, чем уединенная волна α_1 . При $t \rightarrow$

$\rightarrow -\infty$ область взаимодействия, в которой $f_1 \simeq 1$, $f_2 \simeq 1$, отсутствует и выражение (17.21) описывает

уединенную волну α_1 на $x = s_1 + \alpha_1^2 t$, $f_1 \simeq 1$, $f_2 \ll 1$,

уединенную волну α_2 на $x = s_2 - \frac{1}{\alpha_2} \ln \left(\frac{\alpha_2 + \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1} \right)^2 + \alpha_2^2 t$,

$f_1 \gg 1$, $f_2 \simeq 1$;

в остальных точках $\sigma\eta \simeq 0$ (и f_1 и f_2 либо велики, либо малы).

Это отвечает большей уединенной волне α_2 , перегоняющей меньшую уединенную волну α_1 . Когда $t \rightarrow +\infty$, имеем

уединенную волну α_1 на $x = s_1 - \frac{1}{\alpha_1} \ln \left(\frac{\alpha_2 + \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1} \right)^2 + \alpha_1^2 t$,

$f_1 \simeq 1$, $f_2 \gg 1$,

уединенную волну α_2 на $x = s_2 + \alpha_2^2 t$, $f_1 \ll 1$, $f_2 \simeq 1$;

в остальных точках $\sigma\eta \simeq 0$.

Замечательный результат состоит в том, что уединенные волны выходят из области взаимодействия без изменения формы с первоначальными параметрами α_1 и α_2 , более быстрая уединенная волна α_2 теперь находится впереди. Единственным напоминанием о процессе соударения является сдвиг вперед на

$$\frac{1}{\alpha_2} \ln \left(\frac{\alpha_2 + \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1} \right)^2 \text{ у уединенной волны } \alpha_2$$

и сдвиг назад на

$$\frac{1}{\alpha_1} \ln \left(\frac{\alpha_2 + \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1} \right)^2 \text{ у уединенной волны } \alpha_1.$$

Взаимодействие происходит в окрестности точки

$$t = -\frac{s_2 - s_1}{\alpha_2^2 - \alpha_1^2}, \quad x = \frac{\alpha_2^2 s_1 - \alpha_1^2 s_2}{\alpha_2^2 - \alpha_1^2}.$$

В этой области $f_1 \simeq 1$, $f_2 \simeq 1$, и (17.21) описывает, как две волны сливаются, а затем расходятся, поменявшись местами.

Аналогичные результаты можно вывести из выражений (17.19) — (17.20) для случая N уединенных волн. В конечной стадии при $t \rightarrow \infty$ существует N уединенных волн, амплитуда и скорости которых возрастают при приближении к фронту и которые удаляются друг от друга по мере увеличения t .

17.3. Обратная задача рассеяния

Для согласования с оригинальными работами при изложении теории мы временно положим

$$u = -\frac{\sigma}{6} \eta; \quad (17.25)$$

тогда уравнение примет вид

$$u_t - buu_x + u_{xxx} = 0. \quad (17.26)$$

По аналогии с уравнением Бюргерса популярным первым шагом при построении решений является подстановка

$$u \propto \frac{\psi_{xx}}{\psi},$$

но одна она далеко не уведет. Гарднер, Грин, Крускал и Миура [1] продвинулись дальше, положив

$$u = \frac{\psi_{xx}}{\psi} + \lambda$$

и заметив, что это равенство можно записать как приведенное уравнение Шредингера

$$\psi_{xx} + (\lambda - u)\psi = 0. \quad (17.27)$$

Предположительно в этот момент акценты сместились и (17.27) стали рассматривать не как преобразование, упрощающее уравнение для ψ , а скорее как ассоциированную задачу рассеяния, при помощи которой информацию о ψ можно использовать для предсказания свойств функции u . С этой точки зрения волновой профиль $u(x, t)$ представляет собой рассеивающий потенциал. Время t фигурирует как параметр; для каждого значения t существует своя задача рассеяния. Этот временной параметр совершенно отличен от времени τ , которое можно было бы восстановить в приведенном волновом уравнении (17.27) подстановкой $\varphi(x, \tau, t) = \psi(x, t) \times \times \exp(i\sqrt{\lambda}\tau)$, получив

$$\varphi_{xx} - \varphi_{\tau\tau} - u(x, t)\varphi = 0. \quad (17.28)$$

В дальнейшем мы вернемся к уравнению (17.28), а пока примем приведенный вариант (17.27).

Для использования равенства (17.27) необходимо при помощи (17.26) найти уравнение для ψ . Поскольку значения параметра λ должны принадлежать спектру задачи рассеяния (17.27), а задача меняется с изменением t , первоначально следует считать λ функцией от t . Подставив (17.27) в (17.26), после ряда хитроумных преобразований находим, что уравнение можно записать в виде

$$\psi^2 \frac{d\lambda}{dt} + \frac{\partial}{\partial x} \{\psi Q_x - \psi_x Q\} = 0, \quad (17.29)$$

$$Q = \psi_t + \psi_{xxx} - 3(u + \lambda)\psi_x. \quad (17.30)$$

Ограничимся теперь рассмотрением решений уравнения (17.26), которые при $|x| \rightarrow \infty$ достаточно быстро стремятся к нулю. При этих условиях спектр задачи (17.27) дискретен при $\lambda < 0$

и непрерывен при $\lambda > 0$. Для дискретных собственных значений $\lambda_n = -\kappa_n^2$ соответствующие собственные функции ψ_n удовлетворяют соотношениям

$$|\psi_n| \rightarrow 0, \quad |x| \rightarrow 0$$

$$0 < \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^2 dx < \infty.$$

Следовательно, интегрируя (17.29) от $-\infty$ до ∞ , устанавливаем, что λ_n не зависит от t . Для непрерывного спектра будем считать $\lambda > 0$ не зависящим от t и рассмотрим поведение ψ при изменении t . В любом случае из (17.29) с $dN/dt = 0$ находим, что

$$Q \equiv \psi_t + \psi_{xxx} - 3(u + \lambda)\psi_x = C\psi, \quad (17.31)$$

где C не зависит от x . Мы теперь знаем, что эволюция любого решения ψ уравнения (17.27) при фиксированном параметре λ описывается уравнением (17.31). При исследовании задачи на собственные значения (17.27) удобно положить $\lambda = \mu^2$ и работать с функцией χ , удовлетворяющей уравнению (17.27) и условию

$$\chi \sim e^{i\mu x}, \quad \text{Im } \mu \geq 0 \quad \text{при } x \rightarrow +\infty. \quad (17.32)$$

Для того чтобы эта функция, введенная, скажем, для $t = 0$, сохраняла одну и ту же нормировку (17.32) для всех t , потребуем, чтобы выражение (17.32) было асимптотическим решением уравнения (17.31) для всех t . Это отвечает выбору $C = -4i\mu^3$, и наша система уравнений принимает вид

$$\psi_{xx} + (\mu^2 - u)\psi = 0, \quad (17.33)$$

$$\psi_t + \psi_{xxx} - 3(u + \mu^2)\psi_x + 4i\mu^3\psi = 0. \quad (17.34)$$

Теперь мы должны объяснить, как эта любопытная формулировка позволяет вычислить $u(x, t)$.

Метод опирается на утверждение, что рассеивающий потенциал u в (17.33) можно построить, зная коэффициент отражения для волн, приходящих из $x = +\infty$, и располагая некоторой информацией о точечном спектре. Это обратная задача рассеяния; в первоначальной постановке задача состояла в определении неизвестного рассеивателя по его отражательным свойствам. В данном контексте необходимая информация о решениях ψ определяется не из эксперимента, а из второго уравнения (17.34). Для определенности рассмотрим задачу о нахождении $u(x, t)$, $t > 0$ по заданной функции $u(x, 0)$. Процедура состоит в следующем. Для данной функции $u(x, 0)$ сначала решаем задачу на собственные значения (17.33) и определяем дискретные собственные значения $\mu = i\kappa_n$, соответствующие собственные функции ψ_n и коэффициент отражения β для падающих волн. Собственные функции

можно выбрать в виде

$$\psi_n(x) = \chi(\kappa_n, x),$$

где χ конкретизируется условием (17.32); кроме того, вводятся нормировочные коэффициенты

$$\gamma_n = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^2 dx \right\}^{-1}.$$

Рассмотрим теперь коэффициент отражения β . Пусть Ψ — решение уравнения (17.33) с начальным распределением $u(x, 0)$, имеющее следующее поведение на $\pm\infty$:

$$\Psi(k, x) \sim \begin{cases} e^{-ikx} + \beta(k) e^{ikx}, & x \rightarrow +\infty, \\ \alpha(k) e^{-ikx}, & x \rightarrow -\infty, \end{cases}$$

где k — положительное число. Отсюда определяются коэффициент отражения $\beta(k)$ и коэффициент прохождения $\alpha(k)$. В этом состоит прямая задача рассеяния: найти κ_n , γ_n и $\beta(k)$ для данного потенциала $u(x, 0)$. Обратная задача состоит в определении $u(x, 0)$ по известным κ_n , γ_n и $\beta(k)$.

Обратимся теперь к эволюции этих решений во времени. Мы знаем, что величины κ_n остаются неизменными. В силу (17.34) и (17.33), имеем

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \chi^2 dx = [-2\chi\chi_{xx} + 4\chi_x^2 + 6\mu^2\chi^2]_{-\infty}^{+\infty} - 8i\mu^3 \int_{-\infty}^{\infty} \chi^2 dx.$$

Для собственных функций $\mu = i\kappa_n$ и $\psi_n(x, t) = \chi(x, t, i\kappa_n) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm\infty$; следовательно, нормировочные коэффициенты равны

$$c_n(t) = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^2 dx \right\}^{-1} = \gamma_n e^{8\kappa_n^3 t}.$$

Решение $\Psi(k, x, t)$ задачи рассеяния будет вести себя как

$$\Psi(k, x, t) \sim f(k, t) e^{-ikx} + g(k, t) e^{ikx}, \quad x \rightarrow \infty,$$

причем это выражение должно быть асимптотическим решением уравнения (17.34) с $\mu = k$. Подстановка убеждает, что

$$f(k, t) = e^{-8ik^3 t}, \quad g(k, t) = \beta.$$

Коэффициент отражения равен

$$b(k, t) = \frac{g(k, t)}{f(k, t)} = \beta(k) e^{8ik^3 t}.$$

Обратная теория рассеяния позволяет восстановить $u(x, t)$ по κ_n , $c_n(t)$, $b(k, t)$.

Короче говоря, прямая задача рассеяния для $u(x, 0)$ определяет κ_n , $c_n(0)$, $b(k, 0)$; уравнение (17.34) определяет эволюцию во времени; обратная задача определяет по этим величинам $u(x, t)$.

Основная трудность, несомненно, состоит в решении обратной задачи. Это позволяет сделать известная статья Гельфанда и Левитана [1] и ее различные обобщения. Их статья написана в терминах определения рассеивающего потенциала u по спектральной функции $\rho(\lambda)$, имеющей разрывы со скачками c_n в дискретных собственных значениях $\lambda = -\kappa_n^2$ и непрерывный спектр $0 < \lambda < \infty$, связанный с b . Кэй и Мозес [1], а также Марченко [1] разработали непосредственный способ восстановления $u(x, t)$ по κ_n , c_n , b ; исчерпывающий обзор дан Фаддеевым [1]. Результат состоит в том, что

$$u(x, t) = -2 \frac{d}{dx} K(x, x, t), \quad (17.35)$$

где функция $K(x, y, t)$ удовлетворяет линейному интегральному уравнению

$$K(x, y, t) + B(x+y, t) + \int_x^\infty K(x, z, t) B(z+y, t) dz = 0, \quad y > x, \quad (17.36)$$

в котором

$$\begin{aligned} B(x+y, t) &= \sum c_n(t) \exp\{-\kappa_n(x+y)\} + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty b(k, t) \exp\{ik(x+y)\} dk = \\ &= \sum \gamma_n \exp\{-\kappa_n(x+y) + 8\kappa_n^3 t\} + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \beta(k) \exp\{ik(x+y) + 8ik^3 t\} dk; \end{aligned} \quad (17.37)$$

начальная функция $u(x, 0)$ определяет соответствующие параметры κ_n , γ_n , $\beta(k)$.

Вывод соотношений (17.35) — (17.37) с помощью спектрального подхода требует более глубокого рассмотрения, чем здесь уместно. Но Балаис [1] показал ¹⁾, что, по крайней мере формально,

¹⁾ Этот подход хорошо известен в теории рассеяния. Обобщения, включающие некоторые многомерные задачи, можно найти в работе В. Е. Захарова и А. Б. Шабата, *Функц. анализ и его приложения*, 8 (1974), вып. 3, 43—53. — *Прим. ред.*

результаты можно получить, работая с «неприведенным» уравнением (17.28) и восстанавливая потенциал $u(x, t)$ по его отражающим свойствам для падающей волны типа δ -функции, а не для падающей периодической волны. По существу идея состоит в том, что работать следует во временной области, а не в частотной. Этот подход к обратной задаче рассеяния позволяет до некоторой степени упростить изложение метода.

Альтернативная версия

Будем считать уравнения (17.33) и (17.34) преобразованиями Фурье уравнений

$$\begin{aligned}\varphi_{xx} - \varphi_{\tau\tau} - u\varphi &= 0, \\ \varphi_t + \varphi_{xxx} - 3u\varphi_x + 3\varphi_{x\tau\tau} - 4\varphi_{\tau\tau\tau} &= 0,\end{aligned}$$

связывающих функцию $u(x, t)$ с функцией $\varphi(x, \tau; t)$, где

$$\varphi(x, \tau; t) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, \mu; t) e^{i\mu\tau} d\mu.$$

Эту систему уравнений можно записать более симметрично:

$$M\varphi \equiv \varphi_{xx} - \varphi_{\tau\tau} - u\varphi = 0, \quad (17.38)$$

$$N\varphi \equiv \varphi_t + \partial^3\varphi - 3u\partial\varphi = 0; \quad (17.39)$$

при этом

$$\partial \equiv \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial \tau}.$$

Элементарные выкладки показывают, что

$$(NM - MN)\varphi = -(u_t - 6u u_x + u_{xxx})\varphi + 3u_x M\varphi.$$

Следовательно, из уравнений (17.38)–(17.39) следует уравнение Кортвега — де Фриза, и мы имеем прямые основания для их введения. Далее мы будем действовать по аналогии с предыдущим подходом. Согласно версии Баланиса обратной задачи рассеяния в (x, τ) -плоскости, поведение функции φ при $x \rightarrow +\infty$ определяет рассеивающий потенциал u в (17.38). Эволюция φ при росте t определяется уравнением (17.39).

Приведем рассуждения Баланиса для уравнения (17.38), не выделяя пока параметр t . Рассмотрим волну $\varphi = \delta(x + \tau)$, приходящую из $x = +\infty$, и обозначим отраженную волну через $B(x - \tau)$. Таким образом,

$$\varphi \sim \varphi_\infty = \delta(x + \tau) + B(x - \tau) \quad \text{при } x \rightarrow +\infty. \quad (17.40)$$

Предположим, что соответствующее полное решение уравнения (17.38) можно записать как

$$\varphi(x, \tau) = \varphi_{\infty}(x, \tau) + \int_x^{\infty} K(x, \xi) \varphi_{\infty}(\xi, \tau) d\xi. \quad (17.41)$$

(Это эквивалентно решающему шагу в методе Гельфанда—Левитана.) Непосредственной подстановкой в (17.38) проверяем, что такое решение существует при условии, что

$$\begin{aligned} K_{\xi\xi} - K_{xx} + u(x)K &= 0, \quad \xi > x, \\ u(x) &= -2 \frac{d}{dx} K(x, x), \\ K, K_{\xi} &\rightarrow 0, \quad \xi \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (17.42)$$

Это корректно поставленная задача, и, следовательно, K существует. В силу гиперболичности волнового уравнения (17.38), φ должна обращаться в нуль при $x + \tau < 0$. Отсюда

$$\varphi_{\infty}(x, \tau) + \int_x^{\infty} K(x, \xi) \varphi_{\infty}(\xi, \tau) d\xi = 0, \quad x + \tau < 0.$$

Подставив это выражение для φ_{∞} в (17.40), получим

$$B(x - \tau) + K(x, -\tau) + \int_x^{\infty} K(x, \xi) B(\xi - \tau) d\xi = 0, \quad x + \tau < 0.$$

При $\tau = -y$ это совпадает с уравнением Гельфанда—Левитана (17.36).

Чтобы использовать эти результаты для решения уравнения Кортевега—де Фриза, заметим, что эволюция функции B при росте t определяется уравнением (17.39). Но при $x \rightarrow +\infty, u \rightarrow 0$, следовательно, B удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned} B_{xx} - B_{\tau\tau} &= 0, \\ B_t + \partial^3 B &= 0. \end{aligned} \quad (17.43)$$

При $t = 0$ функция B определяется по прямой задаче рассеяния для (17.38) с $u(x, 0)$ и имеет вид

$$B(x - \tau) = \sum \gamma_n \exp\{-\kappa_n(x - \tau)\} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \beta(k) \exp\{ik(x - \tau)\} dk.$$

Решением уравнений (17.43) при $t > 0$ является

$$B(x-\tau, t) = \sum \gamma_n \exp \{ -\kappa_n (x-\tau) + 8\kappa_n^3 t \} + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \beta(k) \exp \{ ik(x-\tau) + 8ik^3 t \} dk.$$

При $\tau = -y$ это опять совпадает с (17.37).

Эта версия не только позволяет быстрее получить конечный результат. Она заменяет довольно неуклюжее уравнение (17.34) более симметричным уравнением (17.39) и более четко приводит к простой линейной задаче (17.43). Основной дисперсионный оператор

$$\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^3}{\partial x^3}$$

фигурирует и в (17.39), и в (17.43), но только в более общей форме

$$\frac{\partial}{\partial t} + \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial \tau} \right)^3.$$

Эта обобщенная форма позволяет понять, откуда появляется множитель 8 в содержащем t члене выражения (17.37).

Мы будем называть выражения (17.35)–(17.37) решением, хотя в общем случае с линейным интегральным уравнением (17.36) трудно иметь дело. Однако из него можно получить некоторые результаты. Во-первых, в частном случае $\beta(k) = 0$ уравнение решается в явном виде и дает взаимодействие уединенных волн, обсуждавшееся в предыдущем параграфе; каждое дискретное собственное значение отвечает уединенной волне. Во-вторых, набор уединенных волн, в конце концов возникающих из произвольного начального распределения $u(x, 0)$, можно определить по его спектру. В-третьих, можно показать (Сегюр [1])¹⁾, что при $t \rightarrow \infty$ вклад непрерывного спектра в $u(x, t)$ убывает как $t^{-2/3}$. Первые два вопроса будут рассматриваться в следующих параграфах.

¹⁾ См. также Шабат А. Б., Об уравнении Кортевега — де Фриза, ДАН, 211 (1973), вып. 6. Наиболее интересные результаты по этому вопросу содержатся в статье В. Е. Захарова и С. В. Манаква «Асимптотическое поведение нелинейных волновых систем, интегрируемых методом обратной задачи рассеяния», ЖЭТФ, 71 (1976), вып. 1. — Прим. ред.

17.4. Частный случай чисто дискретного спектра

В этом случае соотношение (17.37) можно записать в виде

$$B(x+y) = \sum g_n(x) h_n(y),$$

где не указана явная зависимость от t . Множитель $\exp(8\kappa_n^3 t)$ можно либо включить в g_n или h_n , либо распределить между этими сомножителями. Тогда решение уравнения (17.36) можно искать в виде

$$K(x, y) = \sum w_n(x) h_n(y),$$

что дает

$$w_m(x) + g_m(x) + \sum_n w_n(x) \int_x^\infty g_m(z) h_n(z) dz = 0.$$

Пусть матрица $P(x)$ определена равенствами

$$P_{mn}(x) = \delta_{mn} + \int_x^\infty g_m(z) h_n(z) dz,$$

и пусть f , g и h — векторы-столбцы с компонентами f_m , g_m и h_m ; тогда имеем

$$w(x) = -P^{-1}(x) g(x)$$

и

$$K(x, x) = h^T(x) w(x) = -h^T(x) P^{-1}(x) g(x).$$

Поскольку

$$\frac{d}{dx} P_{mn}(x) = -g_m(x) h_n(x),$$

решение $K(x, x)$ можно представить как

$$K(x, x) = \text{Tr} \left\{ P^{-1} \frac{dP}{dx} \right\} = \sum_n \sum_m \frac{\mathcal{P}_{ml}}{|P|} \cdot \frac{dP_{mn}}{dx} = \frac{1}{|P|} \frac{d}{dx} |P|,$$

где $|P|$ — определитель матрицы P , а $\mathcal{P}_{ml}$ — алгебраическое дополнение элемента P_{ml} . Следовательно,

$$u = -2 \frac{d}{dx} K(x, x) = -2 \frac{d^2}{dx^2} \ln |P|.$$

Так как $u = -\sigma\eta/6$, это совпадает с (17.6), и осталось проверить, что $|P|$ совпадает с функцией F , определенной в (17.19)–(17.20).

Существуют различные способы получить одно и то же выражение для u . Если мы в формуле (17.37) для B положим

$$g_m(x) = \gamma_m \exp(-\kappa_m x + 8\kappa_m^3 t), \quad h_n(x) = \exp(-\kappa_n x),$$

то получим

$$P_{mn} = \delta_{mn} + \frac{\gamma_m \exp \{-(\kappa_m + \kappa_n)x + 8\kappa_m^3 t\}}{\kappa_m + \kappa_n}.$$

Экспоненциальные множители можно вносить в определитель (или не вносить в него), так как это не влияет на окончательное выражение для u ; $\ln |P|$ преобразует их в аддитивные члены, линейные по x , которые исключаются двукратным дифференцированием, фигурирующим в определении u . Следовательно, если каждый столбец матрицы P умножить на $e^{\kappa_n x}$, а каждую строку — на $e^{\kappa_m x}$, то получится эквивалентное выражение

$$|P| \propto \left| \delta_{mn} + \frac{\gamma_m \exp(-2\kappa_m x + 8\kappa_m^3 t)}{\kappa_m + \kappa_n} \right|,$$

которое согласуется с (17.20) при условии, что

$$a_m = 2\kappa_m, \quad \gamma_m = a_m \exp(a_m s_m).$$

Симметричная форма P получается при

$$g_m(x) = h_m(x) = \gamma_m^{1/2} \exp(-\kappa_m x + 4\kappa_m^3 t)$$

и приводит к

$$P_{mn} = \delta_{mn} + \frac{(\gamma_m \gamma_n)^{1/2}}{\kappa_m + \kappa_n} \exp \{-(\kappa_m + \kappa_n)x + 4(\kappa_m^3 + \kappa_n^3)t\}.$$

17.5. Уединенные волны, образованные начальным распределением произвольного вида

Для определения уединенных волн, образующихся из начального распределения $\eta = \eta_0(x)$, нужно всего лишь найти дискретные собственные значения уравнения Шредингера

$$\psi_{xx} + \{\lambda - u_0(x)\} \psi = 0, \quad (17.44)$$

где

$$\frac{\sigma \eta_0(x)}{6} = -u_0(x).$$

После выхода из области взаимодействия уединенная волна, соответствующая $\lambda = -\kappa_n^2$, согласно формуле (17.12), имеет вид

$$-u = \frac{\sigma \eta}{6} = a_n \operatorname{sech}^2(\kappa_n x - 4\kappa_n^3 t + \text{const}), \quad a_n = 2\kappa_n^2. \quad (17.45)$$

Приведем здесь несколько конкретных примеров, используя результаты решения задачи на собственные значения, которые можно найти в большинстве учебников по квантовой теории.

1. $u_0(x) = -Q\delta(x)$. Если $Q > 0$, то существует одно собственное значение $\kappa = Q/2$. Следовательно, образуется единственная уединенная волна. Амплитуда функции u в (17.45) равна $Q^2/2$. Если $Q < 0$, то дискретных собственных значений, а значит и уединенных волн, нет.

2. *Прямоугольная яма.* Если $u_0(x)$ — прямоугольная яма ширины l и глубины A , то собственные значения должны удовлетворять соотношениям (Ландау и Лифшиц [2, стр. 90])

$$\sin \xi = \pm \frac{2\xi}{S}, \quad \operatorname{tg} \xi < 0, \quad (17.46)$$

или

$$\cos \xi = \pm \frac{2\xi}{S}, \quad \operatorname{tg} \xi > 0, \quad (17.47)$$

где

$$S = A^{1/2}l, \quad \xi = \frac{1}{2}S \sqrt{1 - \frac{\kappa^2}{A}} \geq 0.$$

Число собственных значений определяется параметром S . Когда S возрастает, что соответствует более сильным начальным возмущениям, число уединенных волн растет. При любом $S > 0$ существует по крайней мере одно решение задачи на собственные значения, так что всегда образуется хотя бы одна уединенная волна. Для малых S существует решение уравнения (17.47) с асимптотикой

$$\xi \simeq \frac{S}{2}, \quad \kappa \simeq \frac{1}{2}SA^{1/2}, \quad a \simeq \frac{1}{2}S^2A, \quad S \ll 1.$$

При возрастании S вторая уединенная волна образуется, когда S достигает π , а решением уравнения (17.46) является $\xi = \pi/2$. При этом

$$\left. \begin{array}{lll} \xi_1 = 0,934, & \kappa_1 = 0,804A^{1/2}, & a_1 = 1,30A, \\ \xi_2 = \pi/2, & \kappa_2 = 0, & a_2 = 0 \end{array} \right\} S = \pi.$$

Число уединенных волн N растет с увеличением S и выражается формулой

$$N = \text{наибольшее целое число} \leq \frac{S}{\pi} + 1.$$

Зависимость S от A и l для прямоугольной ямы наводит на мысль, что вообще величина

$$Z = \int_{-\infty}^{\infty} |u|^{1/2} dx$$

будет в этом случае своеобразной мерой возмущения и формы волн. Действительно, если вычислить эту величину для одной

удеиненной волны (17.45), то параметр κ сократится и получится

$$Z_s = \int_{-\infty}^{\infty} |u|^{1/2} dx = 2^{1/2} \pi \quad (17.48)$$

независимо от амплитуды. Следовательно, эта мера приписывает уединенной волне единичный размер. Для цуга из N уединенных волн $Z = 2^{1/2} \pi N$. Итак, обнаружена постоянная Планка для уединенных волн!

Параметр S равен величине этого интеграла для начального возмущения. Для больших S , в силу предыдущих результатов, $S \sim \pi N$, так что при больших значениях времени величина Z для цуга уединенных волн равна

$$Z = 2^{1/2} \pi N \sim 2^{1/2} S. \quad (17.49)$$

Это указывает на тесную связь между начальным значением S и конечным значением Z . Но ясно также, что «действие» $\int |u|^{1/2} dx$ не сохраняется. Это верно и для малых S : всегда образуется хотя бы одна уединенная волна, даже в том случае, когда S меньше величины, определяемой из соотношения (17.48). Это следует, по-видимому, интерпретировать как перекачку из непрерывной части спектра. Однако ниже будет показано, что соотношение $N \sim S/\pi$ для больших S носит общий характер и справедливо для начальных возмущений $u_0(x)$, имеющих форму одиночной потенциальной ямы, и величины S , определяемой формулой

$$S = \int_{-\infty}^{\infty} |u_0|^{1/2} dx. \quad (17.50)$$

Для случая δ -функции из первого примера u_0 можно считать пределом выражения $-Q(m/\pi)^{1/2} e^{-mx^2}$ при $m \rightarrow \infty$. Поэтому $S \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$; образование только одной уединенной волны согласуется с результатами других примеров.

3. $u_0 = -A \operatorname{sech}^2 x/l$. В этом случае собственные значения составляют (Ландау и Лифшиц [2, стр. 98])

$$\kappa_n = \frac{1}{2l} \{ (1 + 4Al^2)^{1/2} - (2n - 1) \} \geq 0.$$

Для величины S , определяемой формулой (17.50), получаем

$$S = \pi A^{1/2} l.$$

Число уединенных волн находится из условия

$$N = \text{наибольшее целое число} \leq \frac{1}{2} \left\{ \left(1 + \frac{4S^2}{\pi^2} \right)^{1/2} + 1 \right\}.$$

Как и ранее, при малых S всегда образуется по крайней мере одна уединенная волна и число таких волн растет с увеличением S ; при $S \rightarrow \infty$ снова имеем

$$N \sim \frac{S}{\pi},$$

и соотношение (17.49) выполняется.

4. *Непрерывное распределение уединенных волн.* Когда начальное возмущение велико ($S \rightarrow \infty$), существует много близко расположенных собственных значений, удовлетворяющих правилу Бора — Зоммерфельда (Ландау и Лифшиц [2, стр. 200])

$$\oint p \, dx = \oint \sqrt{\lambda - u_0(x)} \, dx = 2\pi \left(n + \frac{1}{2} \right). \quad (17.51)$$

Поэтому число уединенных волн (наибольшее значение n для $\lambda = 0$) составляет

$$N \sim \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |u_0|^{1/2} \, dx = \frac{S}{\pi}. \quad (17.52)$$

Это и есть общее обоснование результата, полученного в двух последних примерах.

Наибольшее значение $|\lambda|$ для связанных состояний в (17.51) равно u_m , где $u_m = |u_0|_{\max}$, так что λ лежит в интервале $0 < \lambda < u_m^{1/2}$, а амплитуда — в интервале

$$0 < a < 2u_m \quad (17.53)$$

(см. (17.45)). Число собственных значений, расположенных в интервале $(\lambda, \lambda + d\lambda)$, приближенно составляет

$$\frac{1}{4\pi} \oint \frac{dx}{\sqrt{\lambda - u_0(x)}} \, d\lambda.$$

Следовательно, число уединенных волн с амплитудами из интервала $(a, a + da)$ равно приблизительно $f(a) \, da$, где

$$f(a) = \frac{1}{8\pi} \oint \frac{dx}{\sqrt{|u_0| - a/2}}. \quad (17.54)$$

Этот результат впервые указал Карпман (Карпман [1]; см. также Карпман и Соколов [1]). Уединенные волны распределены в интервале $0 < a < 2u_m$, и их полное число подсчитывается по формуле

$$N = \int_0^{2u_m} f(a) \, da = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |u_0|^{1/2} \, dx,$$

которая согласуется с соотношением (17.52).

После первоначального взаимодействия каждая уединенная волна с амплитудой a движется со скоростью $2a$, и ее можно найти в точке

$$x = 2at \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

Таким образом, амплитуды распределяются по закону

$$a = \frac{x}{2t}, \quad 0 < \frac{x}{2t} < 2u_m. \quad (17.55)$$

Получается треугольное распределение, приведенное на рис. 17.1 и обсуждавшееся в § 16.16.

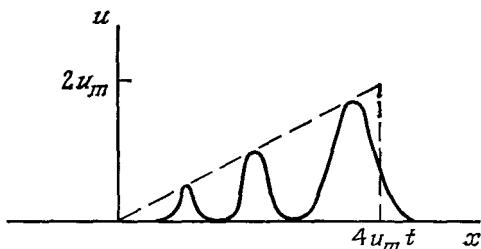


Рис. 17.1. Серия уединенных волн в решении уравнения Кортевега — де Фриза.

Число волн $k(x, t)$ в интервале $(x, x + dx)$ определяется из соотношения

$$kdx = f(a)da;$$

поэтому

$$k(x, t) = \frac{1}{2t} f\left(\frac{x}{2t}\right), \quad (17.56)$$

где функция f задана формулой (17.54). Это фиксирует произвольную функцию, входящую в соотношения (16.144).

17.6. Преобразование Миуры и уравнения сохранения

Построение метода нахождения точных решений уравнения Кортевега — де Фриза во многом стимулировалось существованием бесконечного числа уравнений сохранения. Одним из путей получения этих уравнений является преобразование Миуры, имеющее и самостоятельный интерес. Результат подстановки выражения

$$u = -\frac{\sigma\eta}{6} = v^2 + v_x \quad (17.57)$$

в уравнение Кортевега—де Фриза можно записать так:

$$\left(2v + \frac{\partial}{\partial x}\right) (v_t - 6v^2 v_x + v_{xxx}) = 0.$$

Следовательно, можно изучать также уравнение

$$v_t - 6v^2 v_x + v_{xxx} = 0, \quad (17.58)$$

связав его с уравнением Кортевега — де Фриза.

Модификация этого преобразования порождает бесконечное число законов сохранения. Подстановка

$$\sigma\eta = w + i\varepsilon w_x + \frac{1}{6} \varepsilon^2 w^2 \quad (17.59)$$

дает

$$\left(1 + i\varepsilon \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{3} \varepsilon^2 w^2\right) \left\{w_t + \left(w + \frac{1}{6} \varepsilon^2 w^2\right) w_x + w_{xxx}\right\} = 0.$$

Пусть функция w удовлетворяет уравнению

$$w_t + \left(w + \frac{1}{6} \varepsilon^2 w^2\right) w_x + w_{xxx} = 0.$$

Тогда имеем следующее простое уравнение сохранения для w :

$$w_t + \left(\frac{1}{2} w^2 + \frac{1}{18} \varepsilon^2 w^3 + w_{xx}\right)_x = 0. \quad (17.60)$$

Если теперь записать решение уравнения (17.59) относительно w в виде формального ряда по степеням ε :

$$w = \sum_0^\infty \varepsilon^n w_n \{\zeta\}, \quad \zeta = \sigma\eta,$$

то для w_n получаются рекуррентные формулы, в которые входят функция ζ и ее производные по x . Подставим это разложение в уравнение (17.60); тогда каждый коэффициент при ε^n ($n = 1, 2, \dots$) даст закон сохранения. Приведем несколько первых сохраняющихся плотностей:

$$\begin{aligned} \zeta, \quad \frac{1}{2} \zeta^2, \quad \frac{1}{3} \zeta^3 - \zeta_x^2, \quad \frac{1}{4} \zeta^4 - 3\zeta \zeta_x^2 + \frac{9}{5} \zeta_{xx}^2, \\ \frac{1}{5} \zeta^5 - 6\zeta^2 \zeta_x^2 + \frac{36}{5} \zeta \zeta_{xx}^2 - \frac{108}{35} \zeta_{xxx}^2. \end{aligned}$$

Существование бесконечного числа сохраняющихся величин

$$\int_{-\infty}^{\infty} w_n(\zeta) dx$$

определенно способствует уверенности в том, что решения можно найти в явном виде.

Кубическое уравнение Шредингера

17.7. Приложения кубического уравнения Шредингера

Связь уравнения

$$iu_t + u_{xx} + \nu |u|^2 u = 0$$

с приближенным описанием модулированных пучков в нелинейной оптике была объяснена в § 16.4. Здесь мы отметим его общее значение для зависящих от времени диспергирующих волн. Общее решение для линейной диспергирующей моды имеет вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{ikx - i\omega(k)t} dk, \quad (17.61)$$

причем равенство $\omega = \omega(k)$ представляет собой дисперсионное соотношение. Для модулированного волнового пакета с большей частью энергии, сосредоточенной в гармониках с волновыми числами, близкими к некоторому значению k_0 , функция $F(k)$ сконцентрирована около $k = k_0$, и интеграл (17.61) можно аппроксимировать выражением

$$\Phi = \int_{-\infty}^{\infty} F(k) \exp \left(ikx - \left\{ \omega_0 + (k - k_0) \omega'_0 + \frac{1}{2} (k - k_0)^2 \omega''_0 \right\} t \right) dk,$$

где $\omega_0 = \omega(k_0)$, $\omega'_0 = \omega'(k_0)$, . . . Это в свою очередь можно записать в виде

$$\Phi = \varphi \exp \{ i (k_0 x - \omega_0 t) \}, \quad (17.62)$$

где

$$\varphi = \int_{-\infty}^{\infty} F(k_0 + \kappa) \exp \left\{ i \kappa x - i \left(\kappa \omega'_0 + \frac{1}{2} \kappa^2 \omega''_0 \right) t \right\} d\kappa$$

и произведена подстановка $k = k_0 + \kappa$. Функция φ описывает модуляции в (17.62); она удовлетворяет уравнению

$$i (\varphi_t + \omega'_0 \varphi_x) + \frac{1}{2} \omega''_0 \varphi_{xx} = 0 \quad (17.63)$$

и соответствует дисперсионному соотношению

$$W = \kappa \omega'_0 + \frac{1}{2} \kappa^2 \omega''_0. \quad (17.64)$$

Уравнение для Φ соответствует исходному разложению

$$\omega = \omega_0 + (k - k_0) \omega'_0 + \frac{1}{2} (k - k_0)^2 \omega''_0,$$

т. е. имеет вид

$$i\Phi_t - \left(\omega_0 - k_0 \omega'_0 + \frac{1}{2} k_0^2 \omega''_0 \right) \Phi + i(\omega'_0 - k_0 \omega''_0) \Phi_x - \frac{1}{2} \omega''_0 \Phi_{xx} = 0.$$

Преобразование (17.62) исключает дополнительные члены.

Если это приближение к линейной дисперсии объединить с кубической нелинейностью, то получится

$$i(\varphi_t + \omega'_0 \varphi_x) + \frac{1}{2} \omega''_0 \varphi_{xx} + q|\varphi|^2 \varphi = 0. \quad (17.65)$$

Поскольку $\varphi = ae^{ikx - i\omega t}$ по-прежнему является решением, видим, что нелинейная поправка к дисперсионному соотношению модифицирует выражение (17.64) так:

$$W = \kappa \omega'_0 + \frac{1}{2} \kappa^2 \omega''_0 - qa^2.$$

Следовательно, устойчивость или соответственно неустойчивость модуляций в смысле § 14.2 и 15.3 устанавливаются следующим образом:

$q\omega''_0 < 0$: устойчивость,

$q\omega''_0 > 0$: неустойчивость.

Уравнение (17.65) можно привести к каноническому виду, сначала перейдя к системе отсчета, движущейся с линейной групповой скоростью ω'_0 (это позволит исключить член с φ_x), а затем перенормировав переменные. В результате мы получим уравнение

$$iu_t + u_{xx} + \nu |u|^2 u = 0, \quad (17.66)$$

в котором коэффициент ν имеет тот же знак, что и $q\omega''_0$.

17.8. Однородные волновые пакеты и уединенные волны

Как обычно, ищем решения в движущейся системе координат $X = x - Ut$, но теперь допускаем поправочный коэффициент, т. е. допускаем решения вида

$$u = e^{irx - ist} v(X), \quad X = x - Ut,$$

где r и s — постоянные. Это можно интерпретировать как некоторый произвол при выборе экспоненциального множителя в (17.62). Подстановкой получаем обыкновенное дифференциальное уравне-

ние для v :

$$v'' + i(2r - U)v' + (s - r^2)v + v|v|^2v = 0.$$

Положим теперь

$$r = \frac{U}{2}, \quad s = \frac{U^2}{4} - \alpha;$$

первое условие позволяет исключить член с v' . Теперь можно считать, что v вещественно и удовлетворяет уравнению

$$v'' - \alpha v + v v^3 = 0.$$

Это типичное уравнение для кноидальных волн. Интегрируя один раз, получаем уравнение

$$v'^2 = A + \alpha v^2 - \frac{\nu}{2} v^4,$$

которое решается в эллиптических функциях. В предельном случае уединенной волны имеем $\nu > 0$, $A = 0$, $\alpha > 0$ и

$$v = \left(\frac{2\alpha}{\nu} \right)^{1/2} \operatorname{sech} \alpha^{1/2} (x - Ut). \quad (17.67)$$

Это решение описывает волновой пакет u , аналогичный изображенному на рис. 15.2 и распространяющийся без искажения формы с постоянной скоростью.

Интересно, что величина $| \phi |^2$ пропорциональна sech^2 , т. е. той же функции, которая описывает уединенные волны для уравнения Кортевега — де Фриза. Важное различие, однако, состоит в том, что теперь амплитуда и скорость являются независимыми параметрами.

Следует особо отметить, что решения (17.67) возможны только при $\nu > 0$, т. е. в случае неустойчивости. Это опять указывает на то, что в результате воздействия малых модуляций неустойчивый волновой пакет переходит в серию уединенных волн. Такое заключение подтверждается анализом Захарова и Шабата, приведенным в следующем параграфе.

17.9. Обратная задача рассеяния

В одной из наиболее интересных работ, относящихся к этой области, Захаров и Шабат [1] показали, как, следуя Лаксу [1], можно применить обратную задачу рассеяния по аналогии с методом решения уравнения Кортевега — де Фриза. Этот метод годится для любого уравнения

$$u_t = Su,$$

которое можно представить в виде

$$\frac{\partial L}{\partial t} = i[L, A] = i(LA - AL), \quad (17.68)$$

где L и A — линейные дифференциальные операторы с коэффициентами, содержащими функцию $u(x, t)$, а $\partial L / \partial t$ отвечает дифференцированию u по t в выражении для L . Как только такое представление получено (весьма нетривиальный шаг), решение строится следующим образом.

Рассмотрим задачу на собственные значения

$$L\psi = \lambda\psi. \quad (17.69)$$

Дифференцирование по t дает

$$\begin{aligned} i\psi \frac{d\lambda}{dt} + i\lambda \frac{\partial\psi}{\partial t} &= iL\psi_t + i \frac{\partial L}{\partial t} \psi = \\ &= iL\psi_t - (LA - AL)\psi = \\ &= L(i\psi_t - A\psi) + \lambda A\psi. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$i\psi \frac{d\lambda}{dt} = (L - \lambda)(i\psi_t - A\psi).$$

Если в начальный момент функция ψ удовлетворяет уравнению $L\psi = \lambda\psi$ и ее эволюция во времени описывается уравнением

$$i\psi_t = A\psi, \quad (17.70)$$

то она продолжает удовлетворять уравнению $L\psi = \lambda\psi$ с тем же значением λ . Уравнение (17.69) связывает функцию $u(x, t)$ с задачей рассеяния, а уравнение (17.70) дает зависимость данных рассеяния от времени. Решение затем строится так же, как и выше. Уравнение (17.68) при этом является условием совместности уравнений (17.69) и (17.70).

Решающий шаг состоит в выделении оператора L , входящего в уравнение (17.68). Захаров и Шабат заметили (по-видимому, нужно было просчитать много вариантов), что матричные операторы

$$L = i \begin{bmatrix} 1+p & 0 \\ 0 & 1-p \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} + \begin{bmatrix} 0 & u^* \\ u & 0 \end{bmatrix}, \quad v = \frac{2}{1-p^2},$$

$$A = -p \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \begin{bmatrix} \frac{|u|^2}{1+p} & iu_x^* \\ -iu_x & \frac{-|u|^2}{1-p} \end{bmatrix}$$

осуществляют требуемое представление (17.68).

Начиная с этого места, их анализ аналогичен исследованию уравнения Кортевега — де Фриза, хотя существенное изменение вносится необходимостью рассмотрения обратной задачи рассеяния для уравнения (17.69), поскольку оператор L несамосопряженный. Была разработана соответствующая техника сингулярных интегральных уравнений, несколько отличающаяся от подхода Гельфанда — Левитана. Захаров и Шабат использовали эволюцию ψ , описываемую уравнением (17.70), для получения информации о поведении матрицы рассеяния, а затем по этой информации построили $u(x, t)$. Здесь также оказывается полезной альтернативная версия, основанная на уравнениях, аналогичных уравнениям (17.38) — (17.39).

Качественно результаты аналогичны результатам для уравнения Кортевега — де Фриза. Решения, описывающие взаимодействующие уединенные волны, получаются в явном виде и отвечают случаю, когда вклад дает только точечный спектр. Выражение для $|u|^2$ снова имеет вид

$$|u|^2 \propto \frac{d^2}{dx^2} \ln |P|,$$

где $|P|$ — определитель из экспонент, на этот раз связанный с оператором

$$i \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

Это решение опять подтверждает, что уединенные волны сохраняют свою структуру и выходят из области взаимодействия в своем первоначальном виде с возможными задержками, вызванными взаимодействием.

Решение задачи с начальными значениями находится так же, как и выше, и кажется ясным, что при больших значениях времени доминирует вклад точечного спектра. Это означает, что возмущения стремятся перейти в серию уединенных волн. Анализ ограничен решениями, для которых $|u| \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$, но кажется справедливым предположение, что серии уединенных волн являются конечным результатом развития волновых пакетов, неустойчивых по отношению к модуляциям.

Уравнение *Sin-Гордона*

Физические задачи, в которых встречается уравнение *Sin-Гордона*, были перечислены в § 14.1. Там же был описан класс решений ϕ , периодически осциллирующих около $\phi = 0$. Рассмотрим теперь более общие решения. В частности, поскольку ϕ — угловая переменная, решения, в которых ϕ возрастает за каждый цикл на 2π , являются физически приемлемыми. Так, спиральные волны,

для которых φ непрерывно возрастает, рассматриваются как периодические волновые пакеты. Предельный случай, т. е. оди-
ночная петля с φ , изменяющимся на 2π при изменении x от $-\infty$
до ∞ , является уединенной волной. Решения, описывающие взаи-
модействующие уединенные волны, обладают теми же самыми
свойствами сохранения, что и в предыдущих случаях, и топологи-
ческая интерпретация сохранения петель особенно привлекательна.

17.10. Периодические волновые пакеты и уединенные волны

Уравнение берется в нормированном виде

$$\varphi_{tt} - \varphi_{xx} + \sin \varphi = 0,$$

и для решений со стационарным профилем $\varphi = \Phi(X)$, $X = x -$
 $- Ut$ получаем, что

$$\frac{1}{2}(U^2 - 1)\Phi_X^2 + 2\sin^2 \frac{1}{2}\Phi = A,$$

где A — постоянная интегрирования, связанная с амплитудой.
Можно выделить следующие случаи.

1. $0 < A < 2$, $U^2 - 1 > 0$. Это периодические решения,
в которых Φ осциллирует около $\Phi = 0$ в интервале $-\Phi_0 < \Phi <$
 $< \Phi_0$, где

$$\Phi_0 = 2 \arcsin \left(\frac{A}{2} \right)^{1/2}.$$

2. $0 < A < 2$, $U^2 - 1 < 0$. Это периодические решения,
в которых Φ осциллирует около $\Phi = \pi$ в интервале

$$\pi - \Phi_0 < \Phi < \pi + \Phi_0.$$

3. $A < 0$, $U^2 - 1 < 0$. Это спиральные волны с

$$\Phi_X = \pm \left\{ \frac{2}{1-U^2} \left(|A| + 2\sin^2 \frac{1}{2}\Phi \right) \right\}^{1/2};$$

Φ монотонно возрастает или убывает.

4. $A > 2$, $U^2 - 1 > 0$. Это также спиральные волны с

$$\Phi_X = \pm \left\{ \frac{2}{U^2-1} \left(A - 2\sin^2 \frac{1}{2}\Phi \right) \right\}^{1/2}.$$

5. Предельный случай $A = 0$, $U^2 - 1 < 0$. Решения имеют вид

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\Phi}{4} \right) = \pm \exp \{ \pm (1-U^2)^{-1/2} (X - X_0) \}.$$

Они описывают одиночные петли величиной в 2π . Когда в обоих случаях взят знак плюс, получается положительная петля с $\Phi = 0$ при $x = -\infty$ и $\Phi = 2\pi$ при $x = +\infty$; когда в обоих случаях взят знак минус, по-прежнему получается положительная петля, но с $\Phi = -2\pi$ при $x = -\infty$ и $\Phi = 0$ при $x = +\infty$. Противоположные знаки дают отрицательные петли.

6. *Предельный случай* $A = 2$, $U^2 - 1 > 0$. Решение имеет вид

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\Phi + \pi}{4} \right) = \exp \{ \pm (U^2 - 1)^{-1/2} (X - X_0) \}$$

и описывает петлю, заключенную между $\Phi = -\pi$ и $\Phi = \pi$.

Соображения устойчивости из § 14.2 и 15.3 показывают, что периодические волны, описанные выше в случае 1, неустойчивы по отношению к модуляциям. Эти соображения можно обобщить на другие типы решений и показать, что случаи 1 и 2 неустойчивы, тогда как спиральные волны 3 и 4 устойчивы.

Следует помнить, что эти соображения устойчивости применимы только к относительно длительным модуляциям. Они не позволяют полностью судить об устойчивости, а также не применимы к предельным случаям 5 и 6. Следует ожидать, что случай 6 неустойчив, поскольку $\Phi = \pm \pi$ на бесконечности. Например, в маятниковой модели Скотта это соответствует маятнику в верхнем вертикальном положении. Обратимся теперь к уединенным волнам (случай 5).

17.11. Взаимодействие уединенных волн

Перринг и Скирм [1], по-видимому, догадались, что их численное решение для двух взаимодействующих уединенных волн может быть представлено выражением

$$\psi = \operatorname{tg} \frac{\Phi}{4} = U \frac{\operatorname{sh} x (1 - U^2)^{-1/2}}{\operatorname{ch} Ut (1 - U^2)^{-1/2}}, \quad (17.71)$$

а затем установили, что это точное решение! Для того чтобы убедиться в том, что формула (17.71) описывает взаимодействие двух уединенных волн, заметим, что при $t \rightarrow \pm \infty$ она дает следующую асимптотику:

$$\begin{aligned} t \rightarrow -\infty: \quad \psi &\sim U \exp \left(\frac{x + Ut}{\sqrt{1 - U^2}} \right) - U \exp \left(-\frac{x - Ut}{\sqrt{1 - U^2}} \right), \\ t \rightarrow +\infty: \quad \psi &\sim -U \exp \left(-\frac{x + Ut}{\sqrt{1 - U^2}} \right) + U \exp \left(\frac{x - Ut}{\sqrt{1 - U^2}} \right). \end{aligned}$$

Каждое из этих выражений описывает уединенные волны, движущиеся в противоположных направлениях. Положительная петля движется со скоростью U , приходит из $x = -\infty$ и остается положительной после взаимодействия. Множитель U перед экспонентами можно включить в экспоненты как сдвиги по x . Положительная петля, приходящая из $-\infty$, в результате взаимодействия сдвигается на

$$2\sqrt{1-U^2} \ln(1/U).$$

Выражение, содержащее $\psi = \operatorname{tg}(\phi/4)$, наводит на мысль, что преобразование исходного уравнения в уравнение для ψ может оказаться полезным в общем случае. Уравнение, которому удовлетворяет ψ , а именно

$$(1 + \psi^2)(\psi_{tt} - \psi_{xx} + \psi) - 2\psi(\psi_t^2 - \psi_x^2 + \psi^2) = 0, \quad (17.72)$$

обладает более симметричной структурой и вводит наиболее естественный для данной задачи линейный оператор

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 1. \quad (17.73)$$

Это в некоторой степени напоминает роль, которую играет уравнение (17.11) для функции F в обсуждении уравнения Кортевега — де Фриза. Решения уравнения (17.72), соответствующие уединенным волнам, имеют вид

$$\psi = \pm \exp\left(\pm \frac{x - Ut}{\sqrt{1 - U^2}}\right), \quad (17.74)$$

так что данное преобразование снова согласуется с грубым рабочим правилом: надо найти замену переменных, которая переводит уединенные волны в экспоненты, удовлетворяющие уравнению с линейным оператором (17.73).

Решения Перринга — Скирма можно найти с помощью разделения переменных, т. е. в виде

$$\psi = f(x)g(t),$$

хотя уравнение для ψ и нелинейно. Уравнение удовлетворяется при условии, что

$$\begin{aligned} f'^2 &= \mu f^4 + (1 + \lambda)f^2 - \nu, \\ g'^2 &= \nu g^4 + \lambda g^2 - \mu, \end{aligned}$$

где λ , μ и ν — постоянные. Эти уравнения имеют решения в эллиптических функциях, для которых решения Перринга — Скирма являются частными случаями.

Однако более содержателен подход к взаимодействию уединенных волн, развитый Дж. Лэмбом [1, 2] и использующий преобразования Беклунда. Этот подход не связан с уравнением (17.72).

17.12. Преобразования Беклунда

Преобразования Беклунда первоначально были введены как обобщение контактных преобразований и связаны, в частности, с изучением геометрии поверхностей. Как было указано выше (§ 14.1), уравнение Син-Гордона получается при описании поверхностей с гауссовой кривизной, равной -1 . Преобразования Беклунда и их применения описаны в книге Форсайта [1, т. VI, гл. 21]. При приложении этих преобразований к уравнению Син-Гордона последнее удобно записать в канонической форме

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi \partial \eta} = \sin \varphi; \quad \xi = \frac{x-t}{2}, \quad \eta = \frac{x+t}{2}. \quad (17.75)$$

В общем случае преобразование Беклунда для уравнения второго порядка для $\varphi(\xi, \eta)$ имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi'_\xi &= P(\varphi', \varphi, \varphi_\xi, \varphi_\eta, \xi, \eta), \\ \varphi'_\eta &= Q(\varphi', \varphi, \varphi_\xi, \varphi_\eta, \xi, \eta). \end{aligned}$$

Условие совместности этих двух выражений приводит к новому дифференциальному уравнению для $\varphi'(\xi, \eta)$. Идея, по-видимому, состоит в описании класса эквивалентных уравнений. Например, сведение уравнения Бюргерса

$$\varphi_\eta + \varphi \varphi_\xi - \nu \varphi_{\xi\xi} = 0$$

к уравнению теплопроводности

$$\varphi'_\eta - \nu \varphi'_{\xi\xi} = 0$$

можно записать как преобразование Беклунда

$$\varphi'_\xi = -\frac{\varphi \varphi'}{2\nu}, \quad \varphi'_\eta = -(2\nu \varphi_\xi - \varphi^2) \frac{\varphi'}{4\nu}.$$

Однако в общем случае надежда свести исходное уравнение к линейному, по-видимому, не оправдывается. Но другой путь — найти уравнения, которые можно отобразить в себя, так что любое известное решение для φ (даже тривиальное) дает новое решение φ' . Задача определения преобразований, переводящих уравнение (17.75) в себя, ставится Форсайтом со ссылкой на Бианки и Дарбу. Легко показать, что соответствующее преобразование Беклунда имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi'}{\partial \xi} &= \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + 2\lambda \sin \frac{\varphi' + \varphi}{2}, \\ \frac{\partial \varphi'}{\partial \eta} &= -\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + \frac{2}{\lambda} \sin \frac{\varphi' - \varphi}{2}, \end{aligned} \quad (17.76)$$

где λ — произвольный параметр. Заметим, что они соответственно дают

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \eta} \varphi'_\xi &= \varphi_{\xi\eta} + \lambda (\varphi'_\eta + \varphi_\eta) \cos \frac{\varphi' + \varphi}{2} = \\ &= \varphi_{\xi\eta} + 2 \sin \frac{\varphi' - \varphi}{2} \cos \frac{\varphi' + \varphi}{2}, \\ \frac{\partial}{\partial \xi} \varphi'_\eta &= -\varphi_{\eta\xi} + \frac{1}{\lambda} (\varphi'_\xi - \varphi_\xi) \cos \frac{\varphi' - \varphi}{2} = \\ &= -\varphi_{\eta\xi} + 2 \sin \frac{\varphi' + \varphi}{2} \cos \frac{\varphi' - \varphi}{2}.\end{aligned}$$

Эти два выражения для $\varphi'_{\xi\eta}$ должны быть равны, и, следовательно, условием совместности является равенство

$$\varphi_{\xi\eta} = \sin \varphi.$$

Складывая эти выражения, находим, что

$$\varphi'_{\xi\eta} = \sin \varphi'.$$

Метод Дж. Лэмба состоит в последовательном генерировании новых решений при помощи соотношений (17.76).

Прежде всего, поскольку $\varphi_0 = 0$ является решением, другое решение φ_1 можно найти из соотношений

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta} = 2\lambda \sin \frac{\varphi_1}{2}, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi} = \frac{2}{\lambda} \sin \frac{\varphi_1}{2}.$$

Легко проверить, что это соответствует уединенной волне

$$\text{tg } \frac{\varphi_1}{4} = C \exp \left(\lambda \eta + \frac{\xi}{\lambda} \right) = C \exp \left(\frac{x - Ut}{\sqrt{1 - U^2}} \right),$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{1 - U}{1 + U}}.$$

Далее, если в (17.76) функцию φ положить равной φ_1 , то окажется, что решение $\varphi' = \varphi_2$ совпадает с результатом Перринга — Скирма для двух взаимодействующих уединенных волн. В общем случае решение φ_{n-1} для $n - 1$ уединенных волн генерирует решение φ_n для n уединенных волн. В терминах $\psi = \text{tg } (\varphi/4)$, $\psi' = \text{tg } (\varphi'/4)$ преобразование (17.76) записывается так:

$$\begin{aligned}\psi'_\xi &= (1 + \psi^2)^{-1} \{ (1 + \psi'^2) \psi_\xi + \lambda (1 - \psi^2) \psi' + \lambda \psi (1 - \psi'^2) \}, \\ \psi'_\eta &= (1 + \psi^2)^{-1} \left\{ -(1 + \psi'^2) \psi_\eta + \frac{1}{\lambda} (1 - \psi^2) \psi' - \frac{1}{\lambda} \psi (1 - \psi'^2) \right\}.\end{aligned}$$

Каждое из этих уравнений дает уравнение Риккати для ψ' ; кроме того, ψ'^2 можно исключить и получить для ψ' линейное уравнение в частных производных первого порядка. Решение последнего уравнения в принципе можно найти всегда, но выражения для φ_n становятся все более и более сложными.

17.13. Обратная задача рассеяния для уравнения Sin-Гордона

Недавно Дж. Лэмб [3], а также Абловиц, Кауц, Ньюэлл и Сегюр [1] ¹⁾ показали, как можно использовать обратную задачу рассеяния. Ключевой шаг состоит в разбиении задачи на уравнение рассеяния, содержащее искомое решение φ в качестве коэффициентов, и эволюционное уравнение для собственных функций. При записи уравнения Sin-Гордона в канонической форме

$$\varphi_{xt} = \sin \varphi$$

(мы вернулись к x и t , чтобы подчеркнуть аналогию с предыдущими случаями) соответствующие уравнения рассеяния имеют вид

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} + i\lambda v_1 = -\frac{1}{2} \varphi_x(x, t) v_2,$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial x} - i\lambda v_2 = \frac{1}{2} \varphi_x(x, t) v_1,$$

а эволюционные уравнения для векторной собственной функции (v_1, v_2) — вид

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} = \frac{i}{4\lambda} (v_1 \cos \varphi + v_2 \sin \varphi),$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} = \frac{i}{4\lambda} (v_1 \sin \varphi - v_2 \cos \varphi).$$

Результаты Захарова и Шабата позволяют теперь восстановить $\varphi(x, t)$. Здесь также оказывается полезной альтернативная версия, связанная с уравнениями (17.38) — (17.39).

Цепочка Тоды

Системы точечных масс с нелинейными взаимодействиями между соседними точками можно рассматривать как модели колебаний решеток в кристаллах, причем физический интерес представляют вопросы распределения энергии между различными модами колебаний, тепловое расширение при возбуждении и т. п. Такие системы можно рассматривать как пространственно дискретные аналоги непрерывных систем, изучаемых в этой книге.

Одномерная цепочка, описываемая уравнением (17.7), приводит к простейшей модели распространения волн. Указанное уравнение записано применительно к массам и пружинам, но допу-

¹⁾ См. также Захаров В. Е., Тахтаджан Л. А., Фаддеев Л. Д., Полное описание решений «sin-Gordon» уравнения, *ДАН*, 219 (1974), вып. 6. — *Прим. ред.*

скает и другие интерпретации; можно считать, например, что оно описывает распространение волн в линии передачи с отводами, исследованное Хиротой и Судзуки [1, 2]. Эти авторы провели также эксперименты, подтверждающие предсказания теории о наличии уединенных волн и их взаимодействиях.

В линеаризованном пределе $f(r) = -\gamma r$ (17.7) имеет вид

$$m\ddot{r}_n = \gamma (r_{n+1} + r_{n-1} - 2r_n).$$

Общеизвестно решение, описывающее бегущую волну:

$$r_n = a \cos \theta, \quad \theta = \omega t - pn.$$

Эта функция является решением, так как подстановка дает

$$-\frac{m\omega^2}{\gamma} \cos \theta = \cos(\theta - p) + \cos(\theta + p) - 2 \cos \theta \quad (17.77)$$

и правая часть оказывается пропорциональной $\cos \theta$, в силу формул для суммы и разности тригонометрических функций. Имеем «дисперсионное соотношение»

$$\frac{m\omega^2}{\gamma} = 2(1 - \cos p) = 4 \sin^2 \frac{p}{2}. \quad (17.78)$$

Параметр p аналогичен волновому числу в непрерывных задачах.

Для малых амплитуд a можно рассматривать разложения типа Стокса

$$r_n = a \cos \theta + a_2 \cos 2\theta + \dots;$$

они дают нелинейные поправки к (17.78), и так же, как в непрерывном случае, можно построить теорию модуляций (Лоуэлл [1]). Однако получение существенно нелинейных решений, и в частности уединенных волн, является гораздо более трудной задачей, чем в непрерывном случае. Можно ожидать, что они существуют, но были бы желательны конкретные примеры. Трудность состоит в том, что требуются функции специального вида и формулы суммирования для них, которые позволили бы обращаться с правой частью так же, как и в уравнении (17.77). Тода [1, 2] нашел такие решения для

$$f(r) = -\alpha(1 - e^{-\beta r}). \quad (17.79)$$

17.14. Решение Тоды для экспоненциальной цепочки

Разностное уравнение (17.7) удобнее переписать в эквивалентной форме, введя $\dot{s}_n = f(r_n)$. Вначале мы имеем систему

$$\begin{aligned} \dot{s}_n &= f(r_n), \\ m\dot{r}_n &= 2s_n - s_{n+1} - s_{n-1}. \end{aligned} \quad (17.80)$$

В рассматриваемом случае, в силу (17.79),

$$\ddot{s}_n = f'(r_n) \dot{r}_n = -\alpha \beta e^{-\beta r_n} \dot{r}_n = -\beta (\alpha + \dot{s}_n) \dot{r}_n.$$

Следовательно, уравнения (17.80) можно объединить в одно уравнение:

$$\frac{m}{\beta} \frac{\ddot{s}_n}{\alpha + \dot{s}_n} = s_{n+1} + s_{n-1} - 2s_n. \quad (17.81)$$

Для стационарной бегущей волны

$$s_n = S(\theta), \quad \theta = \omega t - pn,$$

функция $S(\theta)$ должна удовлетворять обыкновенному дифференциальному уравнению с разностным оператором

$$\frac{m\omega^2}{\beta} \frac{S''}{\alpha + \omega S'} = S(\theta + p) + S(\theta - p) - 2S(\theta). \quad (17.82)$$

Следуя Тоде, отметим теперь, что

$$\operatorname{dn}^2(\theta + p) - \operatorname{dn}^2(\theta - p) = -2k^2 \frac{d}{dp} \left(\frac{\operatorname{sn} \theta \operatorname{cn} \theta \operatorname{dn} \theta \operatorname{sn}^2 p}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 \theta \operatorname{sn}^2 p} \right),$$

где sn , cn , dn — эллиптические функции Якоби, а k — модуль этих функций. Положив

$$E(\xi) = \int_0^\xi \operatorname{dn}^2 z \, dz,$$

после интегрирования по p получим

$$E(\theta + p) + E(\theta - p) - 2E(\theta) = -2k^2 \frac{\operatorname{sn} \theta \operatorname{cn} \theta \operatorname{dn} \theta \operatorname{sn}^2 p}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 \theta \operatorname{sn}^2 p}. \quad (17.83)$$

Далее,

$$E'(\theta) = \operatorname{dn}^2 \theta = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2 \theta,$$

$$E''(\theta) = -2k^2 \operatorname{sn} \theta \operatorname{cn} \theta \operatorname{dn} \theta.$$

Следовательно, правую часть равенства (17.83) можно записать как

$$\frac{E''(\theta)}{q + E'(\theta)}, \quad q = \frac{1}{\operatorname{sn}^2 p} - 1.$$

Видим, что уравнение для $E(\theta)$ по существу совпадает с (17.82). Функция $E(\theta)$ неперериодическая по θ , но связанная с ней дзета-функция Якоби

$$Z(\theta) = E(\theta) - \theta \frac{E(K)}{K} \quad (17.84)$$

имеет период $2K$, а переход от $E(\theta)$ к $Z(\theta)$ изменяет уравнение тривиальным образом. Решение для s_n можно записать в виде

$$s_n = S(\theta) = bZ(2K\theta), \quad \theta = \omega t - pn, \quad (17.85)$$

где

$$b = \left(\frac{m\alpha}{\beta} \right)^{1/2} \left(\frac{1}{\operatorname{sn}^2 2Kp} - 1 + \frac{E}{K} \right)^{-1/2}, \quad (17.86)$$

$$\omega = \frac{1}{2K} \left(\frac{\alpha\beta}{m} \right)^{1/2} \left(\frac{1}{\operatorname{sn}^2 2Kp} - 1 + \frac{E}{K} \right)^{-1/2}. \quad (17.87)$$

Выражение для r_n находится из равенства

$$-\alpha(1 - e^{-\beta r_n}) = \dot{s}_n = 2K\omega b \left(\operatorname{dn}^2 2K\theta - \frac{E}{K} \right). \quad (17.88)$$

Функции $Z(\xi)$ и $\operatorname{dn}^2 \xi$ имеют период $2K$; здесь фаза была нормирована таким образом, что один период соответствует возрастанию θ на единицу, а не на 2π , как в линейной теории. Амплитуда $Z(\xi)$ является функцией от k , так что амплитуда s_n есть функция $A(k, p)$. Учитывая также равенство (17.87), получаем дисперсионное соотношение между ω , p , A , записанное в параметрической форме

$$A = A(k, p), \quad \omega = \omega(k, p).$$

В линейном пределе $k \rightarrow 0$ имеем

$$\operatorname{sn}^2 \xi \sim \sin^2 \xi, \quad K, E \sim \frac{\pi}{2},$$

$$\operatorname{dn}^2 \xi \sim 1 - k^2 \sin^2 \xi, \quad \frac{E}{K} \sim 1 - \frac{k^2}{2},$$

$$Z(\xi) \sim \frac{k^2}{4} \sin 2\xi.$$

Отсюда

$$s_n \sim \frac{bk^2}{4} \sin 2\pi\theta, \quad \theta = \omega t - pn,$$

$$b \sim \left(\frac{m\alpha}{\beta} \right)^{1/2} \sin \pi p, \quad \omega \sim \frac{1}{\pi} \left(\frac{\alpha\beta}{m} \right)^{1/2} \sin \pi p$$

и

$$-\alpha(1 - e^{-\beta r_n}) \sim -\gamma r_n \sim \frac{\pi\omega bk^2}{2} \cos 2\pi\theta.$$

Эти выражения можно переписать в следующем виде:

$$s_n \sim A \sin 2\pi(\omega t - pn), \quad -\gamma r_n \sim 2\pi\omega A \cos 2\pi(\omega t - pn),$$

$$\frac{m(2\pi\omega)^2}{\gamma} \sim 4 \sin^2 \pi p, \quad k^2 \sim 4 \left(\frac{\beta}{m\alpha} \right)^{1/2} \frac{A}{\sin \pi p} \ll 1.$$

С точностью до несущественной нормировки эти результаты воспроизводят линейное решение.

Если $k \rightarrow 1$, то $K \rightarrow \infty$, и следует рассматривать случай конечных пределов

$$2K\omega \rightarrow \Omega, \quad 2Kp \rightarrow P.$$

Эллиптические функции имеют следующие пределы:

$$\operatorname{sn} \zeta \rightarrow \operatorname{th} \zeta, \quad \operatorname{dn} \zeta \rightarrow \operatorname{sech} \zeta, \quad Z(\zeta) \rightarrow \operatorname{th} \zeta,$$

так что соотношения (17.86)–(17.87) дают

$$b \rightarrow \left(\frac{m\alpha}{\beta} \right)^{1/2} \operatorname{sh} P, \quad \Omega = \left(\frac{\alpha\beta}{m} \right)^{1/2} \operatorname{sh} P.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} s_n &\sim \frac{m\Omega}{\beta} \operatorname{th} (\Omega t - Pn), \\ -\alpha(1 - \beta e^{-r_n}) &\sim \frac{m\Omega^2}{\beta} \operatorname{sech}^2 (\Omega t - Pn). \end{aligned}$$

Таким образом, мы получили уединенные волны.

Основываясь на различных приближенных выражениях и частных случаях, Toda развивает убедительные доводы в пользу того, что эти уединенные волны взаимодействуют так же, как и в непрерывных случаях, сохраняя после взаимодействия первоначальную форму¹⁾.

Уравнение Борна — Инфельда

Уравнение Борна — Инфельда

$$(1 - \varphi_t^2)\varphi_{xx} + 2\varphi_x\varphi_t\varphi_{xt} - (1 + \varphi_x^2)\varphi_{tt} = 0$$

имеет решения типа уединенных волн, но они существенно отличаются от рассмотренных выше решений. Легко проверить, что

$$\varphi = \Phi(x - t) \quad \text{и} \quad \varphi = \Phi(x + t)$$

являются точными решениями этого уравнения для любой функции Φ . В частности, функцию Φ можно выбрать в виде одиночного горба и получить решение, похожее на уединенную волну, но оно не будет обладать какой-либо естественной структурой. Уравнение является гиперболическим в области

$$1 + \varphi_x^2 - \varphi_t^2 > 0$$

¹⁾ Впоследствии на основе метода обратной задачи рассеяния была построена точная теория. Это было сделано независимо в следующих работах: Манаков С. В., О полной интегрируемости и стохастизации в дискретных динамических системах, *ЖЭТФ*, 67 (1974), № 2, 543–555; Flashka Н., On the Toda lattice II, *Progr. Theor. Phys.*, 51 (1974), 703–716.— *Прим. ред.*

и, возможно, в какой-то мере относится к части I книги. Заметим, что полученные здесь уединенные волны имеют постоянные характеристические скорости ± 1 и не происходит обычного опрокидывания, характерного для нелинейных гиперболических волн.

17.15. Взаимодействующие волны

Решения Барбашова и Черникова [1] можно естественным образом получить при помощи преобразования годографа, хотя простота преобразованных уравнений неожиданна. Прежде всего введем новые переменные

$$\xi = x - t, \quad \eta = x + t, \quad u = \varphi_\xi, \quad v = \varphi_\eta$$

и получим эквивалентную систему

$$\begin{aligned} u_\eta - v_\xi &= 0, \\ v^2 u_\xi - (1 + 2uv) u_\eta + u^2 v_\eta &= 0. \end{aligned} \quad (17.89)$$

Меняем роли зависимых и независимых переменных, что дает

$$\begin{aligned} \xi_v - \eta_u &= 0, \\ v^2 \eta_v + (1 + 2uv) \xi_v + u^2 \xi_u &= 0, \end{aligned} \quad (17.90)$$

или одно эквивалентное уравнение

$$u^2 \xi_{uu} + (1 + 2uv) \xi_{uv} + v^2 \xi_{vv} + 2u \xi_u + 2v \xi_v = 0. \quad (17.91)$$

Предполагая, что искомые решения находятся в гиперболической области, теперь естественно перейти к нахождению характеристик линейной системы (17.90), или, что то же самое, линейного уравнения (17.91). Они являются интегральными кривыми дифференциального уравнения

$$u^2 dv^2 - (1 + 2uv) du dv + v^2 du^2 = 0$$

и, как оказывается, имеют вид $r = \text{const}$, $s = \text{const}$, где

$$r = \frac{\sqrt{1+4uv}-1}{2v}, \quad s = \frac{\sqrt{1+4uv}-1}{2u}. \quad (17.92)$$

Если вместо u , v ввести эти новые переменные r , s , то уравнения (17.90) примут следующий вид:

$$\begin{aligned} r^2 \xi_r + \eta_r &= 0, \\ \xi_s + s^2 \eta_s &= 0. \end{aligned} \quad (17.93)$$

Удивительно, что, исключая переменную η для того, чтобы перейти к уравнению, аналогичному (17.91), мы получаем просто

$$\xi_{rs} = 0. \quad (17.94)$$

А ведь преобразование годографа гарантирует лишь линейность уравнения и могло бы оказаться бесполезным для практических целей.

Общее решение можно записать в виде

$$x - t = \xi = F(r) - \int s^2 G'(s) ds, \quad (17.95)$$

$$x + t = \eta = G(s) - \int r^2 F'(r) dr, \quad (17.96)$$

где $F(r)$, $G(s)$ — произвольные функции. Поскольку

$$\varphi_r = u \xi_r + v \eta_r = \frac{r}{1-rs} \xi_r + \frac{s}{1-rs} \eta_r = r F'(r)$$

и аналогично

$$\varphi_s = s G'(s),$$

соответствующее выражение для φ таково:

$$\varphi = \int r F'(r) dr + \int s G'(s) ds. \quad (17.97)$$

Наконец, целесообразно произвести замену

$$F(r) = \rho, \quad G(s) = \sigma, \quad r = \Phi'_1(\rho), \quad s = \Phi'_2(\sigma)$$

и записать решение следующим образом:

$$\varphi = \Phi_1(\rho) + \Phi_2(\sigma), \quad (17.98)$$

$$x - t = \rho - \int_{-\infty}^{\sigma} \Phi_2'^2(\sigma) d\sigma, \quad (17.99)$$

$$x + t = \sigma + \int_{\rho}^{\infty} \Phi_1'^2(\rho) d\rho. \quad (17.100)$$

Если функции $\Phi_1(\rho)$ и $\Phi_2(\sigma)$ локализованы, т. е. отличны от нуля, например, лишь в интервалах $-1 < \rho < 0$, $0 < \sigma < 1$ соответственно, то

$$\varphi = \Phi_1(x - t) + \Phi_2(x + t) \quad \text{при } t < 0.$$

Волна Φ_1 приходит из $x = -\infty$, а волна Φ_2 — из $x = +\infty$. Когда $t \rightarrow +\infty$, решение можно записать в виде

$$\varphi = \Phi_1 \left\{ x - t + \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_2'^2(\sigma) d\sigma \right\} + \Phi_2 \left\{ x + t - \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_1'^2(\rho) d\rho \right\}. \quad (17.101)$$

Каждая волна сместилась в направлении, противоположном направлению ее распространения, на величину

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_i'^2(\tau) d\tau.$$

В этом отношении по своему конечному результату взаимодействие подобно остальным примерам взаимодействия уединенных волн. Но во всех остальных отношениях представляется, что решения уравнения Борна — Инфельда (а также само это уравнение), по-видимому, относятся к какому-то иному классу.

Еще одно замечание о решении, заданном формулами (17.98) — (17.100). Отображение из (x, t) -плоскости в (ρ, σ) -плоскость в процессе взаимодействия волн может приобрести особенность, хотя из (17.101) и следует, что после взаимодействия решение снова становится однозначным. Это можно интерпретировать как формирование ударной волны и связать с тем фактом, что в процессе взаимодействия характеристические скорости отклоняются от значений ± 1 и могут появиться огибающие характеристик. В таких случаях потребуется модифицировать последующее поведение, и выражение (17.101) в том виде, в котором оно записано, станет неприменимым. Однако опрокидывание возможно лишь в случае достаточно больших амплитуд, и существует класс решений, для которых оно не происходит.

В этом конкретном примере для преобразованного уравнения (17.94) допустима линейная суперпозиция, что делает очевидным сохранение формы волны. Следует ожидать, что во всех случаях сохранение структуры можно проследить до линейной суперпозиции в некотором преобразованном пространстве. Но решающими являются характер отображения и соответствующие линейные решения. Решение, описывающее слияние ударных волн в § 4.7, соответствует суперпозиции решений линейного уравнения теплопроводности. Но, поскольку последние решения имеют экспоненциальную форму и не локализованы, ударные волны объединяются в новую ударную волну, а не проходят одна сквозь другую.

Завершая эту главу, хотелось бы еще раз отметить замечательную изобретательность различных исследователей, которым мы обязаны достижениями последних лет. Полученные результаты в огромной степени способствовали изучению нелинейных волн и нелинейных процессов в целом. Различные подходы уже внесли ценнейший вклад в арсенал «математических методов», но главные открытия, несомненно, еще впереди. Немаловажный урок состоит в том, что точные решения все еще окружают нас со всех сторон и не всегда следует сразу устремляться на поиски малого ϵ .

Список литературы

Абботт (Abbott M. R.)

- [1] A theory of the propagation of bores in channels and rivers, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 52 (1956), 344—362.

Абловиц (Ablowitz M. J.)

- [1] Applications of slowly varying nonlinear dispersive wave theories, *Studies Appl. Math.*, 50 (1971), 329—344.

Абловиц, Бенни (Ablowitz M. J., Benney D. J.)

- [1] The evolution of multiphase modes for nonlinear dispersive waves, *Studies Appl. Math.*, 49 (1970), 225—238.

Абловиц, Кауп, Ньюэлл, Сегур (Ablowitz M. J., Kaup D. J., Newell A. C., Segur H.)

- [1] Method for solving the Sine-Gordon equation, *Phys. Rev. Lett.*, 30 (1973), 1262—1264.

Ахманов С. А., Сухоруков А. П., Хохлов Р. В.

- [1] О самофокусировке и самоканализации интенсивных световых пучков в нелинейной среде, *ЖЭТФ*, 50 (1966), 1537—1549.

Баланис (Balanis G. N.)

- [1] The plasma inverse problem, *J. Math. Phys.*, 13 (1972), 1001—1005.

Барбашов Б. М., Черников Н. А.

- [1] Решение и квантование нелинейной двумерной модели типа поля Борна — Инфельда, *ЖЭТФ*, 50 (1966), 1296—1308.

Бароне, Эспозито, Маджи, Скотт (Barone A., Esposito F., Magee C. J., Scott A. C.)

- [1] Theory and applications of the Sine-Gordon equation, *Rivista del Nuovo Cimento* (2), 1 (1971), 227—267.

Барсильон (Barcilon V.)

- [1] Axisymmetric inertial oscillations of a rotating ring of fluid, *Mathematika*, 15 (1968), 93—102.

Батлер (Butler D. S.)

- [1] Converging spherical and cylindrical shocks, Report No. 54/54 Armament Research and Development Establishment, Ministry of Supply, Fort Halstead, Kent, 1954.
[2] Symposium on blast and shock waves, Armament Research and Development Establishment, Ministry of Supply, Fort Halstead, Kent 1955.

Бейтмен (Bateman H.)

- [1] Some recent researches on the motion of fluids, *Monthly Weather Review*, 43 (1915), 163—170.

Бенджамен (Benjamin T. B.)

- [1] Instability of periodic wavetrains in nonlinear dispersive systems, *Proc. Roy. Soc. A*, 299 (1967), 59—75; русский перевод: Бенджамен Т. Б., Неустойчивость периодических цугов волн в нелинейных системах с дисперсией, сб. «Нелинейная теория распространения волн», М., «Мир», 1970, 83—104.
[2] Upstream influence, *J. Fluid Mech.*, 40 (1970), 49—79.

- Бенджамен, Бона, Махони (Benjamin T. B., Bona J. L., Mahony J. J.)
[1] Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems, *Phil. Trans. Roy. Soc. A*, **272** (1972), 47—78.
- Бенджамен, Лайтхилл (Benjamin T. B., Lighthill M. J.)
[1] On cnoidal waves and bores, *Proc. Roy. Soc. A*, **224** (1954), 448—460.
- Борн, Инфельд (Born M., Infeld L.)
[1] Foundations of a new field theory, *Proc. Roy. Soc. A*, **144** (1934), 425—451.
- Бриссон, Гросс (Bryson A. E., Gross R. W. F.)
[1] Diffraction of strong shocks by cones, cylinders and spheres, *J. Fluid Mech.*, **10** (1961), 1—16.
- Бродерик (Broderick J. B.)
[1] Supersonic flow round pointed bodies of revolution, *Q. J. Mech. Appl. Math.*, **2** (1949), 98—120.
- Буссинеск (Boussinesq J.)
[1] Théorie de l'intumescence liquide appelée onde solitaire ou de translation se propageant dans un canal rectangulaire, *Comptes Rendus*, **72** (1871), 755—759.
- Бургерс (Burgers J. M.)
[1] A mathematical model illustrating the theory of turbulence, *Adv. Appl. Mech.*, **1** (1948), 171—199; русский перевод: Бургерс И. М., Об одной математической модели, иллюстрирующей теорию турбулентности, сб. «Проблемы механики», М., ИЛ, 1955, 422—445.
- Вертман (Weertman J.)
[1] Union géodesique and géophysique internationale, association internationale d'hydrologie scientifique, Symposium de Chamonix, Sept. 1958, pp. 162—168.
- Ву (Wu T. T.)
[1] A note on the stability condition for certain wave propagation problems, *Comm. Pure Appl. Math.*, **14** (1961), 745—747.
- Гарднер, Грин, Крускал, Мнур (Gardner C. S., Greene J. M., Kruskal M. D., Miura R. M.)
[1] Method for solving the Korteweg-de Vries equation, *Phys. Rev. Lett.*, **19** (1967), 1095—1097.
- Гельфанд И. М., Левитан Б. М.
[1] Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции, *Изв. АН СССР, сер. матем.*, **15** (1951), 309—360.
- Гельфанд И. М., Фомин С. В.
[1] Вариационное исчисление, М., «Наука», 1969.
- Гольдштейн (Goldstein S.)
[1] On the mathematics of exchange processes in fixed columns. Parts I, II, *Proc. Roy. Soc. A*, **219** (1953), 151—185.
- Гольдштейн, Меррей (Goldstein S., Murray J. D.)
[1] On the mathematics of exchange processes in fixed columns. Parts III, IV, V, *Proc. Roy. Soc. A*, **252** (1959), 334—375.
- Гринберг (Greenberg H.)
[1] An analysis of traffic flow, *Oper. Res.*, **7** (1959), 79—85.
- Гринспен (Greenspan H. P.)
[1] The theory of rotating fluids, Cambridge Univ. Press, 1968.

Гриффитс, Брикл, Блэкмен (Griffith W. C., Brickl D., Blackman V.)

- [1] Structure of shock waves in polyatomic gases, *Phys. Rev.*, **102** (1956), 1209—1216.

Гриффитс, Кенни (Griffith W. C., Kenny A.)

- [1] On fully dispersed shock waves in carbon dioxide, *J. Fluid Mech.*, **3** (1957), 286—288.

Гудерлей (Guderley G.)

- [1] Starke kugelige und zylindrische Verdichtungsstöße in der Nähe des Kugelmittelpunktes bzw der Zylinderachse, *Luftfahrtforschung*, **19** (1942), 302—312.

Гюгоньо (Hugoniot H.)

- [1] Sur la propagation du mouvement dans les corps et spécialement dans les gaz parfaits, *J. l'Ecole Polytech.*, **58** (1889), 1—125.

Делани (Delaney M. E.)

- [1] On the averaged Lagrangian technique for nonlinear dispersive waves, Ph. D. Thesis, California Inst. of Technology, 1971.

Джеффрис (Jeffreys H.)

- [1] The flow of water in an inclined channel of rectangular section, *Phil. Mag.* (6), **49** (1925), 793—807.

Джеффрис Г., Джеффрис Б. (Jeffreys H., Jeffreys B. S.)

- [1] Methods of mathematical physics, 3rd ed., Cambridge Univ. Press, 1956. Переиздание: Jeffreys H., Swirles B. S., Methods of mathematical physics, Cambridge University Press, 1966; русский перевод: Джеффрис Г., Свирлс Б., Методы математической физики, М., «Мир», вып. 1, 1969; вып. 2—3, 1970.

Джордмейн (Giordmaine J. A.)

- [1] Mixing of light beams in crystals, *Phys. Rev. Lett.*, **8** (1962), 19—20.

Доннелли, Херман, Пригожин (Donnelly R. J., Herman R., Prigogine I.)

- [1] Non-equilibrium thermodynamics, Univ. of Chicago Press, 1966.

Дресслер (Dressler R. F.)

- [1] Mathematical solution of the problem of roll waves in inclined open channels, *Comm. Pure Appl. Math.*, **2** (1949), 149—194.
[2] Hydraulic resistance effect upon the dam-break functions, *J. Res. Nat. Bur. Stand.*, **49** (1952), 217—225.

Захаров В. Е., Шабат А. Б.

- [1] Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах, *ЖЭТФ*, **61** (1971), 118—134.

Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П.

- [1] Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений, М., «Наука», 1966.

Зоммерфельд (Sommerfeld A.)

- [1] Optik, Wiesbaden, 1950; русский перевод: Зоммерфельд А., Оптика, М., ИЛ, 1953.

Карман, Мур (von Karman Th., Moore N. B.)

- [1] Resistance of slender bodies moving with supersonic velocities with special reference to projectiles, *Trans. Am. Soc. Mech. Engrs.*, **54** (1932), 303—310.

Карпман В. И.

- [1] An asymptotic solution of the Korteweg-de Vries equations, *Phys. Lett.*, **25A** (1967), 708—709.

Карпман В. И., Соколов В. П.

- [1] О солитонах и собственных значениях уравнения Шредингера, *ЖЭТФ*, 54 (1968), 1568—1580.

Кинч (Kynch G. F.)

- [1] A theory of sedimentation, *Trans. Faraday Soc.*, 48 (1952), 166—176.

Коментани, Сасаки (Komentani E., Sasaki T.)

- [1] On the stability of traffic flow, *Oper. Res. (Japan)*, 2 (1958), 11—26.

Корниш (Cornish V.)

- [1] Ocean waves and kindred geophysical phenomena, Cambridge Univ. Press, 1934.

Кортевег, де Фриз (Korteweg D. J., de Vries G.)

- [1] On the change of form of long waves advancing in a rectangular channel, and on a new type of long stationary waves, *Phil. Mag.* (5), 39 (1895), 422—443.

Коул (Cole J. D.)

- [1] On a quasilinear parabolic equation occurring in aerodynamics, *Q. Appl. Math.*, 9 (1951), 225—236; русский перевод: Коул Дж., О квазилинейном параболическом уравнении, встречающемся в аэродинамике, сб. *Механика*, № 2 (48) (1953), 70—82.

Коэн, Блум (Cohen D. S., Blum J. W.)

- [1] Acoustic wave propagation in an underwater sound channel, *J. Inst. Math. Applns.*, 8 (1971), 186—220.

Креппер (Crapper G. D.)

- [1] Nonlinear gravity waves on steady non-uniform currents, *J. Fluid Mech.*, 52 (1972), 713—724.

Курант, Гильберт (Courant R., Hilbert D.)

- [1] Methods of mathematical physics, Vol. II; Courant R., Partial differential equations, Interscience, New York — London, 1962; русский перевод: Курант Р., Уравнения с частными производными, М., «Мир», 1964. |

Курант, Фридрихс (Courant R., Friedrichs K. O.)

- [1] Supersonic flow and shock waves, Interscience, New York — London, 1948; русский перевод: Курант Р., Фридрихс К., Сверхзвуковое течение и ударные волны, М., ИЛ, 1950.

Кьяо, Гармайр, Таунс (Chiao R. Y., Garmire E., Townes C. H.)

- [1] Self-trapping of optical beams, *Phys. Rev. Lett.*, 13 (1964), 479—482.

Кэй, Келлер (Kay I., Keller J. B.)

- [1] Asymptotic evaluation of the field at a caustic, *J. Appl. Phys.*, 25 (1954), 876—883.

Кэй, Мозес (Kay I., Moses H. E.)

- [1] The determination of the scattering potential from the spectral measure function, *Nuovo Cimento* (10), 3 (1956), 276—304.

Лайтхилл (Lighthill M. J.)

- [1] Supersonic flow past bodies of revolution, R & M 2003 Aeronautical Research Council Ministry of Supply H. M. Stationery Office, London, 1945.

- [2] The position of the shock wave in certain aerodynamic problems, *Q.J. Mech. Appl. Math.*, 1 (1948), 309—318.

- [3] A technique for rendering approximate solutions to physical problems uniformly valid, *Phil. Mag.* (7), 44 (1949), 1179—1201.

- [4] The diffraction of blast I, *Proc. Roy. Soc. A*, **198** (1949), 454—470.
- [5] Viscosity effects in sound waves of finite amplitude, In «Surveys in mechanics» (Batchelor G. K., Davies R. M., eds.), Cambridge Univ. Press, 1956.
- [6] River waves, Naval hydrodynamics publication 515 National Academy of Sciences — National Research Council, 1957.

Лайтхилл, Уизем (Lighthill M. J., Whitham G. B.)

- [1] On kinematic waves: I. Flood movement in long rivers; II. Theory of traffic flow on long crowded roads, *Proc. Roy. Soc. A*, **229** (1955), 281—345.

Лакс (Lax P. D.)

- [1] Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves, *Comm. Pure Appl. Math.*, **21** (1968), 467—490; русский перевод: Лэкс П. Д., Интегралы нелинейных эволюционных уравнений и уединенные волны, сб. *Математика*, 13 : 5 (1969), 128—150.

Ландау Л. Д.

- [1] On shock waves at large distances from the place of their origin, *Soviet Journal of Physics*, **9** (1945), 496—500.

Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.

- [1] Механика, М., Физматгиз, 1958.
- [2] Квантовая механика (нерелятивистская теория), М., Физматгиз, 1963.
- [3] Теория упругости, М., «Наука», 1965.
- [4] Электродинамика сплошных сред, М., Физматгиз, 1959.

Ланорт (Laporte O.)

- [1] On the interaction of a shock with a constriction, Rep. No. LA-1740 Los Alamos Scientific Laboratory, 1954.

Лонге-Хиггинс, Стюарт (Longuet-Higgins M. S., Stewart R. W.)

- [1] Changes in the form of short gravity waves on long waves and tidal currents, *J. Fluid Mech.*, **8** (1960), 565—583.
- [2] The changes in amplitude of short gravity waves on steady nonuniform currents, *J. Fluid Mech.*, **10** (1961), 529—549.

Лоуэлл (Lowell S. C.)

- [1] Wave propagation in monatomic lattices with anharmonic potential, *Proc. Roy. Soc. A*, **318** (1970), 93—106.

Льюк (Luke J. C.)

- [1] A perturbation method for nonlinear dispersive wave problems, *Proc. Roy. Soc. A*, **292** (1966), 403—412.
- [2] A variational principle for a fluid with a free surface, *J. Fluid Mech.*, **27** (1967), 395—397.

Лэмб Г. (Lamb H.)

- [1] Hydrodynamics, 6th ed., Cambridge University Press, 1932; русский перевод: Лэмб Г., Гидродинамика, М.—Л., ГИТТЛ, 1947.

Лэмб Дж. (Lamb G. L., Jr.)

- [1] Propagation of ultrashort optical pulses, *Phys. Lett.*, **25A** (1967), 181—182.
- [2] Analytical descriptions of ultrashort optical pulse propagation in a resonant medium, *Rev. Mod. Phys.*, **43** (1971), 99—124.
- [3] Coherent optical pulse propagation as an inverse problem, *Phys. Rev.*, **A9** (1974), 422.

Мак-Кауэн (McCowan J.)

- [1] On the highest wave of permanent type, *Phil. Mag.* (5), 38 (1894), 351—358.

Марченко В. А.

- [1] Восстановление потенциальной энергии по фазам рассеянных волн, *ДАН СССР*, 104 (1955), 695—699.

Маршалл (Marshall W.)

- [1] The structure of magnetohydrodynamic shock waves, *Proc. Roy. Soc. A*, 233 (1955), 367—376.

Мейкер, Терхун, Нисенофф, Сэвидж (Maker P. D., Terhune R. W., Nisenoff M., Savage C. M.)

- [1] Effects of dispersion and focusing on the production of optical harmonics, *Phys. Rev. Lett.*, 8 (1962), 21—22.

Мёкель (Moeckel W. E.)

- [1] Interaction of oblique shock waves with regions of variable pressure, entropy and energy, Tech. Note 2725 Nat. Adv. Comm. Aero, Washington, 1952.

Мичелл (Michell A. G. M.)

- [1] The highest waves in water, *Phil. Mag.* (5), 36 (1893), 430—437.

Моубрей, Рерити (Mowbray D. E., Rarity B. S. H.)

- [1] A theoretical and experimental investigation of the phase configuration of internal waves of small amplitude in a density stratified liquid, *J. Fluid Mech.*, 28 (1967), 1—16.
[2] The internal wave pattern produced by a sphere moving vertically in a density stratified liquid, *J. Fluid Mech.*, 30 (1967), 489—496.

Най (Nye J. F.)

- [1] The response of glaciers and ice-sheets to seasonal and climatic changes, *Proc. Roy. Soc. A*, 256 (1960), 559—584.
[2] The response of a glacier to changes in the rate of nourishment and wastage, *Proc. Roy. Soc. A*, 275 (1963), 87—112.

Нигам С., Нигам П. (Nigam S. D., Nigam P. D.)

- [1] Wave propagation in rotating liquids, *Proc. Roy. Soc. A*, 266 (1962), 247—256.

Ньюэлл (Newell G. F.)

- [1] Nonlinear effects in the dynamics of car-following, *Oper. Res.*, 9 (1961), 209—229.

Островский Л. А.

- [1] Распространение волновых пакетов и пространственно временная самофокусировка в нелинейной среде, *ЖЭТФ*, 51 (1966), 1189—1194.
[2] The theory of waves or envelopes in nonlinear media, U.R.S.I. Symposium on electromagnetic waves VI, Stresa, Italy, 1968.

Пенни, Прайс (Penney W. G., Price A. T.)

- [1] Finite periodic stationary gravity waves in a perfect liquid, *Phil. Trans. Roy. Soc. A*, 244 (1952), 254—284.

Перри, Кантровиц (Perry R. W., Kantrowitz A.)

- [1] The production and stability of converging shock waves, *J. Appl. Phys.*, 22 (1951), 878—886.

Перринг, Скирм (Perring J. K., Skyrme T. H. R.)

- [1] A model unified field equation, *Nucl. Phys.*, 31 (1962), 550—555.

Петровский И. Г.

- [1] Лекции об уравнениях в частных производных, М., Физматгиз, 1961.

Пуассон (Poisson S. D.)

- [1] Memoire sur la theorie du son, *J. l'Ecole Polytech.*, 7 (1807), 319—392.

Рерити (Rarity B. S. H.)

- [1] The two-dimensional wave pattern produced by a disturbance moving in an arbitrary density stratified liquid, *J. Fluid Mech.*, 30 (1967), 329—336.

Риман (Riemann B.)

- [1] Über die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite, Göttingen Abhandlungen, Bd. VIII, S. 43; Werke, 2te Aufl., Leipzig, 1892, S. 157.

Ричардс (Richards P. I.)

- [1] Shock waves on the highway, *Oper. Res.*, 4 (1956), 42—51.

Рэлей (Rayleigh)

- [1] Aerial plane waves of finite amplitude, *Proc. Roy. Soc. A*, 84 (1910), 247—284; Papers, vol. 5, 573—610.
[2] On waves, *Phil. Mag.* (5), 1 (1876), 257—279; Papers, vol. 1, 251—271.

Рэнкин (Rankine W. J. M.)

- [1] On the thermodynamic theory of waves of finite longitudinal disturbance, *Phil. Trans.*, 160 (1870), 277—288.

Сакураи (Sakurai A.)

- [1] On the problem of a shock wave arriving at the edge of a gas, *Comm. Pure Appl. Math.*, 13 (1960), 353—370.

Сергюр (Segur H.)

- [1] The Korteweg — de Vries equation and water waves. I. Solutions of the equation, *J. Fluid Mech.*, 59 (1973), 721—736.

Седдон (Seddon J. A.)

- [1] River hydraulics, *Trans. Am. Soc. Civ. Engrs.*, 43 (1900), 179—243.

Седов Л. И.

- [1] Методы подобия и размерности в механике, изд. 7, М., «Наука», 1972.

Селиджер (Seliger R. L.)

- [1] A note on the breaking of waves, *Proc. Roy. Soc. A*, 303 (1968), 493—496.

Селиджер, Уизем (Seliger R. L., Whitham G. B.)

- [1] Variational principles in continuum mechanics, *Proc. Roy. Soc. A*, 305 (1968), 1—25; русский перевод: Селиджер Р. Л., Уизем Г. Б., Вариационные принципы в механике сплошной среды, сб. *Механика*, № 5 (117) (1969), 99—123.

Скотт (Scott A. C.)

- [1] Active and nonlinear wave propagation in electronics, Wiley-Interscience, New York, 1970.

Скотт Рассел (Scott Russell J.)

- [1] Report on waves, Brit. Assoc. Rep., 1844.

Скьюз (Skews B. W.)

- [1] The shape of a diffracting shock wave, *J. Fluid Mech.*, 29 (1967), 297—304.

Смолл (Small R. D.)

- [1] Nonlinear dispersive waves in nonlinear optics, Ph. D. Thesis, California Inst. of Technology, 1972.

Снодграсс и др. (Snodgrass F. E., et al.)

- [1] Propagation of ocean swell across the pacific, *Phil. Trans. Roy. Soc. A*, **259** (1966), 431—497.

Стокс (Stokes G. G.)

- [1] On the theory of oscillatory waves, *Camb. Trans.*, **8** (1847), 441—473; Papers, vol. 1, 197—229.
- [2] On a difficulty in the theory of sound, *Phil. Mag.* (3), **23** (1848), 349—356; Papers, vol. 2, 51—58.

Тейлор (Taylor G. I.)

- [1] The conditions necessary for discontinuous motion in gases, *Proc. Roy. Soc. A*, **84** (1910), 371—377.
- [2] The motion of a sphere in a rotating liquid, *Proc. Roy. Soc. A*, **102** (1922), 180—189.
- [3] The air wave surrounding an expanding sphere, *Proc. Roy. Soc. A*, **186** (1946), 273—292.
- [4] The formation of a blast wave by a very intense explosion. I. Theoretical discussion, *Proc. Roy. Soc. A*, **201** (1950), 159—174; русский перевод: Тейлор Дж., Образование взрывной волны при очень интенсивном взрыве, сб. *Механика*, № 1 (11) (1952), 73—101.
- [5] An experimental study of standing waves, *Proc. Roy. Soc. A*, **218** (1953), 44—59.
- [6] The dynamics of thin sheets of fluid. II. Waves on fluid sheets, *Proc. Roy. Soc. A*, **253** (1959), 296—312.

Тейлор, Макколл (Taylor G. I., Maccoll J. W.)

- [1] The air pressure on a cone moving at high speeds, *Proc. Roy. Soc. A*, **139** (1933), 278—311.

Тода (Toda M.)

- [1] Vibration of a chain with nonlinear interaction, *J. Phys. Soc. Japan*, **22** (1967), 431—436.
- [2] Wave propagation in anharmonic lattices, *J. Phys. Soc. Japan*, **23** (1967), 501—506.

Томас (Thomas H. C.)

- [1] Heterogeneous ion exchange in a flowing system, *J. Am. Chem. Soc.*, **66** (1944), 1664—1666.

Уизем (Whitham G. B.)

- [1] The behaviour of supersonic flow past a body of revolution, far from the axis, *Proc. Roy. Soc. A*, **201** (1950), 89—109.
- [2] The propagation of spherical blast, *Proc. Roy. Soc. A*, **203** (1950), 571—581.
- [3] The flow pattern of a supersonic projectile, *Comm. Pure Appl. Math.*, **5** (1952), 301—348.
- [4] The effects of hydraulic resistance in the dam-break problem, *Proc. Roy. Soc. A*, **227** (1955), 399—407.
- [5] On the propagation of weak shock waves, *J. Fluid Mech.*, **1** (1956), 290—318.
- [6] A new approach to problems of shock dynamics. Part I. Two-dimensional problems, *J. Fluid Mech.*, **2** (1957), 146—171.
- [7] On the propagation of shock waves through regions of non-uniform area or flow, *J. Fluid Mech.*, **4** (1958), 337—360.
- [8] Some comments on wave propagation and shock wave structure with application to magnetohydrodynamics, *Comm. Pure Appl. Math.*, **12** (1959), 113—158.
- [9] A new approach to problems of shock dynamics. Part. II. Three-dimensional problems, *J. Fluid Mech.*, **5** (1959), 369—386.

- [10] A general approach to linear and nonlinear dispersive waves using a Lagrangian, *J. Fluid Mech.*, **22** (1965), 273—283.
- [11] Nonlinear dispersion of water waves, *J. Fluid Mech.*, **27** (1967), 399—412.
- [12] A note on shock dynamics relative to a moving frame, *J. Fluid Mech.*, **31** (1968), 449—453.
- [13] Two-timing, variational principles and waves, *J. Fluid Mech.*, **44** (1970), 373—395.

Урселл (Ursell F.)

- [1] On Kelvin's ship wave pattern, *J. Fluid Mech.*, **8** (1960), 418—431.
- [2] Steady wave patterns on a non-uniform steady fluid flow, *J. Fluid Mech.*, **9** (1960), 333—346.

Фавр (Favre H.)

- [1] Etude théorique et expérimentale des ondes de translation dans les canaux découverts, Dunod et Cie, Paris, 1935.

Фаддеев Л. Д.

- [1] Обратная задача квантовой теории рассеяния, *УМН*, **14** (1959), 57—89.

Филлипс (Phillips O. M.)

- [1] Theoretical and experimental studies of gravity wave interactions, *Proc. Roy. Soc. A*, **299** (1967), 104—119; русский перевод: Филлипс О. М., Теоретические и экспериментальные исследования взаимодействий гравитационных волн, сб. «Нелинейная теория распространения волн», М., «Мир», 1970, 141—160.

Финстервальдер (Finsterwalder S.)

- [1] Die Theorie der Gletscherschwankungen, *Z. Gletscherkunde*, **2** (1907), 81—103.

Форсайт (Forsyth A. R.)

- [1] Theory of differential equations, Vol. VI, Dover Publications, New York, 1959.

Франкен, Хилл, Петерс, Вайнрайх (Franken P. A., Hill A. E., Peters C. W., Weinreich G.)

- [1] Generation of optical harmonics, *Phys. Rev. Lett.*, **7** (1961), 118—119.

Франклин (Franklin J. N.)

- [1] Axisymmetric inertial oscillations of a rotating fluid, *J. Math. Anal. Appl.*, **39** (1972), 742—760.

Фридман (Friedman M. P.)

- [1] An improved perturbation theory for shock waves propagating through non-uniform regions, *J. Fluid Mech.*, **8** (1960), 193—209.

Фридман, Кейн, Синьялла (Friedman M. P., Kane E. J., Signalla A.)

- [1] Effects of atmosphere and aircraft motion on the location and intensity of a sonic boom, *A.I.A.A.J.*, **1** (1963), 1327—1335; русский перевод: Фридман М., Кейн Э., Сингалла А., Влияние атмосферы и движения самолета на положение и интенсивность звукового удара, *Ракетная техника и космонавтика*, № 6 (1963), 56—67.

Хаус (Haus H. A.)

- [1] Higher order trapped light beam solutions, *Appl. Phys. Lett.*, **8** (1966), 128—129.

Хейз (Hayes W. D.)

- [1] Self-similar strong shocks in an exponential medium, *J. Fluid Mech.*, **32** (1968), 305—315; русский перевод: Хейз У., Автомодельные силь-

ные ударные волны в экспоненциальной среде, сб. *Механика*, № 6 (112) (1968), 51—61.

- [2] Group velocity and nonlinear dispersive wave propagation, *Proc. Roy. Soc. A*, **332** (1973), 199—221.

Херман, Монтролл, Поттс, Розери (Herman R., Montroll E. W., Potts R. B., Rothery R. W.)

- [1] Traffic dynamics: Analysis of stability in car following, *Oper. Res.*, **7** (1959), 86—106.

Хименес (Jimenez J.)

- [1] Wavetrains with small dissipation, Ph. D. Thesis, California Inst. of Technology, 1972.

Хиро́та (Hirota R.)

- [1] Exact solution of the Korteweg — de Vries equation for multiple collisions of solitons, *Phys. Rev. Lett.*, **27** (1971), 1192—1194.

Хиро́та, Судзуки (Hirota R., Suzuki K.)

- [1] Studies on lattice solitons by using electrical networks, *J. Phys. Soc. Japan*, **28** (1970), 1366—1367.
[2] Theoretical and experimental studies of lattice solitons in nonlinear lumped networks, *Proc. I.E.E.E.*, **61** (1973), 1483.

Холлидей (Holliday D.)

- [1] Nonlinear gravity-capillary surface waves in a slowly varying current, *J. Fluid Mech.*, **57** (1973), 797—802.

Хопф (Hopf E.)

- [1] The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$, *Comm. Pure Appl. Math.*, **3** (1950), 201—230.

Хоффман (Hoffman A. L.)

- [1] A single fluid model for shock formation in MHD shock tubes, *J. Plasma Phys.*, **1** (1967), 193—207.

Хупперт, Майлс (Huppert H. E., Miles J. W.)

- [1] A note on shock diffraction by supersonic wedge, *J. Fluid Mech.*, **31** (1968), 455—458.

Чендлер, Херман, Монтролл (Chandler R. E., Herman R., Montroll E. W.)

- [1] Traffic dynamics: Studies in car-following, *Oper. Res.*, **6** (1958), 165—184.

Честер (Chester W.)

- [1] The quasi-cylindrical shock tube, *Phil. Mag.* (7), **45** (1954), 1293—1301.

Чизнелл (Chisnell R. F.)

- [1] The normal motion of a shock wave through a nonuniform one-dimensional medium, *Proc. Roy. Soc. A*, **232** (1955), 350—370.
[2] The motion of a shock wave in a channel, with applications to cylindrical and spherical shock waves, *J. Fluid Mech.*, **2** (1957), 286—298.

Шерклиф (Shercliff J. A.)

- [1] Anisotropic surface waves under a vertical magnetic force, *J. Fluid Mech.*, **38** (1969), 353—364.

Шифф (Schiff L. I.)

- [1] Nonlinear meson theory of nuclear forces, *Phys. Rev.*, **84** (1951), 1—11; русский перевод: Шифф Л., Нелинейная мезонная теория ядерных сил, сб. «Нелинейная квантовая теория поля», М., ИЛ, 1959, 300—328.

Эрншоу (Earnshaw S.)

- [1] On the mathematical theory of sound, *Phil. Trans.*, **150** (1858), 133—148.

Янке, Эмде (Jahnke E., Emde F.)

- [1] Tables of functions, Dover Publications, New York, 1945; русский перевод: Янке Е., Эмде Ф., Таблицы функций с формулами и кривыми, М., Физматгиз, 1959.

Ярив (Yariv A.)

- [1] Quantum electronics, John Wiley & Sons, New York, 1967.

Именной указатель

- Аббот (Abbott M. R.) 68, 137, 138, 592
Абловиц (Ablowitz M. J.) 489, 553, 584, 592
Адамар (Hadamard J.) 214, 218
Ахманов С. А. 522, 523, 592
- Баланис (Balanis G. N.) 563, 564, 592
Барбашов Б. М. 554, 589, 592
Бароне (Barone A.) 467, 592
Барсилон (Barcilon V.) 403, 592
Батлер (Butler D. S.) 196, 300, 592
Бейтмен (Bateman H.) 13, 592
Бенджамен (Benjamin T. B.) 445, 464, 507, 509, 538, 540, 592, 593
Бенни (Benney D. J.) 489, 592
Бианки (Bianchi) 582
Блекмэн (Blackman V.) 347, 594
Блум (Blum J. W.) 244, 595
Бона (Bona J. L.) 593
Борн (Born M.) 554, 593
Брам (Bram L.) 6
Брикл (Brickl D.) 347, 594
Брисон (Bryson A. E.) 277, 290—298, 593
Бродерик (Broderick J. B.) 221, 593
Бродски (Brodsky S.) 6
Буссинеск (Boussinesq J.) 20, 449, 593
Бургерс (Burgers J. M.) 13, 593
- Вайнрайх (Weinreich G.) 528, 600
Вертман (Weertman J.) 94, 593
Ву (Wu T. T.) 341, 593
- Гарднер (Gardner C. S.) 22, 453, 527, 553, 560, 593
Гармайр (Garmire E.) 526, 527, 595
Гельфанд И. М. 563, 380, 593
Гильберт (Hilbert D.) 129, 143, 595
Гольдштейн (Goldstein S.) 98, 593
Грин (Greene J. M.) 22, 453, 527, 553, 560, 593
Гринберг (Greenberg H.) 74, 593
Гринспен (Greenspan H. P.) 403, 593
Гриффитс (Griffith W. C.) 347, 594
Гросс (Gross R. W. F.) 277, 290—298, 593
- Гудерлей (Guderley G.) 195, 196, 594
Гюгонио (Hugoniot H.) 31, 594
- Дарбу (Darboux) 582
Девис (Davies V.) 6
Делани (Delaney M. E.) 489, 594
Джеффрис Б. (Jeffreys B. S.) 357, 430, 594
Джеффрис Г. (Jeffreys H.) 90, 357, 430, 594
Джордмейн (Giordmaine J. A.) 530, 594
Доннелли (Donnelly R. J.) 491, 594
Дресслер (Dressler R. F.) 90, 94, 441, 594
- Захаров В. Е. 22, 527, 540, 553, 563, 566, 576—578, 584, 594
Зельдович Я. Б. 197, 594
Зоммерфельд (Sommerfeld A.) 414, 594
- Инфельд (Infeld L.) 554, 593
- Кантровиц (Kantrowitz A.) 299, 597
Карман (von Karman T.) 222, 594
Карпман В. И. 571, 594, 595
Кауп (Kaup D. J.) 553, 584, 592
Кейн (Kane E. J.) 326, 600
Келлер (Keller J. B.) 240, 595
Кельвин (Kelvin) 357, 393
Кенни (Kennedy A.) 347, 594
Кинч (Kynch G. F.) 96, 595
Клайц (Kleitz) 85
Коментани (Komentani E.) 84, 595
Корниш (Cornish V.) 89, 595
Кортевер (Korteweg D. J.) 19, 20, 449, 452, 595
Коул (Cole J. D.) 13, 100, 553, 595
Коэн (Cohen D. S.) 244, 595
Креппер (Crappier G. D.) 542, 595
Крускал (Kruskal M. D.) 22, 453, 527, 553, 560, 593
Курант (Courant R.) 125, 129, 143, 183, 288, 595
Кьяо (Chiao R. Y.) 526, 527, 595
Кэй (Kay I.) 240, 563, 595

Лаврентьев М. А. 20, 357, 415
 Лайтхилл (Lighthill M. J.) 34, 72,
 221, 286, 315, 323, 347, 393, 464,
 593, 595, 596
 Лакс (Lax P. D.) 553, 576, 596
 Ламб см. Лэмб Г.
 Ландау Л. Д. 311, 414, 488, 569—571,
 596
 Лапорт (Laporte O.) 281, 596
 Левитан Б. М. 563, 593
 Лифшиц Е. М. 414, 488, 569—571, 596
 Лонге-Хиггинс (Longuet-Higgins-
 M. S.) 536, 537, 542, 596
 Лоуэлл (Lowell S. C.) 585, 596
 Льюк (Luke J. C.) 481, 596
 Лэмб Г. (Lamb H.) 162, 596
 Лэмб Дж. (Lamb G. L.) 22, 553, 581,
 584, 596

Маджи (Magee C. J.) 592
 Майлс (Miles J. W.) 301, 601
 Мак-Кауэн (McCowan J.) 461, 541,
 597

Маккол (Maccoll J. W.) 323, 599
 Манаков С. В. 566, 588
 Марченко В. А. 563, 597
 Маршалл (Marshall W.) 344, 597
 Мах (Mach E.) 205
 Махони (Mahony J. J.) 593
 Мейкер (Maker P. D.) 530, 597
 Меррей (Murray J. D.) 98, 593
 Мессен (Massey D.) 6
 Мёкель (Moeckel W. E.) 262, 597
 Миура (Miura R. M.) 22, 453, 527,
 553, 560, 593
 Мичелл (Michell A. G. M.) 452, 457,
 541, 597
 Мозес (Moses H. E.) 563, 595
 Монтролл (Montroll E. W.) 84, 601
 Моубрей (Mowbray D. E.) 407, 597
 Мур (Moore N. B.) 222, 594

Най (Nye J. F.) 33, 94, 95, 597
 Найфе (Nayfeh A.) 240
 Налимов В. И. 415
 фон Нейман (von Neumann J.) 190
 Нигам П. (Nigam P. D.) 403, 597
 Нигам С. (Nigam S. D.) 403, 597
 Нисенофф (Nisenoff M.) 597
 Ньюэлл А. (Newell A. C.) 553, 584,
 592
 Ньюэлл Дж. (Newell G. F.) 82, 84,
 597

Островский Л. А. 506, 518, 519, 597

Пенни (Penney W. G.) 457, 597
 Перри (Perry R. M.) 299, 597
 Перринг (Perring J. K.) 22, 468, 553,
 580, 583, 597
 Петерс (Peters C. W.) 528, 600
 Петровский И. Г. 143, 597
 Поттс (Potts R. B.) 84, 601
 Пригожин (Prigogine I.) 491, 594
 Прайс (Price A. T.) 457, 597
 Пуассон (Poisson S. D.) 31, 598
 Пухначев В. В. 415

Райзер Ю. П. 197, 594
 Рерити (Rarity B. S. H.) 407, 597,
 598
 Риман (Riemann B.) 7, 31, 126, 169,
 181, 598
 Ричардс (Richards P. I.) 72, 598
 Рождественский Б. Л. 182
 Розери (Rothery R. W.) 84, 601
 Рэлей (Rayleigh) 20, 31, 441, 449, 598
 Ранкин (Rankine W. J. M.) 31, 598

Сакураи (Sakurai A.) 197, 267, 598
 Сасаки (Sasaki T.) 84, 595
 Свирлс см. Джеффрис Б.
 Сегюр (Segur H.) 553, 566, 584, 592,
 598

Седдон (Seddon J. A.) 85, 598
 Седов Л. И. 190, 193, 197, 598
 Селиджер (Seliger R. L.) 420, 462, 598
 Синьялла (Signalla A.) 326, 600
 Скирм (Skyrme T. H. R.) 22, 468, 553,
 580, 583, 597
 Скотт (Scott A. C.) 467, 468, 580, 592,
 598

Скотт Рассел (Scott Russell J.) 20,
 449, 598
 Скъюз (Skews B. W.) 287, 288, 598
 Смолл (Small R. D.) 519, 526, 598
 Снодграсс (Snodgrass F. E.) 391, 599
 Соболев С. Л. 403

Соколов В. П. 571, 595
 Стокс (Stokes G. G.) 7, 19, 31, 449,
 453, 454, 456, 457, 509, 599
 Стюарт (Stewart R. W.) 536, 537, 542,
 596

Судзуки (Suzuki K.) 585, 601
 Сухоруков А. П. 522, 523, 592
 Сэвидж (Savage C. M.) 597

Таунс (Townes C. H.) 526, 527, 595
 Тахтаджан Л. А. 584
 Тейлор (Taylor G. I.) 31, 190—194,
 197, 323, 398, 399, 402, 403, 457, 599

Терхун (Terhune R. W.) 531, 597
Тода (Toda M.) 554, 585, 586, 588, 599
Томас (Thomas H. C.) 97, 100, 599

Уизем (Whitham G. B.) 34, 72, 264,
265, 268, 293, 301, 303, 311, 316,
325, 344, 420, 441, 456, 486, 533,
596, 598, 599
Урселл (Ursell F.) 402, 437, 600

Фавр (Favre H.) 463, 465, 600
Фадеев Л. Д. 563, 584, 600
Федорюк М. В. 357
Филлипс (Phillips O. M.) 512, 600
Финстервальдер (Finsterwalder S.)
94, 600
Флашка (Flashka H.) 588
Фомин С. В. 380, 593
Форсайт (Forsyth A. R.) 582, 600
Франкен (Franken P. A.) 528, 600
Франклин (Franklin J.) 403, 600
Фридман (Friedman M. P.) 261, 326,
600
Фридрихс (Friedrichs K. O.) 125, 183,
288, 595
де Фриз (de Vries G.) 19, 20, 449, 452,
595

Хаус (Haus H. A.) 526, 600
Хейз (Hayes W. D.) 197, 267, 496,
600

Херман (Herman R.) 84, 594, 601
Хилл (Hill A. E.) 528, 600
Хименес (Jimenez J.) 491, 601
Хирота (Hirota R.) 557, 585, 601
Холлидей (Holliday D.) 542, 601
Хопф (Hopf E.) 13, 100, 553, 601
Хоффман (Hoffman A. L.) 68, 69, 601
Хохлов Р. В. 522, 523, 592
Хупперт (Huppert H. E.) 301, 601

Чендлер (Chandler R. E.) 84, 601
Черников Н. А. 554, 589, 592
Честер (Chester W.) 260, 601
Чизнелл (Chisnell R. F.) 262, 267, 601

Шабат А. Б. 22, 527, 553, 563, 566,
576—578, 584, 594
Шабат Б. В. 357, 415
Шерклиф (Shercliff J. A.) 391, 601
Шифф (Schiff L. I.) 468, 601

Эйри (Airy G. B.) 240
Эмде (Emde F.) 546, 602
Эрншоу (Earnshaw S.) 31, 169, 602
Эспозито (Esposito F.) 592

Янке (Jahnke E.) 546, 602
Яненко Н. Н. 182
Ярив (Yariv A.) 528, 531, 602

Предметный указатель

Там, где это целесообразно, в перечислении номеров страниц основная ссылка выделена жирным шрифтом

- Авогадро число 155
Автомодельные решения уравнений газовой динамики 189—197
— — уравнения Бюргерса 106
Адиабатические инварианты 380, 486
Адиабатическое течение 157
Акустика 10, 11, 158, 162, 206—207
— геометрическая 326
Амплитуда, распространение ее 364
Амплитудное уравнение 379
Анизотропные волны 246—253, 409
Асимптотическое поведение разрыва 51—57, 60, 65, 107, 108, 111, 112, 179
— — ударной волны 311, 324
Атмосфера изотермическая 161
— экспоненциальная 161
Аэродинамика 207, 219
- Беклунда преобразование 553, 581, 582
Бельтрами течения 198
Бернулли уравнение 198, 220
Боры, волны катящиеся 94
—, — паводковые 93
— приливные 67, 68, 137
— в реках 67, 68, 137
— структура 463
—, теория мелкой воды 439, 441, 442
— турбулентные 439
—, условия возникновения 93, 439, 441
Борна — Инфельда уравнение 554, 588
— — —, взаимодействующие волны 589
Буссинеска уравнение 16, 351, 443, 444
Бюргерса уравнение 13, 20, 41, 99, 342, 553, 556, 582
- Вариационный подход 375, 472
— принцип 376, 474, 485
— — для волн на воде 418
— — — — Стокса 531
- Вариационный принцип в нелинейной оптике 515
— — для уравнения Клейна — Гордона 472
— — — — Кортевега — де Фриза 542
— — усредненный 378, 473, 477, 480, 487, 492
Введения нелинейности метод 302
— — —, обоснование его 311—319
«Вековые» условия 482
Взаимодействующие уединенные волны 22, 552—591
Взрывная волна 190
Внутренняя энергия 146, 150—152, 154, 156
Волновая энергия 380, 536, 537
Волновод в океане 243—244
Волновое действие 238, 369, 381, 491, 535
— —, уравнение для него 384, 386
— —, — сохранения его 380, 488, 536, 537
— уравнение 9, 12, 23, 119, 159, 206
— число 9, 16, 350, 360, 361
— — локальное 17, 360, 361
— —, распространение его 18, 362, 364—366, 368
Волновой вектор 349, 350
— импульс 381, 536
— фронт в задаче Коши 227
— —, нелинейное опрокидывание его 135
— —, распространение его 131, 227, 230
Волны на воде 415—465, 531—542
— — — глубокой 538, 539
— — —, поведение вблизи волнового фронта 424
— — —, решения в виде интегралов Фурье 422
— во вращающейся жидкости 402
— от движущегося источника 68
—, картины их 388—414
— на поверхности раздела между двумя жидкостями 427
— — — — —, устойчивость их 429

- Волны в реках см. Паводковые волны
 Вторичные ударные волны (shock-shocks) 279
 Второго порядка уравнения 142—143
 Вторых гармоник генерация 528
 Высокочастотное приближение 233—234
 Вязкости коэффициент 152
- Газ двухатомный 156
 — идеальный 153
 — — с постоянными удельными теплоемкостями 154
 — одноатомный 149, 156
 — политропный 155, 158
 Газовая динамика 144—205
 — постоянная 153
 Гамильтона преобразование в теории модуляции 479
 Гельфанда — Левитана интегральное уравнение 563, 565
 «Геометрическая динамика» ударных волн 268
 Геометрическая оптика 14, 229—253, 332, 382, 475
 — — и линейный предел динамики ударных волн 271—272
 — —, нелинейные эффекты 307
 Гидравлические прыжки 93, 439
 Гиперболическая система уравнений 9, 10, 14, 115—143
 — — —, граничные условия для нее 129
 — — —, область зависимости решения от начальных условий 128
 — — —, определение 118
 — — строго система уравнений 118
 Гиперболические волны 9, 10, 19, 23
 — — —, определение 118
 — — первого порядка 23—71
 — — ударные 139
 Годографа преобразование 181, 300, 523, 589
 Гравитационные волны 388
 — — на поверхности потока 392—393, 432
 Групповая скорость 17, 34, 247, 351, 360, 362, 365, 366, 368
 — — нелинейная 21, 492—508
 Групповое расщепление 499
- Движущаяся среда, волновое уравнение для нее 247
 — —, источник в ней 250—251
 — —, распространение в ней ударной волны 301
- Движущийся разрыв 46, 47
 «Двух времен» метод (two-timing method) 475
 Двухатомный газ 156
 Деформаций тензор 209
 «Деформированных координат» метод (strained coordinate technique) 315
 Динамика ударных волн 254—301
 Диспергирующие волны 9, 348
 — —, асимптотическое поведение 356
 — —, вариационный подход 375, 472
 — —, взаимодействия нелинейные 507
 — — линейные 16, 348
 — — нелинейные 19, 466
 — — в неоднородной среде 488—489
 — —, определение 354
 — — почти линейные 470, 493, 503
 — —, усредненный вариационный принцип 378, 473, 476, 480, 492
 — —, устойчивость 471, 497—499
 — —, эффекты диссипации 490
 Дисперсионное соотношение 9, 15, 17, 349
 — — для вариационного принципа 378
 — — — волн на воде 388
 — — — — — глубокой 539
 — — — — — постоянной глубины 421
 — — — — гравитационных 388
 — — — — в жидкости вращающейся 403
 — — — — — стратифицированной 405
 — — — — капиллярных 389, 429
 — — — — в кристаллах 409
 — — — — на поверхности раздела двух жидкостей 428
 — — — — — стационарного потока 431
 — — — — Стокса 456
 — — — в оптике линейной 515
 — — — — нелинейной 514, 518
 — — — почти линейной теории 470, 479, 493
 — —, связь его с основным уравнением 352
 — — для уравнения Буссинеска 444
 — — — интегродифференциального 353
 — — — — Клейна — Гордона нелинейного 469
 — — — — Кортевега — де Фриза 451

- Дисперсионное соотношение для уравнения Шредингера 352
 — — — кубического 574, 575
 — — — цепочки Тоды 587
 Дисперсионные эффекты высшего порядка 503
 — — — в нелинейной оптике 518, 525
 Дифракция ударной волны 268, 282
 — — — на клине 288
 — — — конусе 293
 — — — круговом цилиндре 290
 — — — сфере 291, 293
 — — — около угла 284
 Диффузия 37, 39, 99, 100, 335
- Задача о взрыве сильном 190—194
 — — —, автомодельные уравнения 193
 — — — шара 212, 227
 — — движении поршня 164, 177
 — Коши для волн на воде 421
 — — — плоских 211
 — — — сферических 212
 — — — волнового уравнения 223
 — — в газовой динамике 177, 180
 — — для иерархий волн 329
 — — корректно поставленная 123
 — — для уравнения Кортевега — де Фриза 568
 — с начальными и краевыми условиями для гиперболических систем 127
 — — — условиями для уравнения первого порядка 24
 — о разрушении плотины 440
 — — распространении сигнала 62, 330
 — — светофоре 75—77
 — — сходящейся ударной волне 194—197, 263—265
 — — ударной трубе 183
 Закон сохранения, см. также Уравнение сохранения
 Закон сохранения в форме дифференциальной 139
 — — — интегральной 139
 — — массы 31
 — — «усредненной энергии» 371
 Законы сохранения 45, 486
 — — в газовой динамике 145, 148
 — — при переходе через бору 441
 — — в теории мелкой воды 442
 Заострение гребня волны 452, 458
 Затухание разрыва 51, 52, 54, 56, 65, 107, 112, 179
- Затухание ударной волны 311, 324
 Затухающие волны 67, 332, 337
 Звука скорость, волновое уравнение 159
 — — «замороженная» 345
 — —, определение 157
 — — равновесная 346
 Звуковые волны линейные 158
 — — нелинейные 162, 168
 — удары 7, 8, 11, 15, 302, 319—326
- Идеальный газ см. Газ идеальный
 Иерархия волн 327—347
 Излучения условие 430
 Изотермическая атмосфера 161
 Изэнтропическое течение 158
- Капиллярные волны 389, 429
 — — на поверхности стационарного потока 392—393, 434
 — — — тонком слое воды 398—402
 Катящиеся волны 88—90, 94
 Каустика 239—240, 298
 —, нелинейный распад ее 299
 Квазилинейные уравнения 13
 — — с m независимыми переменными 140
 — — первого порядка 66
 — —, системы их 14, 115
 Кинематические волны 31—34
 — — в газовой динамике 168
 Кинетическая теория 148, 155
 Клайца — Седдона формула 85
 Классификация волн 9
 — систем уравнений 116
 — —, примеры 119
 — уравнений второго порядка 142, 143
 Клейна — Гордона уравнение 10, 351, 369, 385
 — — —, вариационный принцип 472
 — — — нелинейное 21, 467
 — — —, теория модуляции 496
 — — —, устойчивость решений 471, 498
 Кноидальные волны 20, 449, 452
 — —, аналог в оптике 526
 Колебаний балки уравнение 16, 349, 351, 362, 363
 Конус Маха 222
 — преломленных лучей 414
 Корабельные волны 393—398, 435
 Кортевега — де Фриза уравнение 19—21, 445, 448, 449, 552

- Кортвега — де Фриза уравнение, вариационная формулировка 542
 — — —, взаимодействующие уединенные волны 555—559
 — — —, дисперсионное соотношение 451
 — — — с диссипацией 464
 — — —, задача Коши 568—572
 — — —, линеаризованное 16, 351, 443
 — — —, обобщенная дисперсия 459, 460
 — — —, обратная задача рассеяния 559—567
 — — —, разложение Стокса 453
 — — —, теория модуляции 542—551
 — — —, уравнения сохранения 550, 572—573
 Косая ударная волна 203
 Коула — Хопфа решение уравнения Буссинеска 100, 553
 Кристаллооптика 408—414
 Кристаллы двухосные 414
 — одноосные 411
 Кубическое уравнение Шредингера 21, 527, 552, 574
 — — —, дисперсионное соотношение 574, 575
 — — —, обратная задача рассеяния 576
 — — —, приложения 574
 — — —, уединенная волна 575
 — — —, устойчивость 575
 Лагранжиан 377, 473
 — для волн на воде 418, 532
 — в нелинейной оптике 515, 525
 — для уравнения Клейна — Гордона 472, 479, 481
 — — — Кортвега — де Фриза 542, 551
 — усредненный 377, 472, 477, 478, 480, 483, 487, 490, 516, 538, 543
 Ледника движение 33, 94
 Линеаризованная теория, неравномерность аппроксимации 60, 304, 306
 Линейные диспергирующие волны, решение в виде интегралов Фурье 354
 Линии групповые 363
 — фазовые 363
 Лучевой вектор 410
 Лучей трубки см. Трубки лучей
 Лучи 236, 268, 272
 — необыкновенные 530—531
 — обыкновенные 530—531
 Магнитная газовая динамика 124, 251, 344
 — гидродинамика 391
 Максвелла уравнения 124, 210, 408
 — — в нелинейной оптике 513
 Маннинга закон 86
 Маха конус 222
 — отражение 205, 282, 289, 290
 — стель 289, 290, 292, 293
 — угол 200, 321
 Мелкой воды теория 123, 136, 390, 437
 Миуры преобразование 572
 Многофазовые волновые пакеты 489, 512
 Модуляции, расщепление их 471
 — теория 470, 472, 494—506
 — —, волны на воде 534—542
 — —, нелинейная оптика 518—528
 — —, уравнение Клейна — Гордона 496
 — — — Кортвега — де Фриза 542—551
 Моноклиальная паводковая волна 90—94
 Навье — Стокса уравнения 151
 — — —, описание структуры ударной волны 187
 Напряжение излучения 536
 Напряженный тензор для жидкости 145, 151
 — — —, симметричность его 148
 — — — упругой среды 208
 N-волна 53—55
 — в газовой динамике 180
 — двух- и трехмерная 310
 — в задаче о взрыве шара 213
 — при звуковом ударе 325
 —, разложение 318
 — для уравнения Бюргерса 109
 Нелинейная дисперсия 19, 466—491
 — оптика 12, 513—531
 Нелинейные взаимодействия 507
 — — в оптике 529
 Необыкновенные волны в оптике 412
 — лучи 530—531
 Неоднородная среда 161, 162, 197, 240, 367, 368, 381, 385, 488, 489
 Нётер теорема 379—380, 486
 Обратная задача рассеяния, уравнение Кортвега — де Фриза 559
 — — —, — Sin-Гордона 584
 — — —, — Шредингера кубическое 576

- Обыкновенные волны в оптике 411—412
 — лучи 530—531
 Одиночный горб 51, 105
 Одноатомный газ 149, 156
 Определение положения разрыва для волны первого порядка 47—48
 Опрокидывание волн 27—31
 — — на воде 458
 — — — — волновой фронт 134
 — — — — мелкой 136, 439
 — — в газовой динамике 166, 174, 177
 — — паводковых 137
 — — первого порядка 27—31, 67, 68
 — — в потоке транспорта 74
 — —, приливная бора 137
 — — сферических 305
 — —, условие возникновения разрыва 42—43
 — модуляций 471, 500
 Отложение осадков в реках 96
 Отражение ударной волны косою 204—205
 — — — по нормали 185
- Паводковые волны 33, 84—94, 136, 343
 Параболическое уравнение 143
 Перевала метод 102, 333, 336, 357
 Периодическая волна с разрывами 55
 — — —, описываемая уравнением Бюргерса 112
 Периодические волновые пакеты, волны на воде 421, 449, 531
 — — —, — диспергирующие линейные 9, 15, 349
 — — —, — — нелинейные 466, 468
 — — —, — кноидальные 449
 — — —, — Стокса 453
 — — —, модуляции 505
 — — —, описываемые уравнением Клейна — Гордона 468
 — — —, — — Кортвега — де Фриза 449, 543
 — — —, — — Sin-Гордона 579
 — — —, — — Шредингера кубическим 575
 — — — для цепочки Тоды 586
 Поверхностное натяжение 388, 429
 Пограничные слои в задачах о распространении волн 329—330, 336, 338
 Политропный газ 155, 158
 Построение равных площадей 47—48
 Потенциальные переменные 484
- Почти линейная оптика 514, 525
 — линейные диспергирующие волны 470, 479, 493, 503, 507
 Правило характеристик 261—265
 Прандтля — Мейера веер 201
 — число 188
 Приливные боры 67, 68, 137
 Простые волны в газовой динамике 164
 — — — сверхзвуковом течении 201
 Псевдоволновое число 516
 Псевдоволновой вектор 484
 Псевдочастота 484, 516
 Пуассона решение волнового уравнения 224, 225, 229
 Пфаффа задача об интегрируемости дифференциальных форм 126
 — теорема 153
- Равновесное состояние атмосферы изотермическое 161
 — — — конвективное 161—162
 Разрежения волна в газовой динамике 164
 — — — центрированная 167, 184, 201
 Разрывы введение 30, 47, 58, 59
 — — в газовой динамике 177
 — — двух- и трехмерного 310
 — — для звукового удара 322—323
 — — — N -волны 53—54
 — — — одиночного горба 51—53
 — — — периодической волны 55
 Разрывы производных 129—135, 141—143, 232
 —, слияние их 57—58
 Распад волнового пакета 471, 499
 Распределение давления при звуковом ударе 325, 326
 Распространение амплитуды 364
 — волн по ударной волне 275
 — волнового числа 18, 362, 364—366, 368
 — ударной волны 254
 — — — в неоднородной трубе 256
 — — — слабой 302—326
 — — — в стратифицированном слое 265
 — фазы 362
 Расширения волна 29
 Резонанс при нелинейных взаимодействиях 509
 Рейнольдса число 104, 111
 — «эффективное» 109, 111
 Релаксации время 152, 345
 — эффекты 152, 345
 Речные волны 122—123, 135, см. также Паводковые волны

- Риккати уравнение 133—134, 583
Римана инварианты 126
— — в газовой динамике 163, 168, 175
— — — динамике ударных волн 276
— — для сверхзвуковых течений 202
— — в теории мелкой воды 439, 440
— — — модуляции 500
— — для уравнения Кортевега — де Фриза 445, 546
Римановы переменные 126, 200, 201, 316
Рэлея волны 11
- Самодействие 509
Самофокусировка светового пучка 519
— — — узкого 522
Сверхзвуковое обтекание тела вращения 219, 319
— — тонкого конуса 322
— течение 197
— — линеаризованное 207
— —, характеристики 199—200, 320, 321
Сдвига волны 210
Сжатия волны 27—29, 167, 209—210
Син-Гордона уравнение 21, 29, 467, 552, 578
— —, маятниковая модель Скотта 468, 580
— —, обратная задача рассеяния 584
— —, устойчивость 471, 579
Слабые решения 30, 44, 140
— ударные волны 41—42, 176, 302
— — — в простых волнах 177
Слияние разрывов 57, 58
— ударных волн 113
Слоистая среда 242, см. также Стратифицированная среда
Снеллиуса закон 242
Солитоны 348, см. также Уединенные волны
Соотношение между напряжениями и деформациями 209
Сопротивление при сверхзвуковом обтекании тела вращения 221
Сохранения закон см. Закон сохранения
Спиральные волны 498, 578—580
Стационарной фазы метод 357, 365
Стокса волны 19, 453
— —, вариационный подход 531
— —, наибольшая высота 457
— —, нелинейные взаимодействия 507
- Стокса волны на отдели 540
— — — поверхности потока 541
— — с углом 120° 456, 457
— —, усредненный лагранжиан 533
— —, устойчивость 471, 507, 539
— разложение 19, 453, 470, 479, 508, 585
Стратифицированная среда 161, 162, 197, 404
Строго гиперболическая система 118
Структура ударной волны с внутренним разрывом 81, 92, 343
— — — в газовой динамике 186
— — —, иерархия волн 342
— — —, паводковые волны 90
— — — в потоке транспорта 80, 81
— — — для уравнения Бюргерса 104
— — — — первого порядка 37—41
Сферические волны в газовой динамике 302, 308, 312
— —, затухание разрывов 311
— — линейные 211
— — нелинейные 189, 303
— —, опрокидывание 305
— —, сходящиеся 263—265
— —, характеристики 304
Схлопывающиеся ударные волны 194
Сходящиеся ударные волны 194—197, 263—265
— — —, устойчивость 299—301
- Тейлора столб 403
Тени зоны 244
Теория упругости 208
Тепловой поток 146, 150, 151
Теплопроводности коэффициент 152
— уравнение 37, 101, 120
Термодинамические соотношения 152
Течения адиабатические 157
— Бельтрами 198
— сверхзвуковые 197
Тоды цепочка 554, 584
Толщина ударной волны 40, 189
Томаса преобразование 97
Транспорта потоки 32, 72—84
— —, дискретные модели 82
Трубки лучей 237, 238, 268
— —, геометрия их 269—271
- Удельные теплоемкости 154, 156
Уединенная волна, аналог ее в нелинейной оптике 526
Уединенные волны 20, 21, 348, 449, 466

- Уединенные волны, взаимодействие их 22, 552
 — —, наибольшая высота 450, 460
 — —, непрерывное распределение 548, 571
 — —, образованные начальным возмущением 568
 — —, описываемые уравнением Кортевега — де Фриза 20, 449
 — —, — — Sin-Гордона 579
 — —, — — Шредингера кубическим 575
 — —, последовательность их 548, 569—570
 — —, теория модуляции 505—506
 Ультрагиперболическое уравнение 143
 Упругие волны 125, 208—210
 — — сдвига 210
 — — сжатия 209—210
 Уравнение амплитудное 379
 — — для волнового действия 384, 386
 — колебаний балки 16, 349, 351, 362, 363
 — сохранения для волнового действия 380, 488, 536, 537
 — — — импульса 381
 Уравнения сохранения для волн на воде 535, 536
 — — — уравнения Кортевега — де Фриза 573
 Условие излучения 430
 — на разрыве, необратимость ударной волны 43
 — — — для слабого решения 45
 — — — уравнения первого порядка 35, 36
 Условия на разрыве в газовой динамике 171—176
 — — — для сверхзвукового течения 203
 — — — — систем уравнений 138
 — — — в теории мелкой воды 439
 — — — — модуляции 502
 Усредненный вариационный принцип 378, 473, 477, 480, 487, 492
 — лагранжиан 377, 472, 477, 480, 483, 487, 490, 538, 543
 Устойчивость волн в нелинейной оптике 518
 — — паводковых 89, 136
 — — на поверхности раздела между двумя жидкостями 428
 — — Стокса 471, 507, 539
 — — ударных 298—301
 —, дисперсионные эффекты высшего порядка 505
 Устойчивость иерархий волн 329, 330, 341
 — модуляций 471, 497
 — потока транспорта 78, 79, 84
 — решения уравнения Клейна — Гордона 471
 — — — Sin-Гордона 471, 580
 — — — Шредингера кубического 575
 — химических процессов обмена 98
 Фаза 349
 —, распространение ее 362
 Фазовая скорость 9, 16, 350
 — — локальная 362
 Ферма принцип 241
 Фруда число 464
 Характеристик правило 261—265
 Характеристики 25, 26, 116
 —, веер их 29, 167, 184
 — для волн, распространяющихся по ударной волне 277
 — — — речных 123—124
 — — — сферических 190, 304
 — — — ударных в неоднородной трубе 257, 259
 — — — упругих 125
 — — — цилиндрических 190, 306
 — — — электромагнитных 124—125
 — в газовой динамике 123, 162, 163
 — — — магнитной 124
 — для гиперболических систем 117
 — — дифракции плоской ударной волны 283
 — — конечноразностных схем 126—129
 — в нелинейной оптике 518
 —, огибающая их 27
 —, распространение разрывов вдоль них 129
 — в теории мелкой воды 123—124
 — — — модуляции 494
 — для течения осесимметричного 321
 — — — сверхзвукового 199—200
 — — уравнений первого порядка 66, 69
 — — уравнения волнового 120
 — — — Кортевега — де Фриза 546
 — — — эйконала 235, 241, 246
 Характеристическая скорость 119
 — форма уравнения 117
 Характеристические кривые 26, 67, 116
 — поверхности 141
 Химические процессы обмена 33, 96
 Хроматография 33, 96

Центрированная волна расширения
29
— — сжатия 28, 166
Центрированные волны при дифракции ударной волны 284
Цилиндрическая волна, затухание ее 311, 312
— — линейная 214
— — нелинейная 189, 306
— — ударная сходящаяся 263—265
— —, хвост ее 218

Частота 9, 349
— Вейсала — Бранта 405
— локальная 17, 361
— плазменная 16, 514
—, распространение ее 361, 365
Число волновое 9, 16, 350, 360, 361
— — локальное 17, 360, 361
— —, распространение его 18, 362, 364—366, 368

Шези закон 82

Шредингера уравнение 352, 560
— — нелинейное см. Кубическое уравнение Шредингера

Эйконала уравнение 235
Эйри интеграл 425
— уравнение 427
— функция 426, 430
Экспоненциальная атмосфера 161
Электромагнитные волны 124—125, 210
Эллиптическое уравнение 120, 143
Энергия внутренняя 146, 150—152, 154, 156
— волновая 380, 536, 537
— движения молекул вращательно-го 149, 150, 152, 156
— — — колебательного 149, 150, 152, 156
— — — поступательного 149, 156
—, распространение ее 369
— — — в геометрической оптике 238, 245—246
Энтальпия 154
Энтропия 153, 155
—, изменение при переходе через ударную волну 174—175, 187—188
Эффект близких «боковых частот» (side bands) 509

Оглавление

Предисловие редактора перевода	5
Предисловие	6
Глава 1. Введение и общий обзор	7
1.1. Два основных класса волновых движений	8
1.2. Гиперболические волны	10
1.3. Диспергирующие волны	15
1.4. Нелинейная дисперсия	19
ЧАСТЬ I. ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ	
Глава 2. Волны и уравнения первого порядка	23
2.1. Непрерывные решения	24
2.2. Кинематические волны	31
2.3. Ударные волны	35
2.4. Структура ударной волны	37
2.5. Слабые ударные волны	41
2.6. Условие опрокидывания	42
2.7. Замечание о законах сохранения и слабых решениях	44
2.8. Построение разрывов; квадратичная функция $Q(\rho)$	47
<i>Одиночный горб</i>	51
<i>N-волна</i>	53
<i>Периодическая волна</i>	55
<i>Слияние разрывов</i>	57
2.9. Построение разрывов; произвольная функция $Q(\rho)$	58
2.10. Замечание о линеаризованной теории	60
2.11. Задача с краевым условием; распространение сигнала	62
2.12. Более общие квазилинейные уравнения	66
<i>Затухающие волны</i>	67
<i>Волны от движущегося источника</i>	68
2.13. Нелинейные уравнения первого порядка	69
Глава 3. Конкретные задачи	72
3.1. Поток транспорта	72
<i>Задача о светоторе</i>	75
<i>Эффекты высших порядков. Диффузия и время реакции</i>	77

	<i>Волны высшего порядка</i>	79
	<i>Структура ударной волны</i>	80
	<i>Замечание о дискретных моделях</i>	82
3.2.	Паводковые волны	84
	<i>Эффекты высшего порядка</i>	86
	<i>Устойчивость; катящиеся волны</i>	88
	<i>Моноклиальная паводковая волна</i>	90
3.3.	Ледники	94
3.4.	Химические процессы обмена; хроматография; отложение осадков в реках	96
Глава 4.	Уравнение Бюргерса	99
4.1.	Замена Коула — Хопфа	100
4.2.	Поведение решения при $\nu \rightarrow 0$	101
4.3.	Структура ударной волны	104
4.4.	Одиночный горб	105
4.5.	N -волна	109
4.6.	Периодическая волна	112
4.7.	Слияние ударных волн	113
Глава 5.	Гиперболические системы	115
5.1.	Характеристики и классификация систем	116
5.2.	Примеры классификации систем	119
5.3.	Инварианты Римана	125
5.4.	Интегрирование шагами при помощи характеристик	126
5.5.	Разрывы производных	129
5.6.	Разложение вблизи волнового фронта	131
5.7.	Пример. Речные волны	135
	<i>Волны на мелкой воде</i>	136
	<i>Паводковые волны</i>	136
	<i>Приливная бора</i>	137
5.8.	Ударные волны	138
5.9.	Системы с большим числом независимых переменных	140
5.10.	Уравнения второго порядка	142
Глава 6.	Газовая динамика	144
6.1.	Уравнения движения	144
6.2.	Точка зрения кинетической теории	148
6.3.	Уравнения без учета вязкости, теплопередачи и релаксации	151
6.4.	Термодинамические соотношения	152
	<i>Идеальный газ</i>	153
	<i>Удельные теплоемкости</i>	154

	<i>Идеальный газ с постоянными удельными теплоемкостями</i>	154
	<i>Кинетическая теория</i>	155
6.5.	Иные формы уравнений движения	156
6.6.	Акустика	158
	<i>Изотермическое равновесное состояние</i>	161
	<i>Конвективное равновесное состояние</i>	161
6.7.	Нелинейные плоские волны	162
6.8.	Простые волны	164
6.9.	Простые волны и кинематические волны	168
6.10.	Ударные волны	170
	<i>Полезные модификации условий на разрыве</i>	172
	<i>Свойства ударных волн</i>	174
	<i>Слабые ударные волны</i>	175
	<i>Сильные ударные волны</i>	176
6.11.	Слабые ударные волны в простых волнах	176
6.12.	Задача Коши; взаимодействие волн	180
6.13.	Задача об ударной трубе	183
6.14.	Отражение ударной волны	185
6.15.	Структура ударной волны	186
6.16.	Автомодельные решения	189
	<i>Задача о сильном взрыве</i>	190
	<i>Автомодельные уравнения</i>	193
	<i>Задача Гудерля о сходящейся ударной волне</i>	194
	<i>Другие автомодельные решения</i>	197
6.17.	Стационарное сверхзвуковое течение	197
	<i>Характеристические уравнения</i>	199
	<i>Простые волны</i>	201
	<i>Соотношения для косо́й ударной волны</i>	203
	<i>Отражение косо́й волны</i>	204

Глава 7.	Волновое уравнение	206
7.1.	Области приложений волнового уравнения	206
	<i>Акустика</i>	206
	<i>Линеаризованное сверхзвуковое течение</i>	207
	<i>Теория упругости</i>	208
	<i>Электромагнитные волны</i>	210
7.2.	Плоские волны	210
7.3.	Сферические волны	211
7.4.	Цилиндрические волны	214
	<i>Поведение вблизи начала координат</i>	216
	<i>Поведение вблизи волнового фронта и на больших расстояниях</i>	217
	<i>Хвост цилиндрической волны</i>	218

7.5.	Сверхзвуковое обтекание тела вращения	219
	<i>Сопротивление</i>	221
	<i>Поведение вблизи конуса Маха и на больших расстояниях</i>	222
7.6.	Задача Коши в двух и трех измерениях	223
	<i>Проверка решения</i>	226
	<i>Волновой фронт</i>	227
	<i>Двумерная задача</i>	228
7.7.	Геометрическая оптика	229
	<i>Разрывы функции φ и ее первых производных</i>	232
	<i>Разложение вблизи волнового фронта и поведение на больших расстояниях</i>	233
	<i>Высокие частоты</i>	233
	<i>Определение S и Φ_0</i>	234
	<i>Каустики</i>	239
7.8.	Неоднородная среда	240
	<i>Слоистая среда</i>	242
	<i>Волновод в океане</i>	243
	<i>Зоны тени</i>	244
	<i>Распространение энергии</i>	245
7.9.	Анизотропные волны	246
	<i>Плоские и осесимметричные задачи</i>	249
	<i>Источник в движущейся среде</i>	250
	<i>Магнитная газовая динамика</i>	251
Глава 8.	Динамика ударных волн	254
8.1.	Распространение ударной волны по неоднородной трубе	256
	<i>Случай малых возмущений</i>	258
	<i>Конечные изменения площади; правило характеристик</i>	261
8.2.	Распространение ударной волны в стратифицированном слое	265
8.3.	«Геометрическая динамика» ударной волны	268
8.4.	Двумерные задачи	272
8.5.	Распространение волн по ударной волне	275
8.6.	Вторичные ударные волны	279
8.7.	Дифракция плоских ударных волн	282
	<i>Разрежение около угла</i>	284
	<i>Дифракция на клине</i>	288
	<i>Дифракция на круговом цилиндре</i>	290
	<i>Дифракция на конусе или сфере</i>	293
8.8.	Устойчивость ударных волн	298
	<i>Устойчивость сходящихся цилиндрических ударных волн</i>	299

8.9. Распространение ударной волны в движущейся среде	301
Глава 9. Распространение слабых ударных волн	302
9.1. Метод введения нелинейности	302
<i>Построение разрывов</i>	310
9.2. Обоснование метода	311
<i>Разложения по малому параметру</i>	313
<i>Разложения на больших расстояниях</i>	316
<i>Разложение вблизи волнового фронта</i>	316
<i>Разложение N-волны</i>	318
9.3. Звуковые удары	319
<i>Ударные волны</i>	322
<i>Обтекание тонкого конуса</i>	323
<i>Поведение ударной волны на больших расстояниях от тела конечных размеров</i>	324
<i>Обобщения теории</i>	325
Глава 10. Иерархия волн	327
10.1. Точные решения линеаризованной задачи	330
10.2. Упрощенный подход	338
10.3. Системы высокого порядка, нелинейные эффекты и ударные волны	340
10.4. Структура ударной волны	342
10.5. Примеры	343
<i>Паводковые волны</i>	343
<i>Магнитная газовая динамика</i>	344
<i>Эффекты релаксации в газах</i>	345
ЧАСТЬ II. ДИСПЕРГИРУЮЩИЕ ВОЛНЫ	
Глава 11. Линейные диспергирующие волны	348
11.1. Дисперсионные соотношения	349
<i>Примеры</i>	351
<i>Соответствие между уравнением и дисперсионным соотношением</i>	352
<i>Определение диспергирующих волн</i>	354
11.2. Общее решение в виде интеграла Фурье	354
11.3. Асимптотическое поведение решения	356
11.4. Групповая скорость; распространение возмущений волнового числа и амплитуды	360
11.5. Групповая скорость с точки зрения кинематической теории	365
<i>Обобщения</i>	367
11.6. Распространение энергии	369
11.7. Вариационный подход	375

	<i>Неоднородная среда</i>	381
	<i>Нелинейные волновые пакеты</i>	381
11.8.	Непосредственное использование асимптотических разложений	382
	<i>Неоднородная среда</i>	385
Глава 12.	Картины волн	388
12.1.	Дисперсионное соотношение для волн на воде	388
	<i>Гравитационные волны</i>	388
	<i>Капиллярные волны</i>	389
	<i>Комбинированные эффекты гравитации и поверхностного натяжения</i>	390
	<i>Теория мелкой воды с учетом дисперсии</i>	390
	<i>Магнитная гидродинамика</i>	391
12.2.	Дисперсия от мгновенного точечного источника	391
12.3.	Волны на поверхности стационарного потока	392
12.4.	Корабельные волны	393
	<i>Дальнейшее исследование картины волн</i>	395
12.5.	Капиллярные волны на тонком слое воды	398
12.6.	Волны во вращающейся жидкости	402
12.7.	Волны в стратифицированной жидкости	404
12.8.	Кристаллооптика	408
	<i>Одноосные кристаллы</i>	411
	<i>Двуосные кристаллы</i>	414
Глава 13.	Волны на воде	415
13.1.	Уравнения для волн на воде	415
13.2.	Вариационная формулировка	418
	<i>ЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ</i>	420
13.3.	Линеаризованная формулировка	420
13.4.	Линейные волны на воде постоянной глубины	421
13.5.	Задача Коши	421
13.6.	Поведение решения вблизи фронта волнового пакета	424
13.7.	Волны на поверхности раздела между двумя жидкостями	427
13.8.	Поверхностное натяжение	429
13.9.	Волны на поверхности стационарного потока	430
	<i>Одномерные гравитационные волны</i>	432
	<i>Одномерные волны с учетом поверхностного натяжения</i>	434

	<i>Корабельные волны</i>	435
	<i>НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ</i>	437
13.10.	Теория мелкой воды; длинные волны	437
	<i>Задача о разрушении плотины</i>	440
	<i>Условия на бере</i>	441
	<i>Дальнейшие законы сохранения</i>	442
13.11.	Уравнения Кортевега — де Фриза и Бус-синеска	443
13.12.	Уединенные и кноидальные волны	449
13.13.	Волны Стокса	453
	<i>Случай произвольной глубины</i>	455
13.14.	Опрокидывание и заострение волн	458
13.15.	Модель структуры боры	463
Глава 14.	Нелинейная дисперсия и вариационные методы	466
14.1.	Нелинейное уравнение Клейна — Гордона	467
14.2.	Начальные сведения о модуляции	470
14.3.	Вариационный подход к теории модуляции	472
14.4.	Обоснование вариационного подхода	473
14.5.	Оптимальное использование вариационного принципа	478
	<i>Преобразование Гамильтона</i>	479
14.6.	Замечания о теории возмущений	481
14.7.	Обобщения на большее число переменных	483
14.8.	Адиабатические инварианты	486
14.9.	Многофазовые волновые пакеты	489
14.10.	Эффекты диссипации	490
Глава 15.	Групповые скорости, неустойчивость и уточнение эффектов дисперсии	492
15.1.	Почти линейный случай	493
15.2.	Характеристическая форма уравнений	494
	<i>Случай нескольких зависимых переменных</i>	497
15.3.	Тип уравнений и устойчивость	497
15.4.	Нелинейная групповая скорость, групповое расщепление, ударные волны	499
15.5.	Дисперсионные эффекты в приближении более высокого порядка	503
15.6.	Анализ Фурье и нелинейные взаимодействия	507

Глава 16. Приложения нелинейной теории	513
НЕЛИНЕЙНАЯ ОПТИКА	513
16.1. Основные идеи	513
Однородные волновые пакеты	514
Усредненный лагранжиан	515
16.2. Одномерные модуляции	518
16.3. Самофокусировка светового пучка	519
Тип уравнений	520
Фокусировка	521
Узкие пучки	522
16.4. Дисперсионные эффекты в приближении более высокого порядка	525
Узкие пучки	527
16.5. Генерация второй гармоники	528
ВОЛНЫ НА ВОДЕ	531
16.6. Усредненный вариационный принцип для волн Стокса	531
16.7. Уравнения модуляций	534
16.8. Уравнения сохранения	535
Сохранение массы	535
Энергия и импульс	535
16.9. Индуцированное среднее течение	537
16.10. Глубокая вода	538
16.11. Устойчивость волн Стокса	539
16.12. Волны Стокса на отмели	540
16.13. Волны Стокса на поверхности потока	541
УРАВНЕНИЕ КОРТЕВЕГА — ДЕ ФРИЗА	542
16.14. Вариационная формулировка	542
16.15. Характеристические уравнения	545
Случай малой амплитуды	547
16.16. Последовательность уединенных волн	548
Глава 17. Точные решения; взаимодействующие уединенные волны	552
17.1. Канонические уравнения	552
УРАВНЕНИЕ КОРТЕВЕГА — ДЕ ФРИЗА	555
17.2. Взаимодействующие уединенные волны	555
17.3. Обратная задача рассеяния	559
Альтернативная версия	564
17.4. Частный случай чисто дискретного спектра	567

17.5.	Уединенные волны, образованные начальным распределением произвольного вида	568
17.6.	Преобразование Миуры и уравнения сохранения	572
	<i>КУБИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА</i>	574
17.7.	Приложения кубического уравнения Шредингера	574
17.8.	Однородные волновые пакеты и уединенные волны	575
17.9.	Обратная задача рассеяния	576
	<i>УРАВНЕНИЕ SIN-ГОРДОНА</i>	578
17.10.	Периодические волновые пакеты и уединенные волны	579
17.11.	Взаимодействие уединенных волн	580
17.12.	Преобразования Беклунда	582
17.13.	Обратная задача рассеяния для уравнения Sin-Гордона	584
	<i>ЦЕПОЧКА ТОДЫ</i>	584
17.14.	Решение Тоды для экспоненциальной цепочки	585
	<i>УРАВНЕНИЕ БОРНА—ИНФЕЛЬДА</i>	588
17.15.	Взаимодействующие волны	589

Список литературы	592

Именной указатель	603

Предметный указатель	606